数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 27-30

非線形計画問題に対する almost ε-approximate solution について

新潟中央短期大学 商学科 横山一憲 (Kazunori Yokoyama)

本報告の目的は [5] でε－ベクトル計画問題についての結果のなかで議論された almost ε-approximate solution を特徴づけることである。

[5] では、不等式制約付きのベクトル計画問題を正確なペナルティ関数(exact penalty function) を用いて制約なしの問題に変換し、ペナルティパラメーターの大きさに注目することによってベクトル計画問題に対する近似解を得るための必要条件・十分条件を示した。十分条件については、次のような結果が示された。

ペナルティパラメーターを有限な値で十分大きくすると
制約なしの問題に対するε-approximate solutionが
不等式制約付きのベクトル計画問題に対する alomst ε-approximate solution
となる。

「almost ε」とは近似解が許容集合(feasible set)から（ある意味で） ε だけ、はずれていることを示している。このような近似解に注目し、評価する。

1. 準備

次のベクトル計画問題を考える。

(P)minimize $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_p(x))$
subject to $g_i(x) \leqq 0$ for $i = 1,\ldots,m$
where $f_k : R^n \to R$ for $k = 1,\ldots,p$ $g_i : R^n \to R$ for $i = 1,\ldots,m$

本報告中では、次の仮定を満足するとする。

<u>仮定</u> $\varepsilon_k > 0$ for $k = 1,\ldots,p$
f_k : 凸で下に有界 for $k = 1,\ldots,p$
g_i : 凸 for $i = 1,\ldots,m$
feasible set $K = \{x | g_i(x) \leqq 0$ for $i = 1,\ldots,m\}$ は空でない

問題 (P) に対する最適解の定義を与える。

<u>定義</u> $\bar{x} \in K$ が(P)に対する Pareto solution であるとは次の条件

$f_k(x) \leqq f_k(\bar{x})$ for $k = 1,\ldots,p$ with at least one strict inequality
を満たす $x \in K$ が存在しない。

を満たすことである。

<u>注意</u>　上記の仮定の下では Pareto solution の存在は保証されない。しかし次の条件

$f_k(x) \leqq f_k(\bar{x}) - \varepsilon_k$ for $k = 1,\ldots,p$ with at least one strict inequality を満たす $x \in K$ が存在しない。

を満たす $\varepsilon_k (1 \leqq k \leqq p)$ で近似された最適解の存在は保証されている([2])。そこでこのような近似解に関心を向けてきた。

<u>定義</u>　$\bar{x} \in K$ が (P)に対する $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution であるとは次の条件

$f_k(x) \leqq f_k(\bar{x}) - \varepsilon_k$ for $k = 1,\ldots,p$ with at least one strict inequality を満たす $x \in K$ が存在しない。　(1.1)

を満たす事である。ここで、$(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution 全体の集合を S とする。

$S = \{\bar{x} \in K | \bar{x} : (1.1)$ を満たす$\}$

<u>定義</u>　$\bar{x} \in R^n$ が (P)に対する $\Sigma\varepsilon_k$-almost $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution であるとは

$\bar{x} \in \{x | g_i(x) \leqq \Sigma_{k=1}^{p} \varepsilon_k$ for any $i\} = K(\Sigma\varepsilon_k)$ かつ (1.1)

を満たす事である。ここで、$\Sigma\varepsilon_k$-almost $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution 全体の集合を $S(\Sigma\varepsilon_k)$ とする。

$S(\Sigma\varepsilon_k) = \{\bar{x} \in K(\Sigma\varepsilon_k) | \bar{x} : (1.1)$ を満たす$\}$

問題(P)を [5] と同様に exact penalty function を使って次の制約なしのスカラー化された問題$(\theta_s\text{-}\rho)$に変換する。

$(\theta_s\text{-}\rho)$minimize　$\theta_s(x,\rho) = \Sigma_{k=1}^{p} f_k(x) + \rho\,\Sigma_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x))$

<u>定義</u>　$\bar{x} \in R^n$ が $(\theta_s\text{-}\rho)$に対する $\Sigma\varepsilon_k$-solution であるとは次の条件

$\theta_s(\bar{x},\rho) \leqq \theta_s(x,\rho) + \Sigma_{k=1}^{p}\ \varepsilon_k$ for any $x \in R^n$

