

Fuchs 群に付随した一次元 Markov 写像とゼータ関数

阪大理 盛田健彦 (Takehiko Morita)

1. Γ を第一種有限生成 Fuchs 群とする。すなわち,
 Γ は $PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} / \{ -1, 1 \}$
の離散部分群で上半平面 $H = \{ z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z > 0 \}$

をこの action で割った高空間が (M と書こう)

Poincaré 計量に関して面積有限な Riemann 面
となるものとする。但し、ここでいう Riemann 面は分岐点
の存在と許容したものである。

上で述べた $PSL(2, \mathbb{R})$ の H への作用というのは良く
知られているように $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ と一次
変換群としてのものであり、それは H 上の双曲計量
= Poincaré 計量についての等長群としての作用である
ことはいうまでもない。

以下、次のような二つの形式的な Euler 積で
あらわされる '関数' を考える。

$$Z(s) = \prod_{\epsilon=0}^{\infty} \prod_{c \in \text{CH}(\Gamma)} (1 - \exp[-(s+\epsilon)l(c)])$$

$$\zeta(s) = \prod_{c \in \text{CH}(\Gamma)} (1 - \exp[-sl(c)])^{-1}$$

$Z(s)$ はいわゆる Selberg zeta 関数といわれているものであり、 ζ は L -関数の類である。 $\prod_{c \in \text{CH}(\Gamma)}$ は

Γ の原始的双曲元の共役類すべてにわたってとった積をあらわす。念のため $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の双曲元とは

$$g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ をとって } g h g^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1$$

とかける。i.e. $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に 相異なる二つの固定点を

とつものである。双曲元 $h \in \Gamma$ が原始的であるとは

$$h = h_0^n \text{ for some } h_0 \in \Gamma \Rightarrow n = \pm 1 \text{ ということ}$$

とす。 $l(c)$ は

$$l(c) = 2 \cosh^{-1} \left(\frac{\text{tr } h}{2} \right) \text{ where } h \in C$$

と具体的に書けた量で定義式から共役類 C のみによる。

また、次に Z, ζ の意味を少し考えると $h \in C$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ の二点を固定し従ってそれらと結ぶ唯一の測地線 (= H での羊角) をも固定する。これを M に射影したものは明らかに閉測地線となるがその M における長さが $l(c)$ であることは容易に

分るのである。更に、 h と h^{-1} で固定点が打ち出しにたっているか吸収的にたっているかが逆にたるところに注意すれば、 M の接空間でたかめれば、 M 上の閉測地系と共役類 $c \in \text{CH}(\Gamma)$ とは一対一対応していることが分る。この式において $\exp(-sl(c))$ を ρ^{-s} , c と ρ とおきかえれば、Riemann zeta の Euler 積表示が出てくるから、 ζ , Z は Riemann 面 M の length spectrum の分布の情報をもつ関数であることが Riemann zeta との類似より明白であろう。

2. 有限生成第一種 Fuchs 群については Bowen と Series (Publ. I.H.E.S. 50 (1980)) による興味深い結果がある。但し、彼らは上半平面モデルではなく Poincaré disc モデルを使っているのでユークリッド計量でいろいろの事を考えると異質に見えるが、双曲幾何では等長 (等角はいろいろでもいい) 同値であり $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ と $\text{PSU}(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} : \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \right\} / \pm 1, i, j$ におきかえれば全く話はかわらない。しかし、なぜこのような良く知られた事をここでわざわざ説明するかというと、ここで書く事実の証明はこの disc モデルでやった

方が簡単であるからである。その理由は手法が
ユークリッド計量を用いるから、いやむしろ微分をとって
双曲計量にアタリつけたように使われるからである。

Bowen & Series がやった事は以下のようなことで
ある。ここいばらく Γ は $PSU(1,1)$ の subgroup であ
り Poincaré disc $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ に作用
しているものとして。 Γ の作用は自然に D の境界
 S^1 へ拡張されているからこの作用はただ一つの S^1
上の写像の iteration と軌道同値なのである。

おぼろ

命題: $\exists T: S^1 \rightarrow S^1$ s.t.

$\Gamma y = g x$ for some $g \in \Gamma$

\iff $T^n x = T^m y$ for some $m, n \geq 0$ \perp
iff.

しかも、この T が極めて著しい力学的性質 i.e.

