数理解析研究所講究録
第 861 巻 1994 年 128-148

部分均衡における資本資産評価モデル

上智大経済 斎藤 進 (Susumu Saito)
上智大経済 津野 義道 (Yoshimichi Tsuno)

不確実性を伴う金融商品 (市場が形成されていて自由に売買が行える商品) の価格評価を調べる。価格が多くの投資家による均衡から決定される事を前提に、その期待収益率を測るものとして資本資産評価モデル (capital asset pricing model:略称 CAPM) の "ベータ公式" を導出する。state price の直交分解というアプローチをとるので、この評価式は部分均衡の世界で成立すると考えられる。

Part I で、CAPM の理論的背景について説明する。本質的には D.Duffie[1] に、多くの文献紹介とともに書かれている。又、詳しい証明については、我々の研究会 (上智大学資本資産研究会) による Discussion Paper[2] も参照していただければ幸いです。

Part II では、理論的に得られたベータ公式を実証する方法、及びそれに際しての注意を述べ、最後に最近の東京証券市場 (第 1 部) のデータに基づく実証を行う。CAPM のベータ公式には、基準となるポートフォリオが必要となるが、実証結果が示す所では、日経指数 (NK225) や TOPIX はどうもその基準ポートフォリオとしての役割は負っていないようである。収益率を的確に測る基準ポートフォリオを、どの様にして構成すればよいのかは、今後の実証研究にまつところが多いと思われる。

Part I CAPM の理論的背景

現在 ($t=0$) からみて期末 ($t=1$) には S 個の状態が生じ得るものとし、期末には、そのうちのある 1 つが実現する。即ち、S 個の根元事象からなる標本空間

$$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, S\}$$

が存在するとする。各根元事象 j には、それが生じる確率 p_j が付与されている。

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_S = 1, \qquad p_j > 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, S$$

Ω の部分集合の全体を $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = 2^{\Omega}$) とする。$(\Omega, \mathcal{F}, \{p_j\})$ が確率空間である。Ω上の確率変数は S 次元ベクトルで表現できる。

さて、金融商品 (以下、証券と呼ぶ) は N 種類あり、それらの取引単位は無限に分割可能であるとする。第 i 証券の現在 $(t = 0)$ における価格を q_i $(q_i \geqq 0)$ とする。

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$

記号に関する注意　一般に $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、次の記号を用いる。

1. $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ とは各成分 x_i が $x_i \geqq 0$ を満たすこと。

2. $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ とは $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ であり、かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となること。

3. $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{0}$ とは各成分 x_i が $x_i > 0$ を満たすこと。

$$\boldsymbol{R}^n_+ = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \}, \qquad \boldsymbol{R}^n_{++} = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{0} \}$$

ここでは1期間モデルを考察するので、現在 $(t = 0)$ 存在する証券は、期末 $(t = 1)$ に全て決済され、それ以降に付いては全く考えない。期末における各証券の決済額は、その時にどのような状態 (state) が発生するかに依存する。

状態 j が生じたときの第 i 証券の決済額（配当込みの $t = 1$ における価格とみなしてよい）を D_{ij} とする。$D_{ij} < 0$ になって支払を要求される証券は自由に破棄できるものとする。このように各証券が自由処分可能 (free disposal) とすれば $D_{ij} \geqq 0$ としてよい。D_{ij} を (i, j) 成分に持つ N 行 S 列の零ではない非負行列 D を配当行列 (devidend matrix) という。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{state } 1 & \text{state } 2 & & \text{state } S \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{証券 } 1 \\ \text{証券 } 2 \\ \vdots \\ \text{証券 } N \end{array} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1S} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NS} \end{pmatrix} = D \end{array}$$

ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}$ とは、$\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N$ のことである。$\boldsymbol{\theta}$ に非負制約がない事に注意する。現物買い (long position: $\theta_i > 0$)、空売り (short sale: $\theta_j < 0$) が許される。ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}$ の現在市場価値 (market value) は $\boldsymbol{\theta}$ と価格 $\boldsymbol{q}$ との内積

$$(\boldsymbol{q}\ ,\boldsymbol{\theta}\ ) = q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + \cdots + q_N\theta_N$$

になり、期末における決済額は state の空間 Ω 上の確率変数

$${}^tD\boldsymbol{\theta} \ = \begin{pmatrix} D_{11}\theta_1 + D_{21}\theta_2 + \cdots + D_{N1}\theta_N \\ D_{12}\theta_1 + D_{22}\theta_2 + \cdots + D_{N2}\theta_N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{1S}\theta_1 + D_{2S}\theta_2 + \cdots + D_{NS}\theta_N \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{state 1 での決済額} \\ \leftarrow \text{state 2 での決済額} \\ \\ \leftarrow \text{state } S \text{ での決済額} \end{array}$$

で与えられる。

裁定 (**arbitrage**) あるいは "free lunch" とは、ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N$ で、次のいずれかの条件を満たすものである。

1. $(\boldsymbol{q}\ ,\boldsymbol{\theta}\ ) \leqq 0$ かつ ${}^tD\boldsymbol{\theta} > \boldsymbol{0}$

2. $(\boldsymbol{q}\ ,\boldsymbol{\theta}\ ) < 0$ かつ ${}^tD\boldsymbol{\theta} \geqq \boldsymbol{0}$

"arbitrage" は、財務関係の本では "裁定" と訳されているが、通常の訳では "鞘取り" である。例えば、同一の商品に店によって異なる価格がつけられていれば、安い値段で数多く買い、それを高く売る（利鞘を取る）ことによって自己資金ゼロでも巨額の富を手にすることができる。

arbitrage の条件 1 は、$t = 0$ で自己負担無しに、期末にある状況ではいくらかの富が得られることを意味し、$\boldsymbol{\theta}$ を正の定数倍すれば、その状況ではいくらでも富が得られることになる。また条件 2 は、期末における返済義務無しに、現在いくらでも富が得られることを意味している。多人数の交換経済で、arbitrage が存在すれば、それに対する需要が急騰し、その結果価格体系が変化し、裁定は解消されて行くであろう。CAPM は均衡価格体系を基礎においている。均衡価格体系とは、与えられた確率空間と配当行列の下で多くの投資家が各自の効用を最大にするポートフォリオを選択し、その結果、市場全体

の需要と供給が一致する価格体系の事である。ここでは、効用関数に関する性質、均衡価格の存在証明は割愛するが、均衡価格下では裁定が存在しないことは容易に示される。

ベクトル $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{R}^S$ が **state price** であるとは、

$$\boldsymbol{\psi} \gg \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi}$$

