数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 86-91


# B S E - 不 等 式

山形大工 高 橋 眞 映 (Sin-Ei Takahasi)

1。複素 Banach 空間 X 及びその共役空間 $X^*$ に対する関数解析の基本不等式

$$|f(x)| \le \|f\| \|x\| \quad (x \in X, f \in X^*)$$

は、あるときは Cauchy-Schwarz の不等式を表わしたり、あるときは Hörder の不等式を表わしたり、様々なところで応用される重要な不等式である。

ここでは X が可換 Banach 環 A 上の Banach module であるとき、特に A が複素数体 C であれば上の基本不等式を表わすような、BSE と呼ばれる不等式を定義し、X 上の multiplier の Gelfand 変換との関連性について、具体的な module で考察することが主目的である。

2。A の carrier 空間 $\Phi_A$ の各元 $\varphi \in \Phi_A$ 対して、$M_\varphi$ を対応する A の極大正則 ideal とし、

$$X^\varphi = \overline{\mathrm{span}}\{M_\varphi X + (1 - e_\varphi)X\}$$

と置く。ここで $e_\varphi$ は $\varphi(e_\varphi) = 1$ を満たす A の元である。今各 $\varphi \in \Phi_A$ 対して、$X_\varphi = X/X^\varphi$ と置き、$\Phi_A$ 上の $X_\varphi$ に関するベクトル場の全体を $\prod X_\varphi$ で表わす。また各 $\varphi \in \Phi_A, x \in X$ に対して、

$$\pi_\varphi(x) \equiv \hat{x}(\varphi) = x + X^\varphi$$

と置く。このとき、ベクトル場 $\sigma \in \prod X_\varphi$ は、次の不等式を満たす正数 $\beta > 0$ が存在するとき BSE と呼ぶ：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \beta \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}$$

$$(\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi_A, \forall f_1 \in (X_{\varphi_1})^*, \ldots, \forall f_n \in (X_{\varphi_n})^*, \forall n = 1, 2, \ldots)$$

そのような β の下限を $\|\sigma\|_{BSE}$ で表わす。このとき、BSE ベクトル場の全体 $\prod_{BSE} X_\varphi$ はノルム $\|\sigma\|_{BSE}$ のもとで、Banach A-module となることが分かる。従って、不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \|\sigma\|_{BSE} \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}$$

$$(\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi_A, \forall f_1 \in (X_{\varphi_1})^*, \ldots, \forall f_n \in (X_{\varphi_n})^*, \forall n = 1, 2, \ldots)$$

を BSE-不等式と呼ぶことにする。

特に A が複素数体 C であれば、$\Phi_A$ は C からそれ自身への恒等写像 $i_C$ ただひとつからなるから、

$$X^{i_C} \cong \{0\}, X_{i_C} \cong X, \pi_{i_C}(x) \cong x + \{0\} \cong x \ (\forall x \in X), X \cong \prod X_\varphi$$

である。従って、BSE-不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \|\sigma\|_{BSE} \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}$$

は単に不等式

$$|f(x)| \leq \|x\|_{BSE} \|f\| \ (x \in X, f \in X^*)$$

を表わす。しかし Hahn-Banach の拡張定理から、$\|x\|_{BSE} = \|x\|$ であるから、この場合 BSE-不等式は、関数解析の基本不等式を表わしている。

更に A = X であれば、

$$X^\varphi = M_\varphi, X_\varphi = A/M_\varphi \cong \mathbf{C}, (X_\varphi)^* \cong \mathbf{C}^* \cong \mathbf{C}, \pi_\varphi(x) \cong \varphi(x) \ (x \in X, \varphi \in \Phi_A)$$

であるから、BSE-不等式は、旧 BSE-不等式 ([2])

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\sigma(\varphi_i)\right| \leq \|\sigma\|_{BSE}\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right\|_{A^*}$$

$$(\forall\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi_A, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}, \forall n = 1, 2, \dots)$$

を表わしている。従ってBSE-不等式は関数解析の基本不等式と旧BSE-不等式を補間しているとも考えられる。

3。AからXへの連続なA-準同型写像をmultiplierと呼びその全体をM(A, X)で表わす。このとき各$T \in M(A, X)$に対して、

$$(Ta)\hat{}(\varphi) = \varphi(a)\hat{T}(\varphi) \ (\forall a \in A, \forall\varphi \in \Phi_A)$$