Markov 性をもっていること、必要があれば非常に
良い S^1 の部分集合への first return map とするこ
とによって (\perp とかこう)。一様拡大条件, Rényi
条件, 位相的推移性, 有限(値域)性などを有
することである。これによって我々は適当な関数空間
 \mathcal{A} に作用する作用素の族 $L(s) \ s \in \mathbb{C}$ と

$$\text{" } L(s)g(z) = \sum_{Uy=z} U'(y)^{-s} g(y) \text{"}$$

といった型の転送作用素の実現として定義できるのである。ここで報告することは

$$\text{" } \text{Det} = \text{Zet} \text{"}$$

という式が右辺を Selberg zeta 関数 $Z(s)$ として左辺を Γ 上に実現された転送作用素の Fredholm 行列式 \times (有限個の $c \in \text{CH}(\Gamma)$ に関する因子) の形によつて成立させることができること、更に Det の方の解析的性質を調べることによつて既に知られてゐるが、

Selberg trace formula を経由するためには難解なことであった事実を多少はみるひけること、である。

定理 (c.f. D. Hejhal Springer Lecture Note 1001)

- (1) $\text{Re } s > 1$ において Z, ζ は収束して零点をとらない解析関数を与える。
- (2) ζ は $\text{Re } s > \frac{1}{2}$ で零点をとらない有理型関数に拡張される。
- (3) ζ の $\text{Re } s = 1$ 上の極は $s=1$ のみである。

それは一位である。

(4) Z (従って S) は全平面に有理型に拡張
 張 i.e. 解析接続される。更に、 Z の特異点
 の候補者は $s = \frac{1-k}{2}$, $k=0, 1, 2, \dots$ である。

以下では上述の事実を一般の Γ について証明する
 には紙面が十分ではないと思われるので Γ を $PSL(2, \mathbb{Z})$
 として、D. Mayer の結果と対比しつつ一般にはどうい
 う過程で証明がすすめられるかと説明してみる。

ここで、注意しておきたいのは先にも述べたように
 Bowen と Series は $PSU(1, 1)$ で disc モデルを扱
 たので、 $PSL(2, \mathbb{Z})$ は等角変換で D の話をし
 ても、 Z, S は何らかわりはしないのだが、技術的に
 Bowen - Series 流の方法にとつては例外的な場
 合 (i.e. q.c. deformation を必要とする) なのである。

理由は、我々の議論が flat な S^1 であこなわれる
 とするにある。

3. D. Mayer は Comm. Phys. Math. 130 (1990) 311-333
 及び Bull. A.M.S 25 (1991) 55-60 において $PSL(2, \mathbb{Z})$
 の場合に先述の定理を連分数変換 $T_q: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$

$$T_G \alpha = \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha} \right]$$

を用いることで

$$Z(s) = \det(I - L_{T_G}(s)) \det(I + L_{T_G}(s))$$

という式の成立を示し、右辺の解析接続をよこなうという方法で証明している。ここで $L_{T_G}(s)$ は $[0, 1]$ を含むある開区間上の有界正則関数のなる Banach 空間 \mathcal{L} 上で定義された転送作用素

$$L_{T_G}(s) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} \right)^{2s} f\left(\frac{1}{z+n} \right)$$