となるベクトルのことである。

裁定と state price との関係を調べる。Key lemma は、一次不等式論における Stiemke の補題である。

Stiemke の補題　A を (m,n) 行列とする。このとき次は同値になる。

1. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に $\boldsymbol{x} \gg \mathbf{0}$ の解がある。

2. ${}^tA\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$ となるような $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^m$ は存在しない。

定理 1.　裁定が存在しないための必要十分条件は、state price が存在することである。

系　裁定が存在しないならば、$q_i = 0$ と $D_{i1} = D_{i2} = \cdots = D_{iS} = 0$ とは同値になる。

この系より、現在価格が 0 である証券は始めから除外して考えることができる。以後、$q_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, N)$ とする。

注意 1.　$\forall\boldsymbol{\psi} \gg \mathbf{0}$ に対して $\boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi}$ とおけば、価格-配当体系 $(\boldsymbol{q}, D)$ には裁定は存在しない。No-Arbitrage は、均衡条件よりはるかに広い概念である。均衡条件は、投資家の効用関数から決まるある特別な state price を採用する事を意味している。

注意 2.　state price は存在したとしても、一般には一意的にはならない。$\boldsymbol{\psi}$ を未知数と考えた連立1次方程式 $\boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi}$ の解の自由度は $S - \mathrm{rank}D$ になるので、$\boldsymbol{\psi}$ の一意性は $S = \mathrm{rank}D$ と同値になる。$\mathrm{rank}D = S$（特に $N \geqq S$）となる時、市場は完備 (complete) であるという。

証券市場が完備でない場合 ($\mathrm{rank}D < S$)、state price は一意的には決まらない。state price に成り得る正ベクトルは $S - \mathrm{rank}D$ 個の任意定数を含む。

次に、無リスク (risk-free, riskless) なポートフォリオが構成できる場合は $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_S$ が一意的に決定されることを示す。

あるポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{R}^N$ で

$$ {}^tD\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^S $$

となるものがとれるとき、$\boldsymbol{\theta}_0$ を無リスク·ポートフォリオという。期末においてどの様な状態が実現しようとも、ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ の決済額は常に一定値 1 である。無リスク·ポートフォリオも一意的とは限らず、多様な証券の組み合わせが考えられる。無リスク·ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ を 1 つとり、その $t = 0$ における購入費用 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0)$ を求めよう。市場に裁定がないとすれば、ある state price $\boldsymbol{\psi}$ によって $\boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi}$ と表現できるので、$\boldsymbol{\theta}_0$ の現在市場価値 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0)$ は次で計算される。

$$ \begin{aligned} (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0) &= (D\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta}_0) = (\boldsymbol{\psi}, {}^tD\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_S = \psi_0 \end{aligned} $$

$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0)$ の値は $\boldsymbol{\psi}$ のとり方によらないので、無リスク·ポートフォリオが存在するような市場では、市場の完備性を仮定することなく ψ_0 は一意的に $\boldsymbol{\theta}_0$ の現在市場価値として決定される。さらに $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0) = (\boldsymbol{\psi}, {}^tD\boldsymbol{\theta}_0)$ の関係式より、この値は無リスク·ポートフォリオのとり方によらず一意に決まる。多くの無リスク·ポートフォリオがあっても、裁定のない市場ではそれらの現在市場価値はすべて一致する。無リスク·ポートフォリオを用いて無リスク利子率 (risk-free rate) が決定される。$t = 0$ の時点で保有する ψ_0 だけの富が、$\boldsymbol{\theta}_0$ を購入することによってリスクなしに期末には 1 の富になる。

ψ_0 と 1 の関係は比例するので、$\boldsymbol{\theta}_0$ を仲介することによって、現在 ($t = 0$) 保有する富 1 単位は、期末 ($t = 1$) には確実に $1/\psi_0$ になる。

$$ R_0 = \frac{1}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0)} = \frac{1}{\psi_0} $$

とおいたとき、R_0 を無リスク (粗) 利子率という。$R_0 - 1 = r$ を無リスク (純) 利子率ということもあるが、ここでは R_0 のみを使う事にする。ψ_0 は期末における富の割引率 (discount rate) と呼ばれる。一般のポートフォリオ$\boldsymbol{\theta}$ で $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) \neq 0$ となるものの収益率 (return) $\mathcal{R}^{\theta}$ は state 空間 Ω 上の確率変数になり

$$\mathcal{R}^{\theta} = \frac{{}^{t}D\boldsymbol{\theta}}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta})}$$

で定義される。

以上の準備の下で部分均衡の分析をおこなう。

不確実性を伴う金融商品は株式、貴金属、土地、各種の相場等非常に多くの物が存在する。従来の CAPM において、市場ポートフォリオ (market portfolio) と呼ばれるものはこれらを全て含むものであり、それはとても市場からは観測できるものではない。

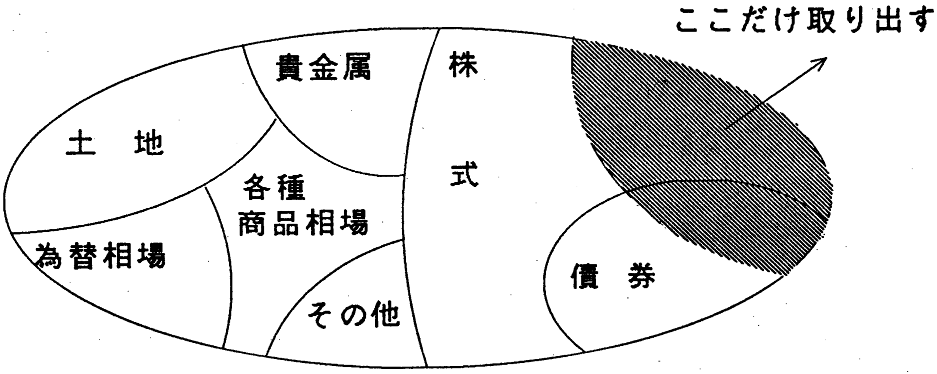

図 1: 部分均衡の世界

さて、株式のなかから幾つかの銘柄をとりだし、その個数を改めて N とする。

$$\boldsymbol{q} : N \text{ 個の証券の価格ベクトル}, \qquad D : N \text{ 個の証券の配当行列}$$

とおく。もとの大きな世界の価格-配当系 $(\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{D})$ が均衡状態にあれば、ある state price $\psi \gg 0$ がとれて$\tilde{\boldsymbol{q}} = \tilde{D}\psi$ が成立している。従って、今取り出した部分均衡の世界でも同じ state price ψ に対して $\boldsymbol{q} = D\psi$ となっている。特に、$(\boldsymbol{q}, D)$ にも裁定は存在しない。