を満たすベクトル場$\hat{T}$が一意に定まる([5])。今

$$\hat{X} = \{\hat{x}: x \in X\}, \hat{M}(A, X) = \{\hat{T}: T \in M(A, X)\}$$

と置く。更に連続なBSEベクトル場の全体を$\prod_{BSE}^{c} X_\varphi$で表わす。ここでベクトル場$\sigma \in \prod X_\varphi$が連続であるとは、次の意味である：積位相を導入した空間$\Phi_A \times X$を考え、

$$\pi(\varphi, x) = (\varphi, \hat{x}(\varphi)) \ (\varphi \in \Phi_A, \ x \in X)$$

で定義される$\Phi_A \times X$から$\bigcup_{\varphi\in\Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$への写像$\pi$に関する商位相を$\bigcup_{\varphi\in\Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$に導入したとき、$\Phi_A$から$\bigcup_{\varphi\in\Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$への写像: $\varphi \to (\varphi, \sigma(\varphi))$が連続である。

我々の興味は

$$\hat{M}(A, X) = \prod_{BSE}^{c} X_\varphi \quad 及び \quad \hat{X} = \prod_{BSE}^{c} X_\varphi$$

となる場合である。

前者を満たすBanach moduleをBSEと呼んでおり、これはmultiplierのGelfand変換がBSE-不等式で完全に特徴付けられることを意味している。可換Banach環はそれ自身の上のBanach moduleと見ることができるが、それがBSEであるとき、BSE-環と呼ぶ。円板環、ハーディ環、群環、(可換) C*-環などはBSE-環の代表的なものである([2])。また擬中心的C*-環はその中心上のBSE Banach module である。更にコンパクト可換群 G に対して、C(G), $L^p(G)$ ($1 \le p \le \infty$), M(G) は皆 BSE-Banach $L^1(G)$-module である ([5])。またこれらの結果は [1] の不備な点を是正している。またもし G がコンパクトでなくても M(G) は BSE-Banach $L^1(G)$-module である ([4])。

後者を満たすものとしては、可換 Banach 環のなかでは、$\ell^1$, 可換 H*-環、$L^p(G)$ (G: compact), $L^1(N_k)$ ($N_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$) 等がある ([3])。Banach module では、G がコンパクトのとき、$L^1(G)$ - module としての $L^p(G)$ ($1 < p \le \infty$) がそうである ([5])。また A が有界近似単位元を持たない場合においても、次の定理が示すように存在する。

*Theorem. Let G be a compact abelian group and let $1 < p, q < +\infty$. Then $L^q(G)$ is a Banach $L^p(G)$-module such that* $(L^q(G))^\wedge = \prod^{c}_{\gamma \in G^\wedge \, BSE} (L^q(G))_\gamma$ .

Proof. Let $\gamma \in \hat{G}$ and $\varphi_\gamma$ the multiplicative linear functional on $L^p(G)$ associated to $\gamma$. Then $(\mathrm{Ker}\,\varphi_\gamma) * L^q(G) \subset (1-\gamma) * L^q(G)$. Actually, let $f \in (\mathrm{Ker}\,\varphi_\gamma)$ and $g \in L^q(G)$. Then

$$(\gamma * f)(t) = \int_G \gamma(ts^{-1})f(s)ds = \gamma(t)\int_G \overline{\gamma(s)}f(s)ds = \gamma(t)\hat{f}(\gamma) = \gamma(t)\varphi_\gamma(f) = 0$$

for all $t \in G$. Hence $f * g = (1-\gamma) * f * g \in (1-\gamma) * L^q(G)$. We therefore have $(L^q(G))^{\varphi_\gamma} = (1-\gamma) * L^q(G)$. Let $g \in L^q(G)$. Then $\| g + (L^q(G))^{\varphi_\gamma} \| = \inf_{h \in L^q(G)} \| g + (1-\gamma) * h \|_q \le \| \gamma * g \|_q = \| \hat{g}(\gamma)\gamma \|_q = |\hat{g}(\gamma)|$. Conversely,

$$|\hat{g}(\gamma)| = \| \gamma * g \|_q = \| \gamma * \{g + (1-\gamma) * h\} \|_q \le \| g + (1-\gamma) * h\} \|_q$$

for all $h \in L^q(G)$, so $|\hat{g}(\gamma)| \le \| g + (L^q(G))^{\varphi_\gamma} \|$. We conclude that the mapping:

$$g + (L^q(G))^{\varphi_\gamma} \to \hat{g}(\gamma)$$

is an isometric linear isomorphism of $(L^q(G))_{\varphi_\gamma}$ onto the complex numbers $\mathbf{C}$.