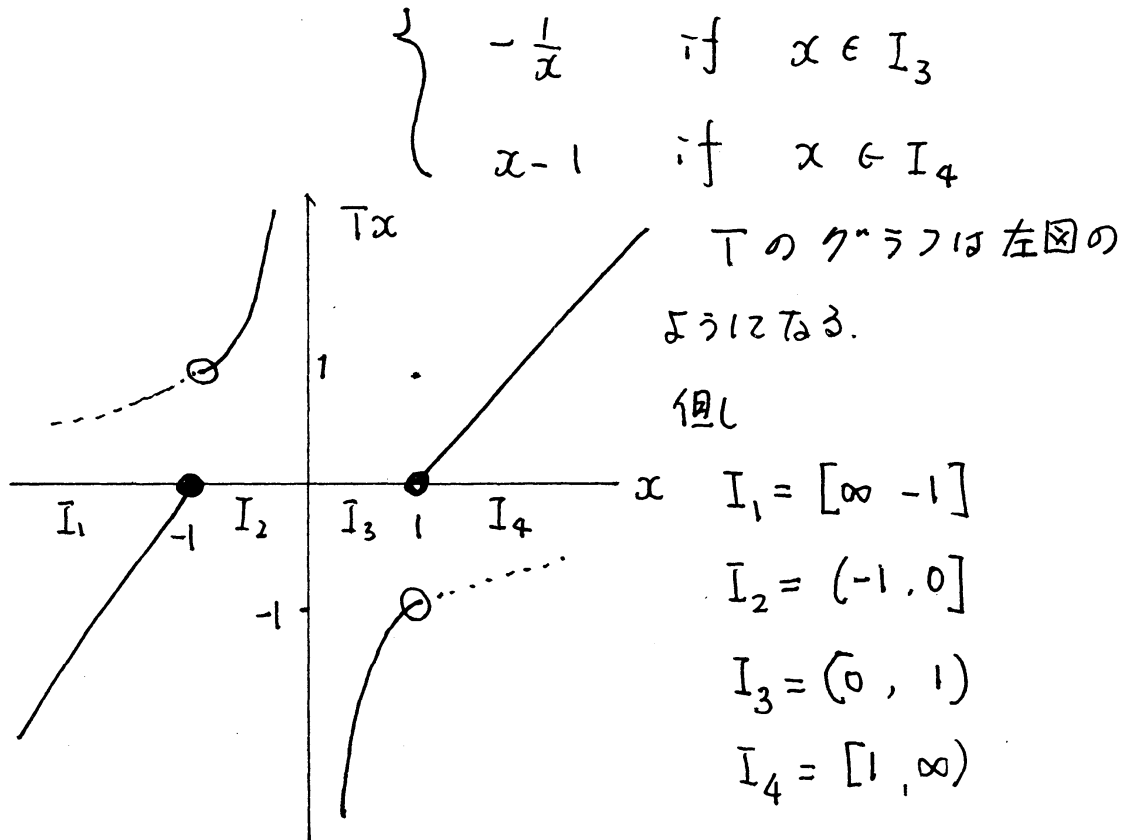
をあらわす。(句論, 収束は $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ でしかいえないが作用素関数として有理型に解析接続できる)。

これと我々の方法を対比しながら話をすすめてよう。

第一段階 (Γ に付随した Markov 字像の構成)

Mayer は最初から連分数変換 $T_G: \alpha \mapsto \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha} \right]$ を用いたが, これは $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ の $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上の作用と軌道同値ではるい。我々は次の $T: \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ から出発する。以後 $\Gamma = \operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ とする。

$$T \alpha = \begin{cases} \alpha + 1 & \text{if } \alpha \in I_1 \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{if } \alpha \in I_2 \end{cases}$$



直ちに分る T の性質として

(T, \mathcal{P}) $T|_{I_i} = g|_{I_i}$ for $g \in \mathcal{P}$ (特に生成元)

(T, Tr) (transitive) $I_j \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_i$ for any i, j .

(T, Mar) (Markovian) $(T \text{int } I_i) \cap \text{int } I_j \neq \emptyset$

$$\Rightarrow T \text{int } I_i \supset \text{int } I_j$$

そして最も重要なのは

(T, O) (orbit equivalence) $x, y \in \hat{\mathbb{R}}$ に対し

$$y = g x \text{ for some } g \in \mathcal{P} \Leftrightarrow T^n x = T^m y \text{ for}$$

iff. some $n, m \geq 0$

この場合 (T, O) を証明するのは極めて容易である。

一般の場合は Bowen & Series に従って

$PSL(2, \mathbb{R})$ ではたゞ $PSU(1, 1)$ の離散部分群で話をする。このとき $q.c.$ 変形によって Γ が特殊な基本領域を持つものには話を帰着するところが重要である。

第二段階 (T-展開)

これは連分数変換でいって、無理数の連分数表示に対応する。つまり、 $T_G x = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$ について $J_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ としたとき $T_G^{k_n} x \in J_{a_{k_n}}$ $k_n = 0, 1, 2, \dots$ であったとき $x = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}}$ と表示されるように

T で $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の元を表示する方法である。

$x \in \text{int } I_i$ であるとき $Tx = g(i)^{-1}x$ $g(i)^{-1} \in \Gamma$ となるよう $\{g(1), g(2), g(3), g(4)\}$ と定める Γ の元として $g(2)$ と $g(3)$ は等しいがここでは区別されている。