Ω 上の (実数値) 確率変数は S 次元の数ベクトルで表現できた。確率変数 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^S$ の期待値 (平均値) $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$ は次で与えられる。

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_S x_S$$

2 つの確率変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^S$ に対して、確率変数としての積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で表すと $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_S \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_S \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_S y_S \end{pmatrix}$$

である。$\boldsymbol{R}^S$ には確率測度 $(p_1, p_2, \cdots, p_S)$ から導かれる内積 $(*, *)_p$ を入れる。

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_p = p_1 x_1 y_1 + p_2 x_2 y_2 + \cdots + p_S x_S y_S \ \ (= \mathrm{E}[\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}])$$

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の共分散 (covariance) $\mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{S} p_j (x_j - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}])(y_j - \mathrm{E}[\boldsymbol{y}]) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}] - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}]\mathrm{E}[\boldsymbol{y}]$$

であり、特に $\boldsymbol{x}$ の分散 (variance) $\mathrm{var}[\boldsymbol{x}]$ は次で定められる。

$$\mathrm{var}[\boldsymbol{x}] = \mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

Cauchy-Schwarz の不等式より、次が成立する。

$$|\mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \sqrt{\mathrm{var}[\boldsymbol{x}]\mathrm{var}[\boldsymbol{y}]}$$

$\mathrm{var}[\boldsymbol{x}] \neq 0, \mathrm{var}[\boldsymbol{y}] \neq 0$ のとき、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の相関係数 (correlation coefficient) $\mathrm{corr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は次で定められる。

$$\mathrm{corr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{\mathrm{var}[\boldsymbol{x}]\mathrm{var}[\boldsymbol{y}]}}$$

一般に $-1 \leqq \mathrm{corr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq 1$ であり、どちらかの等号が成り立つのは $\boldsymbol{x} - \mathrm{E}[\boldsymbol{x}]\mathbf{1}$ と $\boldsymbol{y} - \mathrm{E}[\boldsymbol{y}]\mathbf{1}$ が一次従属になる場合に限られる。

さて、ポートフォリオの空間 $\boldsymbol{R}^N$ には標準内積を考え、Ω 上の確率変数の空間 $\boldsymbol{R}^S$ には $\boldsymbol{p}$-内積 $(*,*)_p$ を入れて、$\boldsymbol{R}^N$ から $\boldsymbol{R}^S$ への一次写像 ${}^tD = C$ を考える。

$$C = {}^tD = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{N1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1S} & D_{2S} & \cdots & D_{NS} \end{pmatrix} \; : \; \boldsymbol{R}^N \longrightarrow \boldsymbol{R}^S$$

2 つの計量線型空間 $\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{R}^S$ に関して C の随伴行列 (adjoint matrix) C^* を求め、$\boldsymbol{R}^S$ の直交分解を行う。

C^* は、次の式が任意の $\boldsymbol{\theta}$ $(\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N)$ と $\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^S)$ に対して成立するものとして定められる。

$$(C\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{c})_p = (\boldsymbol{\theta}, C^*\boldsymbol{c})$$

これより、C^* は次で与えられることがわかる。

$$C^* = \begin{pmatrix} p_1D_{11} & p_2D_{12} & \cdots & p_SD_{1S} \\ p_1D_{21} & p_2D_{22} & \cdots & p_SD_{2S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1D_{N1} & p_2D_{N2} & \cdots & p_SD_{NS} \end{pmatrix}$$

さらに、$\boldsymbol{R}^S$ は $\boldsymbol{p}$-内積に関して、次の 2 つの部分空間に直交分解できる。

$$\boldsymbol{R}^S = R(C) \oplus_p N(C^*)$$

ただし、
$$\begin{aligned} R(C) &= \{ C\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N \} & &(C\text{の値域 (range)}) \\ N(C^*) &= \{ \boldsymbol{c} \mid C^*\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \} & &(C^*\text{の零空間 (null space)}) \end{aligned}$$

“直交” の意味は、$\forall \boldsymbol{c}_1 \in R(C)$, $\forall \boldsymbol{c}_2 \in N(C^*)$ に対して $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)_p = 0$ となることである。

さて、いま考えている証券市場 $(\boldsymbol{q}, D)$ においては、次の 2 つの仮定が本質的である。

(NA) 市場に裁定は存在しない。

(RF) 無リスク·ポートフォリオ $({}^tD\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{1})$ が存在する。

この 2 つの仮定の下で、各ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}$ (ただし、$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) \neq 0$) の収益率

$$\mathcal{R}^\theta = \frac{{}^tD\boldsymbol{\theta}}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta})} \in \boldsymbol{R}^S$$

から 2 つの指標 $\mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta], \mathrm{var}[\mathcal{R}^\theta]$ をとり出し、それらの間に成立する関係式を求めることを目的にする。

市場に裁定が存在しないことより、state price $\boldsymbol{\psi}$ がとれる。

$$\boldsymbol{\psi} \gg \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi} \quad (\ \boldsymbol{\psi} \text{ の自由度} = S - \mathrm{rank}D\ )$$

state price $\boldsymbol{\psi}$ を $\boldsymbol{p}$ で分解する。

$$\frac{\psi_j}{p_j} = \pi_j \ (j = 1, 2, \cdots, S) \qquad i.e. \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi}$$

この分解 : $\boldsymbol{q} = D(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi})$ は次の解釈を許す。

配当割引モデル (DDM : dividend discount model) では、価格は期待配当を適当に割り引いたものになる。今の場合、$D\boldsymbol{p}$ が期待配当になり $\boldsymbol{\pi}$ は各 state における期待配当の割引率と考えられる。$\boldsymbol{\pi}$ を **state price deflator** と呼ぶ。

即ち、$\boldsymbol{\pi}$ が state price deflator であるとは、($\boldsymbol{\pi} \gg \mathbf{0}$ かつ) $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi}$ が state price になることである。

基本事項

[I]
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}] &= p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \cdots + p_S\pi_S \\ &= \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_S = \psi_0 \end{aligned}$$

無リスク.ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ を考えれば

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}_0) = (\boldsymbol{\psi}, {}^tD\boldsymbol{\theta}_0) = \psi_0 = \frac{1}{R^0}$$

であるから、

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{R^0}$$

注意 非完備な証券市場においても $\mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}]$ は一意的に決まり、その値は市場で観測が可能である。

[II] $\mathrm{E}[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathcal{R}^\theta] = 1 \qquad \text{for } \forall\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N ;\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) \neq 0$