Now let $\sigma \in \prod^{c}_{\gamma \in \hat{G}_{BSE}} (L^q(G))_\gamma$. Then we can regard $\sigma$ as a complex-valued function $\hat{G}$. Also we have

$$\pi_{\varphi_\gamma}(g) = g + (L^q(G))^{\varphi_\gamma} \cong \hat{g}(\gamma) = \varphi_\gamma(g)$$

for each $\gamma \in \hat{G}$ and $g \in L^q(G)$, so that

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma(\gamma_i)) \right| \le \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \circ \varphi_{\gamma_i} \right\|_{(L^q(G))^*} = \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \right\|_p$$

$$(\forall \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \hat{G}, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}, \forall n = 1, 2, \dots)$$

Since $\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \right\|_p \le \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \right\|_\infty$, it follows from the Bochner-Shoenberg-Eberlein theorem that there exists $\mu_\sigma \in M(G)$ such that

$$\sigma(\gamma) = \int_G \gamma(t^{-1}) d\mu_\sigma(t)$$

for all $\gamma \in \hat{G}$. If $\tau$ is any trigonometric polynomial on $G$ defined by

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i(t) \quad (t \in G),$$

then $\sum_{i=1}^{n} c_i \sigma(\gamma_i) = \int_G \tau(t^{-1}) d\mu_\sigma(t)$, so that $\left| \int_G \tau(t^{-1}) d\mu_\sigma(t) \right| \le \beta \| \tau \|_p$. By the Hahn-Banach extension theorem, there exists a linear functional $M_\sigma$ on $L^p(G)$ such that

$$M_\sigma(\tau) = \int_G \tau(t^{-1}) d\mu_\sigma(t)$$

for all trigonometric polynomial $\tau$ on $G$. Consider the corresponding function $g_\sigma \in L^q(G)$ given by

$$M_\sigma(h) = \int_G h(t) g_\sigma(t^{-1}) dt \quad (h \in L^p(G)).$$

Then

$$g_\sigma + (L^q(G))^{\varphi_\gamma} \cong \hat{g}_\sigma(\gamma) = M_\sigma(\gamma) = \int_G \gamma(t^{-1}) d\mu_\sigma(t) = \sigma(\gamma)$$

for all $\gamma \in \hat{G}$, so that $\sigma \in (L^q(G))^\wedge$. Consequently,

$$(L^q(G))^\wedge = \prod^c_{\gamma\in G^\wedge_{BSE}} (L^q(G))_\gamma. \quad \text{Q. E. D.}$$

離散 carrier 空間を持つ可換 C*-環上の任意の Banach module は BSE である ([5])。従って上の定理とあわせて次のような問題が浮かんでくる。

問題 1。コンパクト可換群 G 上の $L^p$-環 $L^p(G)$ $(1 < p < +\infty)$を考えるとき、任意の Banach $L^p(G)$-module X は条件：

$$\hat{X} = \prod^c_{\gamma\in G^\wedge_{BSE}} X_\gamma$$

を満たすか？

更に一般化して、次の問題も考えられる。

問題 2。次の条件を満たす可換 Banach 環 Aを特徴付けよ：A 上の任意の Banach module X は $\hat{X} = \prod^c_{BSE} X_\varphi$ を満たす。

また

$$\hat{M}(A, X) = \prod^c_{BSE} X_\varphi$$

を満たすものについてはどうか？

## References


1. T. S. Liu, A. C. M. van Rooij and J.-K. Wang, A generalized Fourier transformation for $L^1(G)$ -modules, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **36**(1984), 365-377.
2. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 149-158.
3. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, Math. Japonica, **37**(1992), 607-614.
4. S.-E. Takahasi, BSE Banach modules, 第 1 回関数空間セミナー報告集、北海道大学数学講究録、Series #26, 1993, pp 23-28.
5. S.-E. Takahasi, BSE Banach modules and Multipliers, to appear in J. Funct. Analysis.