を満たす事である。

制約なしのこの問題の penalty parameter ρ の大きさに注目することによって [5] で次の結果が得られた。

<u>命題</u>　ある ρ_0 が存在して、

$\rho \geqq \rho_0$

ならば

$\bar{x}$: $(\theta_s - \rho)$に対する$\Sigma\varepsilon_k$-solution
が

$\bar{x}$: (P)に対する$\Sigma\varepsilon_k$-almost $(\bar{\varepsilon_k})_k$-Pareto solution
となる。

注意　上の命題で

$\bar{x}$: (P)に対する$(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution
となるためには、

ある ρ_0 が存在して、

$\bar{x}$: $(\theta_s - \rho)$に対する$\Sigma\varepsilon_k$-solution for any $\rho \geqq \rho_0$
とならなければならない。

2.almost ε-approximate solution の評価

制約なしの問題を解くことによって得られた(P)に対する$\Sigma\varepsilon_k$-almost $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution の評価を行う。上記の注意で述べたように制約無しの問題を解くことによって得られた近似解を許容集合に含めるためには、無限個の $\rho \geqq \rho_0$ に対して調べなければならない。このようなことは、実際上不可能である。そこで、制約無しの問題を解くことによって得られた近似解 $\Sigma\varepsilon_k$-almost $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solutionと許容集合に含まれた近似解 $(\varepsilon_k)_k$-Pareto solution の違いがどのくらいあるのか？なる疑問がでてくる。ここでは、$S(\Sigma\varepsilon_k)\backslash S$ なる点と S との距離の上限を与えることによって評価する。

命題 2.1　$x_s \in R^n$ と $\delta > 0$ が存在して $\delta B^{m+1} \subset F(x_s) + R_+^{m+1}$　　(2.1)

但し $B^{m+1} \subset R^{m+1}$: 単位球、

$$F(x) = (g_1(x),\cdots,g_m(x),\Sigma f_k(x) - \inf\{\Sigma f_k(y) | y \in K\} - \Sigma\varepsilon_k)$$

$\bar{x} \in S(\Sigma\varepsilon_k)\backslash S$
とする。このとき、

$d(\bar{x},S) \leqq \min(1, \|F(\bar{x})\|/\delta)\|\bar{x} - x_s\|$
が成立する。

注意　命題2.1 で常に $\|F(\bar{x})\|/\delta \geqq 1$ ならば $\min(1, \|F(\bar{x})\|/\delta) = 1$ である。

しかし、$\|F(\bar{x})\|/\delta < 1$ である例が以下のように簡単に与えられる。

$f_1(x) = (0.1)^x$, $f_2(x)=(0.3)^x$, $g_1(x) = -0.5x + 0.7$, $g_2(x)= -0.5x + 0.5$

$\varepsilon_1 = 0.3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\delta = 0.3$, $\bar{x} = 1$, $x_s = 3$

とすると、

x_s : (2.1) を満足

$\bar{x} \in S(\Sigma \varepsilon_k) \backslash S$

$\| F(\bar{x}) \| / \delta = \sqrt{0.05} / 0.3 < 1$

また、ここで条件(2.1)がどのくらいの強さの条件なのかという疑問が出てくる。この条件は、実は一般によく知られた Slater条件 と同値となる。

<u>命題2.2</u>　$x^* \in R^n$ と $\delta' > 0$ が存在して $\delta' B^m \subset G(x^*) + R_+^m$

但し $B^m \subset R^m$: 単位球、$G(x) = (g_1(x), \cdots, g_m(x))$

$\Leftrightarrow$

$x_s \in R^n$ と $\delta > 0$ が存在して $\delta B^{m+1} \subset F(x_s) + R_+^{m+1}$　(2.1)

3. 参考文献

[1]伊藤輝生, 非線形計画問題の罰関数法による数値解の誤差範囲, 計測自動制御学会論文集 13-2, (1977), 142-147,

[2]P.Loridan, ε-Solutions in vector minimization problems, J. Optim. Theory and Appl., 43 (1984), 265-276

[3]S.M.Robinson, An application of error bound for convex programming problems in linear space, SIAM J. Control, 12 (1975), 271-273

[4]D.J.White, Multiobjective programming and penalty functions, J. Optim. Theory and Appl., 43 (1984), 583-599

[5]K.Yokoyama, ε-Optimality criteria for vector minimization problems via exact penalty functions, preprint