証明 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\psi}, {}^tD\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi}, {}^tD\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{E}[\boldsymbol{\pi} \cdot {}^tD\boldsymbol{\theta}]$

この両辺を $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta})$ でわればよい。 ▮

[III] $\quad \mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] - R^0 = -R^0 \mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi})$

証明 $\quad \mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}) = \mathrm{E}[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathcal{R}^{\theta}] - \mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}]\mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] = 1 - \mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}]/R^0$ ▮

注意　無リスク.ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ がとれなくても、$\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}) = 0$ となるポートフォリオ $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ があれば $\tilde{\mathcal{R}} = \dfrac{{}^tD\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{(\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})}$ とおくと、$\mathrm{E}[\tilde{\mathcal{R}}] = \dfrac{1}{\mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}]}$ になり、次の式が成立する。

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] - \mathrm{E}[\tilde{\mathcal{R}}] = -\mathrm{E}[\tilde{\mathcal{R}}]\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi})$$

計量線型空間 $(\boldsymbol{R}^S, (*,*)_p)$ の直交分解

$$\boldsymbol{R}^S = R({}^tD) \oplus_p N(C^*)$$

が得られていた。state price deflator $\boldsymbol{\pi}$ を直交分解する。

$$\boldsymbol{\pi} = {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\epsilon}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} \in N(C^*) \; (\Longleftrightarrow D(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{0})$$

ここで得られたポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ を state price ポートフォリオと呼ぼう。

補題 1.　非完備な市場においても ${}^tD\boldsymbol{\theta}^*$ は state price deflator の取り方によらず一意的に定まる。

証明　任意に 2 つの state price $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2$ をとり、deflator $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ を $\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\pi}_2$ とする。$\boldsymbol{q} = D\boldsymbol{\psi}_1 = D\boldsymbol{\psi}_2$ より $D(\boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_2) = \boldsymbol{0}$

i.e. $D(\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\pi}_1 - \boldsymbol{\pi}_2)) = \boldsymbol{0}$ となり、$C^*(\boldsymbol{\pi}_1 - \boldsymbol{\pi}_2) = \boldsymbol{0}$ がわかる。

$\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ を $\boldsymbol{\pi}_1 = {}^tD\boldsymbol{\theta}_1^* + \boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2 = {}^tD\boldsymbol{\theta}_2^* + \boldsymbol{\epsilon}_2$ と直交分解する。

$\boldsymbol{\pi}_1 - \boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\eta}$ $((\boldsymbol{\eta} \in N(C^*))$ とおくと

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\eta} = {}^tD\boldsymbol{\theta}_2^* + (\boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\eta} \in N(C^*)$$

であるから、直交分解の一意性より ${}^tD\boldsymbol{\theta}_1^* = {}^tD\boldsymbol{\theta}_2^*$, $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\eta}$ が成り立つ。 ▮

また、${}^tD\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ となるポートフォリオに対しては裁定はないので $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}) = 0$ である。よって $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*) = \psi^*$ の値も ${}^tD\boldsymbol{\theta}^*$ から一意的になる。このことより次が得られる。

系　state price ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ について $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*) \neq 0$ とすれば、$\mathcal{R}^* = \dfrac{{}^tD\boldsymbol{\theta}^*}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)}$ は市場 $(\boldsymbol{q}, D)$ から一意的に決定される。

さて、state price deflator $\boldsymbol{\pi}$ の直交分解で得られる $\boldsymbol{\epsilon}$ は $D(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ となっていた。配当行列 D の第 i 行 $D_i = (D_{i1}, D_{i2}, \cdots, D_{iS})$ は、第 i 証券の配当（確率変数）である。$D(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ より $\mathrm{E}[D_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}] = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ となっている。

補題 2.　無リスク·ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ の存在を仮定すると、次が成り立つ。

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = 0, \quad \mathrm{cov}(D_i, \boldsymbol{\epsilon}) = 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, N)$$

証明　${}^tD\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{1}$ と $\boldsymbol{\epsilon}$ は内積 $(*, *)_p$ に関して直交することより、$\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = 0$ である。

$$\therefore \quad \mathrm{cov}(D_i, \boldsymbol{\epsilon}) = \mathrm{E}[D_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}] - \mathrm{E}[D_i]\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = 0$$ ∎

系　補題 2 の仮定 ((NA), (RF)) の下で次が成り立つ。

$$\mathrm{cov}({}^tD\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0 \qquad \text{for } \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{R}^N$$

定理 2.（state price ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ を基準ポートフォリオとするベータ公式）
市場には裁定が存在せず、無リスク·ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ $({}^tD\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{1})$ は構成できると仮定する。また state price ポートフォリオ$\boldsymbol{\theta}^*$ について $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*) \neq 0$ かつ $\mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*] \neq 0$ を仮定する。このとき、$\mathcal{R}^* = \dfrac{{}^tD\boldsymbol{\theta}^*}{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)}$ は市場によって一意的に定まり、任意の収益率 $\mathcal{R}^\theta$ に対して次の関係式が成立する。

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta] - R^0 = \beta^*_\theta \left\{ \mathrm{E}[\mathcal{R}^*] - R^0 \right\}$$

ただし、

$$\beta^*_\theta = \frac{\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \mathcal{R}^*)}{\mathrm{var}(\mathcal{R}^*)}$$

証明　基本事項 [Ⅲ] より、次が成立していた。

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta] - R^0 = -R^0 \mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi})$$

方針は、$\mathcal{R}^*$ を用いることによって $\boldsymbol{\pi}$ が入っている項を消去することである。補題 3 の系より

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi}) &= \mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \epsilon) = \mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, {}^tD\boldsymbol{\theta}^*) \\ &= (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)\,\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \mathcal{R}^*)\end{aligned}$$

特に

$$\mathrm{cov}(\mathcal{R}^*, \boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)\,\mathrm{var}[\mathcal{R}^*]$$

である。よって、次の 2 つの式が成立する。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta] - R^0 &= -R^0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)\,\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \mathcal{R}^*) \\ \mathrm{E}[\mathcal{R}^*] - R^0 &= -R^0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)\,\mathrm{var}[\mathcal{R}^*]\end{aligned}$$

この両式より $-R^0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\theta}^*)$ を消去すれば良い。 ∎

注意　無リスク·ポートフォリオが存在しない場合にも、基本事項 [Ⅲ] の注意にあるポートフォリオ $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ を用いることにより、上と同様にして CAPM における “ベータ公式” の Black 版を求めることができる。(斎藤·津野 ([5]))

実証への道　　実証で市場から観測できるものは証券の価格体系 $\boldsymbol{q}$ であり、$\boldsymbol{q}$ の変化より各ポートフォリオの収益率 $\mathcal{R}^\theta$ が推定できる。確率空間 Ω や配当行列 D さらに state price deflator $\boldsymbol{\pi}$ 、state price ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ も観測不可能である。

そこで、state price ポートフォリオの決まり方 (deflator $\boldsymbol{\pi}$ の直交分解) を別の方向から探ってみる。直観的には、直交分解は内積の最大化でありそれは Cauchy-Schwarz の不等式を通して、相関係数の最大化として捉えられる。

収益率 $\mathcal{R}^\theta$ と state price deflator $\boldsymbol{\pi}$ の相関係数を考える。

$$\mathrm{corr}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi}) = \frac{\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi})}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{R}^\theta]\mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}]}}$$

ただし $\mathrm{var}[\mathcal{R}^{\theta}] \neq 0, \mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}\ ] \neq 0$.