さて $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が T -展開 (e_0, e_1, e_2, \dots) ともつというとき

$$\begin{aligned} x &\in (e_0^{-1}) \\ Tx &\in (e_1^{-1}) \\ &\dots \\ T^n x &\in (e_n^{-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

が成立することによって定義する。但し $\text{int } I_i \in (g(i)^{-1})$ と書いている。記号としては $x = (e_0 e_1 e_2 \dots)$ などと書くことにする。実は次が成立する

命題 (1) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し T -展開は一意的である。

(2) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ かつ $x = (e_0 e_1 e_2 \dots)$ $y = (f_0 f_1 \dots)$ $g x = y$ であるならば

$$g e_0 e_1 \dots e_s = f_0 f_1 \dots f_t \text{ in } \Pi \text{ かつ}$$

$$e_{s+j} = f_{t+j} \quad j=0, 1, \dots \text{ in } \Pi$$

とある s, t が存在する。

類似の命題が非常に minor な修正によって Bowen-Series で構成された Markov 字彙について成立することから示される。

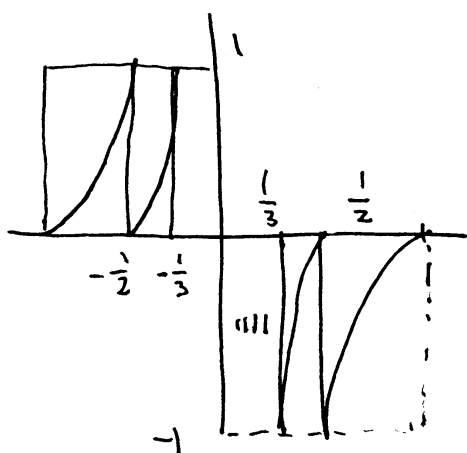
しかし、 T と T_G ではあまりにも性質がことなっていることは良く分るのである。そこで、次の段階が必要になる。これは一般の場合には $\text{gl. } \Pi$ が *cocompact* であれば不要となることを注意しておく。

第三段階 (renormalization or construction of the first return map)

T の $[-1, 1]$ への first return map をつとてみると
それは $[-1, 1]$ 全体で定義することはできないが有理点
区間の分け方は定義できて

$$Ux = \begin{cases} U_n x = -\frac{1}{x} + n & \text{if } x \in J_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ U_{-n} x = -\frac{1}{x} - n & \text{if } x \in J_{-n} = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

で与えられることは容易に分る。グラフは下図のようになる。



U はエントロピー理論における
数論的変換における Rényi
による結果であらわれる変換
の性質とすべて満足している
のである。可なり。

$$\begin{aligned} (U, \text{Tra}) \text{ (transitive)} & \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n \text{int } J_k \supset \text{int } J_l \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ (U, \text{Mar}) \text{ (Markovian)} & \quad \bigcup \text{int } J_k \cap \text{int } J_l \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcup \text{int } J_k \supset \text{int } J_l$$

$$(U, F) \text{ (finiteness)} \quad \{ \bigcup \text{int } J_k \mid k = \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

は有限種類 (この場合 $(-1, 0)$ と $(0, 1)$) の区間のみ
からなる。

$$(U, E) \text{ (uniformly expanding)} \quad \text{正整数 } N \text{ があって} \\ \text{ess. inf } |(U^N)'| > 1$$

$$(U, R) \text{ (Rényi condition) } \operatorname{ess\,sup} \frac{|U''|}{|U'|^2} < +\infty$$

をみる。加えて (T, P) に対応して

$$(U, P) \quad U|_{\operatorname{int} J_n} = g|_{\operatorname{int} J_n} \text{ for some } g \in P$$

と

$$(U, \Sigma) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} |J_n|^\alpha < +\infty \text{ for } \operatorname{Re} d > \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} |J_n|^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

をみる。 (U, Σ) が ζ が $\operatorname{Res} > \frac{1}{2}$ で non-zero meromorphic に接続されることを示しているのである。

この first return map とする操作によつて微係数 1 i.e. 放物元からくる T の固定点を除外することが出来る。更に、 T_G との関係も U から表すに分る。 $V = U^2|_{(0,1)}$ と T_G^2 は \mathbb{Q} の点特に $\frac{1}{n + \frac{1}{m}}$ なる点とのぞき一致しているのである。

第四段階 ($CH(P)$ と $PO(T) - O_{\neq \infty}$, $PO(U)$ の自然な対応の検証)