(1) $\mathrm{corr}(\ \mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}\ )$ と state price ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ の関係

次の問題を考える。

$$\sup |\mathrm{corr}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}\ )| \qquad \text{(Prob)}$$

補題 2 の系 および Cauchy-Schwarz の不等式より次が成り立つ。

$$|\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}\ )| = |\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\epsilon}\ )| = |\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, {}^tD\boldsymbol{\theta}^*)| \leqq \sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{R}^{\theta}]\mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*]}$$

$$\therefore \quad |\mathrm{corr}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}\ )| \leqq \sqrt{\frac{\mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*]}{\mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}\ ]}}$$

注 $\mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}\ ] = \mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*] + \mathrm{var}[\boldsymbol{\epsilon}\ ]$

ここで、等号が成り立つのは、$\mathrm{var}[\mathcal{R}^{\theta}] \neq 0, \mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}\ ] \neq 0$ で

$$\mathcal{R}^{\theta} - \mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}]\mathbf{1} \quad \text{と} \quad {}^tD\boldsymbol{\theta}^* - \mathrm{E}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*]\mathbf{1}$$

が一次従属になる場合に限る。$\mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*] \neq 0$ と仮定すれば、${}^tD\boldsymbol{\theta}^*$ と $\mathbf{1}$ は一次独立になるので、

$${}^tD\boldsymbol{\theta} = \alpha\, {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \beta\mathbf{1} = \alpha\, {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \beta\, {}^tD\boldsymbol{\theta}_0$$

となる場合である。よって、最大化問題 (Prob) の一般解は、次で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \alpha\boldsymbol{\theta}^* + \beta\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}^{\natural} \qquad (\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\ )$$

ただし、
$$\begin{aligned} {}^tD\boldsymbol{\theta}^{\natural} &= \mathbf{0} && (\ \therefore (\boldsymbol{q}\ , \boldsymbol{\theta}^{\natural}) = 0) \\ \alpha &\neq 0 && (\text{これは } \mathrm{var}[\mathcal{R}^{\theta}] \neq 0 \text{ に対応する。}) \end{aligned}$$

以後、次を仮定する。

$$\mathrm{var}[{}^tD\boldsymbol{\theta}^*] \neq 0, \quad (\boldsymbol{q}\ , \boldsymbol{\theta}^*) = \psi^* \neq 0$$

注 補題 1 とその系より ${}^tD\boldsymbol{\theta}^*, \psi^*$ は市場 $(\boldsymbol{q}\ , D)$ によって一意的に定まっている。

ポートフォリオについては、その収益率を基本に考える。$\mathcal{R}^{\theta} = \dfrac{{}^tD\boldsymbol{\theta}}{(\boldsymbol{q}\ , \boldsymbol{\theta}\ )}$ は $\boldsymbol{\theta}$ に関して 0 次の同次式であるから、$\boldsymbol{\theta}$ を $(\boldsymbol{q}\ , \boldsymbol{\theta}\ ) = 1$ となるものに限定して考えても良い。ま

た ${}^tD\boldsymbol{\theta}^{\natural} = \mathbf{0}$ となるものは $(\boldsymbol{q}\ ,\boldsymbol{\theta}^{\natural}) = 0$ にもなるので、$\boldsymbol{\theta}^{\natural}$ は $\mathcal{R}^{\theta}$ に何の影響も与えない。したがってこれからは、最適化問題 (Prob) の一般解から $\boldsymbol{\theta}^{\natural}$ の項を省略する。

$$(\boldsymbol{q}\ ,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ ) = 1 \text{ の条件 } : \qquad \alpha\psi^* + \beta\psi_0 = 1 \quad (\psi_0 = 1/R^0)$$

$(\boldsymbol{q}\ ,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ ) = 1$ を満たす (Prob) の一般解 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対する収益率を $\hat{\mathcal{R}}$ と書く。

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{{}^tD\hat{\boldsymbol{\theta}}}{(\boldsymbol{q}\ ,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ )} = \alpha\, {}^tD\boldsymbol{\theta}^* + \beta\mathbf{1} \qquad (\alpha \neq 0)$$

基本事項 [III] の一般公式は次のものであった。

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] - R^0 = -R^0\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \boldsymbol{\pi}\ ) = -R^0\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, {}^tD\boldsymbol{\theta}^*)$$

右辺を $\hat{\mathcal{R}}$ を用いて表そう。

$$\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, {}^tD\boldsymbol{\theta}^*) = \mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \frac{1}{\alpha}(\hat{\mathcal{R}} - \beta\mathbf{1})) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \hat{\mathcal{R}})$$

$$\therefore \quad \mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] - R^0 = -\frac{R^0}{\alpha}\mathrm{cov}(\mathcal{R}^{\theta}, \hat{\mathcal{R}})$$

ここで、$\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ にとると、次が成り立つ。

$$\mathrm{E}[\hat{\mathcal{R}}] - R^0 = -\frac{R^0}{\alpha}\mathrm{var}[\hat{\mathcal{R}}]$$

この 2 つの式より、$\mathcal{R}^{\theta}, \hat{\mathcal{R}}\ , R^0$ に関するベータ公式が得られる。以上をまとめて、次の定理とする。

定理 3. ($\hat{\mathcal{R}}$ を 基準とするベータ公式)　　市場には裁定が存在せず、無リスク·ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_0$ (${}^tD\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{1}$) は構成できるとする。また、state price ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}^*$ について $(\boldsymbol{q}\ ,\boldsymbol{\theta}^*) = \psi^* \neq 0$ かつ $\mathrm{var}[\,{}^tD\boldsymbol{\theta}^*] \neq 0$ を仮定する。

$$\alpha\psi^* + \beta\psi_0 = 1, \quad \alpha \neq 0$$

となる任意の α, β にたいして、$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \alpha\boldsymbol{\theta}^* + \beta\boldsymbol{\theta}_0$ とおき、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対する収益率を $\hat{\mathcal{R}}$ とすれば、

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}^{\theta}] - R^0 = \hat{\beta}_{\theta}\ \{\mathrm{E}[\hat{\mathcal{R}}] - R^0\} \qquad \text{for } \forall\, \mathcal{R}^{\theta}$$

$$\text{ただし、}\qquad \hat{\beta}_\theta = \frac{\mathrm{cov}(\mathcal{R}^\theta, \hat{\mathcal{R}})}{\mathrm{var}[\hat{\mathcal{R}}]}$$

が成立する。

注意　$\hat{\mathcal{R}}$ は市場の完備性によらず、$\alpha, \beta, \mathcal{R}^*$ のみから一意的に定まる。$\beta = 0$ にとれば 定理 2 になる。

(2)　$\sup|\mathrm{corr}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi}\ )|$ の、市場からの観測可能性

基本事項 [III] を用いると

$$\mathrm{corr}(\mathcal{R}^\theta, \boldsymbol{\pi}\ ) = \underbrace{\frac{1}{R^0\sqrt{\mathrm{var}[\boldsymbol{\pi}\ ]}}}_{\substack{\boldsymbol{\theta}\ \text{によらない} \\ \text{正定数}}} \qquad \underbrace{\frac{R^0 - \mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta]}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{R}^\theta]}}}_{\text{観測可能量}}$$

である。即ち、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は

$$\sup\left|\frac{R^0 - \mathrm{E}[\mathcal{R}^\theta]}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{R}^\theta]}}\right| = R^0\sqrt{\mathrm{var}[\,{}^tD\boldsymbol{\theta}\ ^*]}$$

の解として得られる。$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は、$\mathrm{E}[\ \mathcal{R}^\theta\ ]$ を一定にしたとき $\mathrm{var}[\ \mathcal{R}^\theta\ ]$ を最小にするポートフォリオの 1 つになり、結果においては古典的な 2 パラメータ分析における minimum-variance portfolio になっている。minimum-variance portfolio は無リスク．ポートフォリオと接点ポートフォリオと呼ばれる特別なポートフォリオの 1 次結合になる。定理 3. における基準ポートフォリオとしては、接点ポートフォリオが採用できる。

接点ポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}\ ^T$ を投資総額の金額比率で求めるには、C を正則な分散共分散行列、$\boldsymbol{\mu}\ \in \boldsymbol{R}\ ^N$ を N 個の証券の期待収益率としたとき、次の公式で与えられる事が知られている。(J.E.Ingersoll,Jr [3])

$$\boldsymbol{\theta}\ ^T = \frac{1}{\mathrm{const}} C^{-1}(\boldsymbol{\mu}\ - R^0\mathbf{1})$$

ただし、定数 (const) は $(\boldsymbol{\theta}\ ^T, \mathbf{1}) = 1$ となる様にとる。

注意　state price 理論における効用関数は必ずしも (E,V)-変数に帰着出来るとは限らないので、古典的な CAPM で成立していた分離定理は一般には得られない。

結語　与えられた価格-配当体系 $(\boldsymbol{q}\ , D)$ の下での 2-パラメータ分析において、接点ポートフォリオを基準とするベータ公式は既知であった。しかし、 state price を導入する事によって均衡状態から得られる state price portfolio が接点ポートフォリオと完全相関する事になり、その結果 接点ポートフォリオに対するベータ公式が部分均衡における state price beta model の実証に使用できる事がわかった。

Part I I　東京証券市場における実証

実証すべき事柄　日経 225 ないし TOPIX などの株価指数のいずれかが定理 3. の示す基準ポートフォリオ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対応していれば、株価指数に含まれるすべての銘柄について、

$$\mathrm{E}[\mathcal{R}_i] - R^0 = \hat{\beta}_i\,\{\mathrm{E}[\hat{\mathcal{R}}] - R^0\} \qquad \text{for } \forall\, \mathcal{R}_i$$

$$\text{ただし、}\qquad \hat{\beta}_i = \frac{\mathrm{cov}(\mathcal{R}_i, \hat{\mathcal{R}})}{\mathrm{var}[\hat{\mathcal{R}}]}$$

が成立する。この式の右辺第 2 項の $\mathrm{E}[\hat{\mathcal{R}}] - R^0$ はリスク·プレミアムを、$\hat{\beta}_i$ は市場でプレミアムが付されるリスクの大きさを示している。この $\hat{\beta}_i$ についての情報は投資家にとって重要である。なぜならば、どの程度のリスク·テイクをすれば、どの程度の利回り $\mathrm{E}[\mathcal{R}_i]$ が保証されるのか、などは投資にとって基本情報であるからである。そこで、NK225 あるいは TOPIX のいずれかが $\hat{\beta}_i$ を測定するのに妥当なポートフォリオであるか否かを実証する。

以下では TOPIX を基準ポートフォリオとする β をβ(TPX) で、NK225 をそれとする場合を β(NK) で表す。いま、これらの株価指数が基準ポートフォリオ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に相当すれば、これらの指数から推定された β_i(TPX もしくは NK) と $\mathrm{E}[\mathcal{R}_i]$ との間には、

$$\mathrm{corr}(\beta_i, \mathrm{E}[\mathcal{R}_i]) = 1$$

が成立しなければならない。もし実証的に上の関係が成立しないとき、NK225 や TOPIX はリスク測定のための基準ポートフォリオとしての資格を持たないことになる。

実証のための前提とモデル　　実証に際しては、過去の収益率の時系列から期待収益率と分散共分散を推定する。ある証券の t 期 $(t = 1, 2, \cdots, T+1)$ における価格および配

当を それぞれ P_t 、H_t とすれば、t 期の収益率 r_t は次の式で与えられる。

$$r_t = \frac{H_{t+1} + P_{t+1} - P_t}{P_t} \qquad (t = 1, 2, \cdots, T)$$

予め設定された推定期間においてこの収益率の分布は一定と仮定して、この証券の期待収益率 μ を $r_1, r_2, \cdots, r_T$ の平均値で推定する。第 i 証券の収益率の時系列を $\boldsymbol{r}_i = (r_1^i, r_2^i, \cdots, r_T^i)$ 、期待収益率を μ_i とし、$\boldsymbol{a}_i = T^{-1/2}(\boldsymbol{r}_i - \mu_i \boldsymbol{1})$ とおいたとき、第 i 証券と第 j 証券の収益率の共分散 σ_{ij} は $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ の内積で推定される。即ち、分散共分散行列 C は$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N$ で生成される Gram 行列である。