$S: X \rightarrow X$ を局所写像 (可逆な、可逆の点で定義されているわけではないが X 全体を何らかの方法で

S の定義域の x とく扱える) とするとき $S^n x = x$ となる $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ が存在する点を S の周期点といひ $p: S^p x = x$ がこのような n で最小のとき p を周期といふことにしよう. 一般に $O_S(x) = \{x, Sx, \dots\}$ なのであるが x が周期点のときは $O_S(x) = \{x, Sx, \dots, S^{p-1}x\}$ のように最小周期 p を用いてあらわすことにする. 更に単に S の周期軌道 τ といふときは τ は周期点からなり $\tau \ni x$ と任意にすれば

$\tau = \{x, Sx, \dots, S^{p-1}x\} = O_S(x)$ とかけているものとする. $PO(S)$ は S の周期軌道の全体をあらわすことにする.

この第四段階では以下を示す.

補題 $PO(T) - O_T(\infty)$, $PO(U)$, $CH(\Gamma)$

の間には自然な 1-1 対応がある. ここで自然

なという意は $\tau \in PO(T) - O_T(\infty)$ (resp.

$\tau \in PO(U)$) と $C \in CH(\Gamma)$ が対応するとき

$\tau = \{x, Tx, \dots, T^{p-1}x\}$ (resp. $\tau = \{x, Ux, \dots, U^{q-1}x\}$) とあらわされているならば

$$\exp(\ell(c)) = (T^p)'(x)$$

が成立するということである. (resp. $(U^q)'(x)$)

この補題の証明において第 n 段階の T -展開が重要な役割をはたすことを注意しておく。

$\tau = \{\alpha, T\alpha, \dots, T^{p-1}\alpha\}$ に対しどのように $CH(\Gamma)$ の元を対応するかを述べるのは易しいのでおしなべておくと、 $T^p\alpha = \alpha$ から $g\alpha = \alpha$ とする $g \in \Gamma$ で

$$T^p |_{\text{nbhd. of } \alpha} = g |_{\text{nbhd. of } \alpha} \text{ なるものがある.}$$

第 n 段階の (U, ε) 条件より $g'\alpha > 1$ となり g は双曲元であることが分る (実は原始的である) ところで τ に対して g の共役類を対応させるとうまくいく訳である。

この補題によって形式的には Z, ζ の $T\alpha U$ を用いた表示が得られる。例えば形式的に計算してみると

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \exp(-sk \ell(c)) \\ &= \sum_{\tau \in PO(U)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (U^{P(\tau)})'(\alpha_\tau)^{-sk} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{\tau \in PO(U) \\ P(\tau)=p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (U^p)'(\alpha_\tau)^{-sk} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{\tau \in PO(U) \\ P(\tau)=p}} \frac{1}{p} \sum_{\substack{k=1 \\ \alpha \in \tau}}^{\infty} \frac{1}{k} (U^p)'(\alpha)^{-sk} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s}$$

$$\therefore \zeta(s) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s} \right)$$

となる。

一般の Γ については補題は完全な $1=1$ の形で示されるのではなく有限個の例外的な $c \in CH(\Gamma)$ が出てくる。

第五段階 (転送作用素の導入とその適当な関数空間での実現)

上の ζ の \square を用いた式を見ると $\sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s}$ の $n \rightarrow \infty$ の寄与力が少くとも ζ の解析性を見るためにわからねばならないはずである。そこで、

$$" \zeta(s) f(x) = \sum_{Uy=x} U'(y)^{-s} g(y) "$$

といった形の作用素の trace をうまく具合に解析できるか、といった類の問題に行きつくわけである。ここでは2節の定理の主張(4)を示すのに好都合な関数空間上の作用素として $\zeta(s)$ を実現することを考える。

主張(1)(2)(3)については別の空間を用いた方が良いかも知れない。(実際、別の空間を用いた証明の方が

先にやられた).

第三段階で得られた Markov 写像 U に対して \mathbb{C} 内の領域 D_+, D_-, B_+, B_- を以下をみたすようにとれることは U の具体的な形から明らかである.

$$\left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \subset B_+ \subset\subset D_+ \\ [-1, 0] \subset B_- \subset\subset D_- \\ U_n^{-1} D_- \subset B_+ \\ U_n^{-1} D_+ \subset B_- \end{array} \right. \quad n = 1, 2, \dots$$

領域 $B \subset \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{A}(B)$ で B 上の有界正則関数の全体に \sup ノルムを入れた Banach 空間をあらわすこととして.