ここで、推定期間について注意すべき点は以下である。すなわち、C が正則になるための必要十分条件は、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N$ が 1 次独立になる事である。 $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{1}$ と直交しているので、

$$\mathrm{rank}\ C \leqq \min\{N, T-1\}$$

が成り立つ。この事は、実証に際して対象とする銘柄数が多ければ、データ採取期間を長くしなければならない事を意味している。データ採取期間が長すぎれば、社会環境が変化してしまうであろう。ここでは、5 ヶ月間の配当修正日次データ (約 102 〜 108 期) で、100 銘柄を実証の対象とした。

さらに、このモデルで株価変動をいかに記述しているのか、についてコメントしておこう。理論編での記号と合わせるために、$H_{t+1} + P_{t+1}$を D_{t+1}で表わすことにする。市場が均衡しており、裁定機会が存在しないときには、以下が成立する。

$$P_t = \frac{\mathrm{E}[D_{t+1}]}{1 + \mathrm{E}[r_t]}$$

r_t の分布が一定であるので、分母の $\mathrm{E}[r_t]$ は無裁定条件から決定され一定となる。将来の配当と株価に関する予想 $\mathrm{E}[D_{t+1}]$ は、時事刻々と変化し、その変動は均衡の株価の上下動となって出現する。本モデルでは、株価変動の主因を配当および株価の予想が変動することに求めるのである。

実証結果　図 2,3,4,5 は TOPIX 、NK225 にもとずく 100 銘柄のβ_iと期待収益率 $\mathrm{E}[\mathcal{R}_i]$ をスキャター.グラフにしたものである。

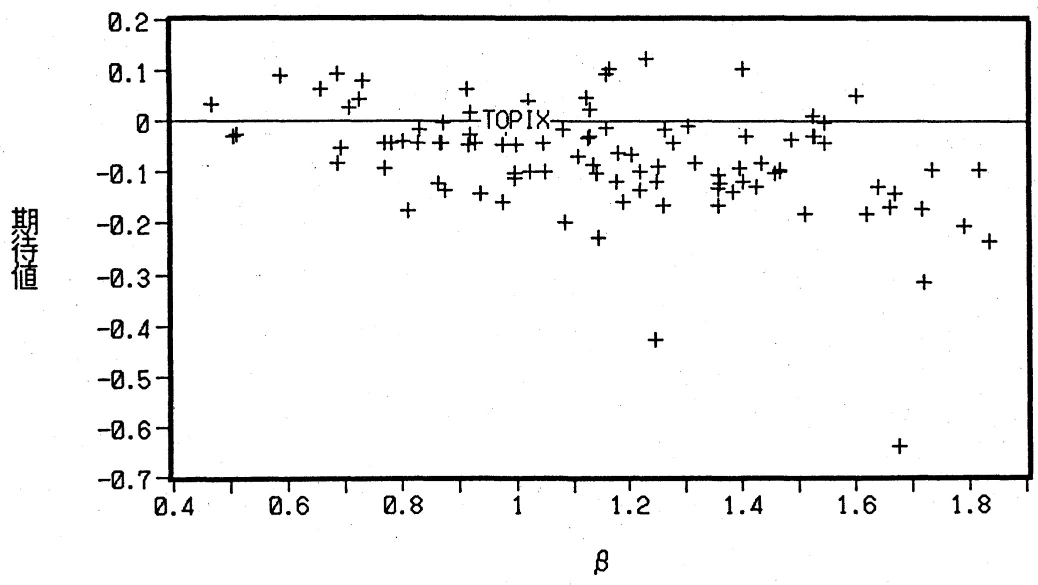

図 2: TOPIX: 期待値と β 値　期間: 91 年 7 月

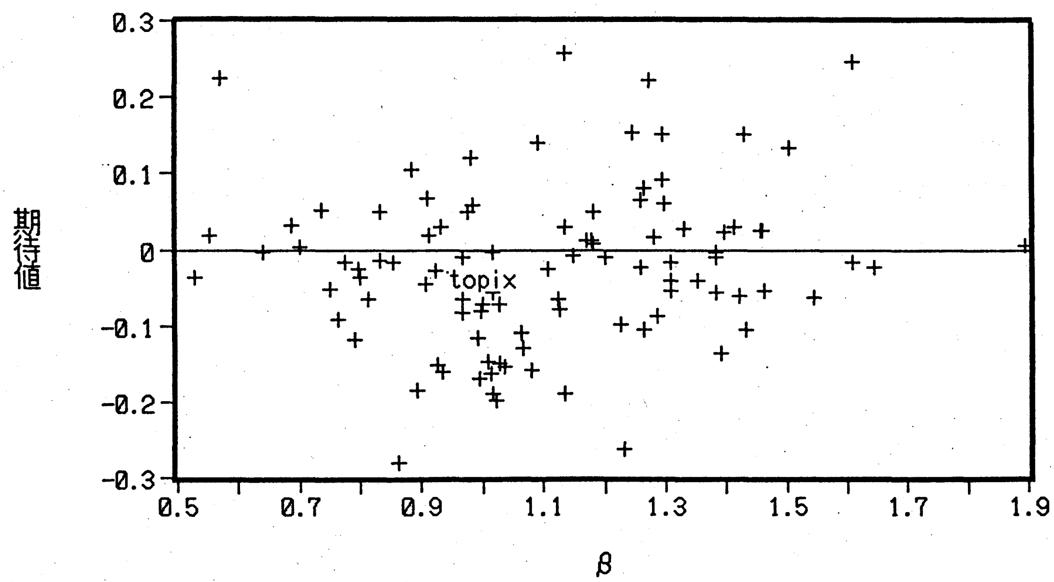

図 3: TOPIX: 期待値と β 値　期間: 91 年 12 月

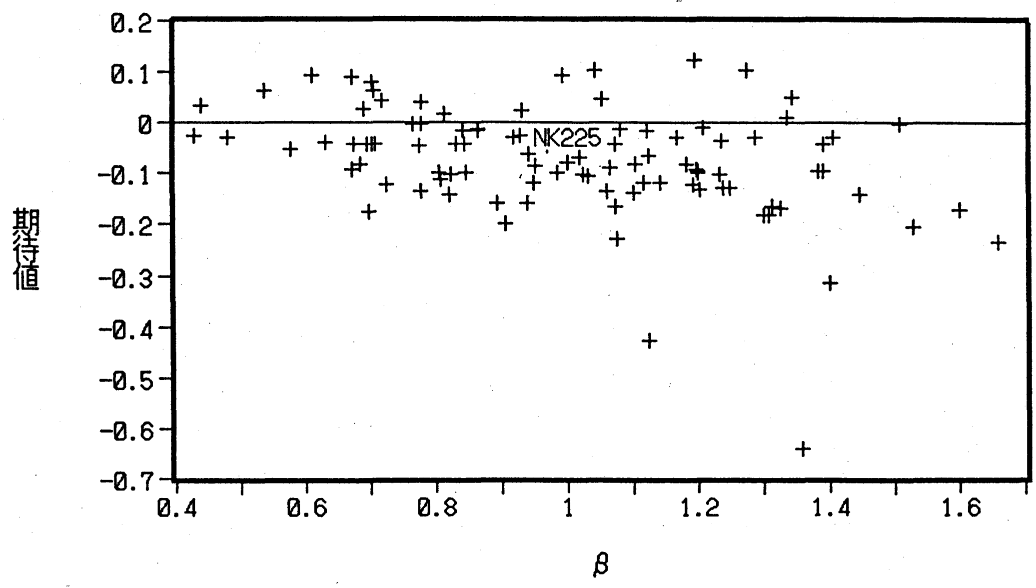

図 4: NK225: 期待値と β 値　期間: 91 年 7 月

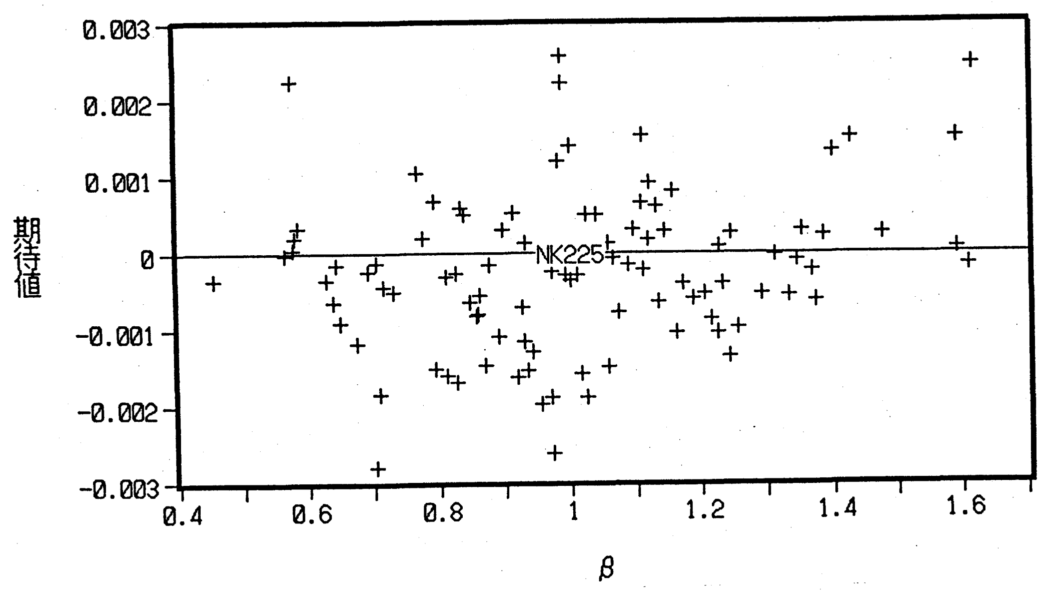

図 5: NK225: 期待値と β 値　期間: 91 年 12 月

期 間	NK225の相関係数	TOPIXの相関係数
9007	-0.2746	-0.2347
9008	0.0769	0.146
9009	-0.0261	-0.0243
9010	-0.2387	-0.2291
9011	-0.298	0.1869
9012	-0.2329	-0.0362
9101	0.1026	-0.203
9102	0.123	-0.0972
9103	0.1271	-0.0795
9104	-0.1001	0.1349
9105	0.2897	0.2424
9106	0.0711	-0.0177
9107	-0.3728	-0.4203
9108	-0.4285	-0.4167
9109	0.0505	0.0501
9110	-0.0068	-0.0207
9111	-0.0247	-0.0476
9112	0.22	0.1463

表 1: 期待値と β 値の相関係数

βと期待値の相関係数が比較的高い 91 年 7 月 (9103—9107) では、TOPIX 、NK225 ともに横に長い楕円形の中に各銘柄を示す点が位置している。図 2,4

91 年 12 月 (9108—9112 : 図 3,5) では、両者はほぼ円の中に各点が分布いる。本来、各点は直線上になければならにもかかわらず、これらの図が示すように直線とは大きくかけ離れた分布をしている。その結果、βと期待値の相関係数は、1より大きく隔たっており（表 1）統計的検定を敢えてすることなく、次の結論を下すことができよう。すなわち、TOPIX および NK225 はともにリスク測定のための基準ポートフォリオの役割を果たすことができず、両者は単に平均ないしある方式で投資を継続したときの投資額の変化を示しているにすぎないということである。

ちなみに、接点ポートフォリオ, TOPIX, NK225 の 90 年 7 月 — 91 年 12 月までの期待収益率および標準偏差の平均を表 2で示しておこう。

以上の結論は、収益率の分布を一定とした推定期間の取り方に大きく依存している。他の推定期間を用いたテストの必要性を感ずるが、このことについては他で論ずることにする。

接点 ポート		TOPIX		日経 225	
期待値	標準偏差	期待値	標準偏差	期待値	標準偏差
-0.2100	0.1649	-0.1029	1.6645	-0.0955	1.9979

表 2: 接点ポートフォリオ,TOPIX,NK225 の比較

尚、本文での引用はなかったが、安達・斎藤 [4] では豊富な実証分析を紹介してあり、津野 [6] では“空売り”が許されないときの効率的なポートフォリオの構成について、解説している。参考にしていただければ、幸いです。

参考文献

[1] D.Duffie *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton Univ.Press, 1992, Princeton, New Jersey

[2] 上智大学資産評価理論研究会 動学的資産評価理論 (第 1 章), Discussion Paper Series, ERSS No.93-4 上智大学経済学部 1993

[3] J.E.Ingersoll,Jr *Thery of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987,

[4] 安達 智彦・斎藤 進 セミナー現代のポートフォリオ・マネジメント, 同文館 1992

[5] 斎藤 進・津野 義道 *State price* β モデルにおける *Black* 版, Discussion Paper Series, ERSS No.93–5, to appear

[6] 津野 義道 ポートフォリオ選択論入門, 共立出版, 1991