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(D_-) \oplus \mathcal{A}(D_+)$$

とおく. これが我々の転送作用素の domain となる空間である.

$$f = f_+ \oplus f_- \in \mathcal{A}$$

に対してとりあえず形式的には $s \in \mathbb{C}$ として

$$(L(s)f)_+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U'(U_n^{-1}z)^{-s} f_-(U_n^{-1}z)$$

$$(L(s)f)_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U'(U_n^{-1}z) f_+(U_n^{-1}z)$$

とおく. $n = 1, 2, \dots$

第三段階でかけた条件 (U, Σ) から $\text{Res} > \frac{1}{2}$ であれば先の式は直ちに \mathcal{A} 上の有界線形作用素を定めることが分るが、実は次を示せる。

命題 $L(s) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ は order 0 の核型作用素に値をとる \mathbb{C} 上の有理型関数に解析接続される。ここでいう order 0 の核型作用素は
 A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espace nucléaires, Memoir. AMS
 16 1955.

にあるものである。

この証明は $\text{Res} > \frac{1}{2}$ においては ($\text{Res} > \frac{3}{4}$ くらいの場合には正確なのだが直観的には $\text{Res} > \frac{1}{2}$) では明らかである。 Res がどんどん小さくなる時はどうするかというと f_+, f_- を原点のまわりで Taylor 展開して見ると

$$f_+(U_n^{-1}z) = f_+\left(\frac{1}{n-z}\right) \text{ という形をしているから}$$

D_+ や B_+ のとり方によって n が十分大きくないといけないこともあるが、とにかく $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_+^{(k)}(0)}{k!} (n-z)^{-k}$ 。したがって $(n-z)^{-k}$ の項を $U'(U_n^{-1}z)^{-s} = (n-z)^{-2s}$ に乗ずれば weight の発散をコントロールできるという訳である。

この $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ の場合はたまたま $U'(U_n^{-1}z)$ に

ある部分と f_+ を展開したとき出てくる項たちの形が同じであるわけで、結局 Hurwitz zeta 関数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^{2s}}$ の解析接続の知識、及びその結果で命題が示せてしまうのである。D. Mayer は 連分数変換に於いて、こういったように従来の公式集からいろいろ Hurwitz zeta の性質を引用して彼の結果を出している。しかし、 D が一般となると解析接続の議論と一般的に実行せねばならない。我はかうまくいへる理由はこの部分が案外素朴に達成できたことによるのである。

先に引用した A. Grothendieck の Memoir, A.M.S. 16
 と A. Grothendieck, La Théorie de Fredholm
 Bull. Soc. math. France 84
 (1956) 319-384

をあわせると $L(s)$ の Fredholm 行列式について

命題 $\det(I - L(s))$ は \mathbb{C} 上有理型に
 解析接続される。特に $\operatorname{Re} s > 1$ においては
 analytic である。

第六段階 ($\text{Re } s > 1$ で $Z(s) = \det(I - L(s))$)

これを見れば 目標達成である。それは

$$\det(I - L(s)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} L(s)^n\right)$$

という式を用いるのである。つまり $\text{Tr} L(s)^n$ を計算せねばならない。 $L(s)^n$ は $\sum_{U^n y = z} (U^n)'(y) g(y)^{-s}$ を \mathcal{A} 上に実現したものと一致していることが容易に分るから U^n が homeo とする $[0, 1]$ または $[1, 0]$ の小区間で $g \mapsto g(U_J^{-n})(U^n)'(U_J^{-n})^{-s}$ の Trace をとって それを J について加えればよいのである。

よおみに

補題 $U^n|_J : J \longrightarrow U^n J$ について

$U^n J \supset J$ であったら

$$\mathcal{A} \ni g \mapsto g(U_J^{-n})(U^n)'(U_J^{-n})^{-s} \in \mathcal{A}$$

の固有値はすべて simple であり それは

$$\left\{ (U^n)'(a)^{-s-k} ; k=0, 1, 2, \dots \right\}$$

である。但し、 a は J 内の唯一の U^n の固定点である。

この補題から ζ を $(U^n)'$ とつかつてあるわけにせよ $Z(s)$ を $\det(I - L(s))$ とあるわけである。