数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 108-117

Some Comparative Statics Results for Choice under Risk

筑波大学 経営システム科学 木島 正明 (Masaaki KIJIMA)
東北大学 経済学部 大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

1 準備

不確実性を伴う経済における基本的でありながら重要な問題の 1 つは, その不確実性の確率的変化が意思決定に与える影響を調べることである. 典型的な問題として, X_1 を不確実性を表す確率変数, $z(x,b)$ を行動 b を選んだときに $X_1=x$ である場合の利潤などを表す関数, $u(z)$ を主体の効用関数とし, この主体は期待効用

$$E[u(z(X_1,b))]$$

を最大化するように b を選ぶものとしたとき, [1] X_1 が X_2 にシフトした場合に 最適な b がどのように変化するかという問題が多くの研究者によって分析されてきている. ただし, 主体はリスク回避的, すなわち効用関数 u は

$$u'>0,\ u''\le 0$$

を満たし, さらに z は

$$z_{bb}\le 0$$

を満足するものとする. [2] また確率変数 X_i の分布関数を $F_i(x)$, その密度関数が存在するとして, それを $f_i(x)$ で表す.

いま,

$$\phi_i(b)=E[u(z(X_i,b))],\quad i=1,2 \tag{1.1}$$

[1] 以下の議論では, 行動 b に関して陽には何の制約条件も考慮していないが, 区間型の制約条件:

$$b\in[B_L,B_U]\ \ (-\infty\le B_L\le B_U\le\infty)$$

を課しても, 全く同様である.

[2] 式 (1.1) で定義される目的関数 $\phi_i(b)$, $i=1,2$ が 準凹 (quasi–concave) であることを保証する条件であれば良い.

とおくと,

$$
\begin{aligned}
\phi_i'(b) &= E[u'(z(X_i,b))z_b(X_i,b)], \quad i=1,2 &(1.2)\\
\phi_i''(b) &= E[u''(z(X_i,b))\{z_b(X_i,b)\}^2] \\
&\quad + E[u'(z(X_i,b))z_{bb}(X_i,b)], \ i=1,2 &(1.3)
\end{aligned}
$$

であるから, 上述の条件のもとで, $\phi_i(b)$ は b の凹関数となる. $\phi_i(b)$ の最適解の最小のものを b_i と書けば, $b_1 \geq b_2$ であることと, 任意の b に対して

$$
\phi_2'(b) \geq 0 \ \text{ならば}\ \phi_1'(b) \geq 0 \tag{1.4}
$$

が成立することは同値となる. さらに

$$
\begin{aligned}
\psi_i(b) &= \frac{\phi_i'(b)}{E\left[u'(z(X_i,b))\right]} \\
&= \frac{E\left[u'(z(X_i,b))z_b(X_i,b)\right]}{E\left[u'(z(X_i,b))\right]}, \quad i=1,2
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

と定義すると,

$$
E\left[u'(z(X_i,b))\right] > 0, \quad i=1,2
$$

であるから, $b_1 \geq b_2$ であることと, 任意の b に対して

$$
\psi_2(b) \geq 0 \ \text{ならば}\ \psi_1(b) \geq 0 \tag{1.6}
$$

が成立することとも同値となる.

さて $u' > 0$ という条件の下では,

$$
G_i(x:b) = \frac{1}{E[u'(z(X_i,b))]}\int_{-\infty}^{x} u'(z(y,b))f_i(y)dy, \quad x \in \mathcal{R}, \ i=1,2 \tag{1.7}
$$

で定義される関数 $G_i(\cdot:b)$ は分布関数としての性質を備えている. いま, $G_i(\cdot:b)$ に従う確率変数を $Y_i(b)$ とし, その密度関数を

$$
g_i(x:b) = \frac{u'(z(x,b))f_i(x)}{E[u'(z(X_i,b))]}, \quad x \in \mathcal{R}, \ i=1,2 \tag{1.8}
$$

とする. このとき

$$
\begin{aligned}
E\left[z_b(Y_i(b),b)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} z_b(y,b)g_i(y:b)dy \\
&= \frac{1}{E[u'(z(X_i,b))]}\int_{-\infty}^{\infty} z_b(y,b)u'(z(y,b))f_i(y)dy \\
&= \psi_i(b), \quad i=1,2
\end{aligned}
$$

となり, 次の補題が成立する.

補題 1.1 $u' > 0$, $u'' \leq 0$ とし, さらに $z_{bb} \leq 0$ とする. このとき

$$E[z_b(Y_1(b), b)] \geq E[z_b(Y_2(b), b)], \quad \forall b \tag{1.9}$$

ならば,[3] $b_1 \geq b_2$ が成立する. □

2 確率優位

1 実変数実数値関数の適当な族 $\mathcal{F}$ を与えて, 実数値確率変数 Z_1, Z_2 (それらの分布関数, 密度関数を H_i, h_i, $i = 1, 2$) に対し,

$$Z_1 \geq_{\mathcal{F}} Z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad E[f(Z_1)] \geq E[f(Z_2)], \quad \forall f \in \mathcal{F} \tag{2.1}$$

で定義される順序 $\geq_{\mathcal{F}}$ を 関数族 $\mathcal{F}$ により生成される確率優位 (確率順序) と言う (例えば Stoyan [23]).

よく知られたこの種の確率優位としては以下のものがある.

定義 2.1 (関数族により生成される確率優位)

1. ($\geq_{\mathrm{FSD}}$) $\mathcal{F}_{\mathrm{FSD}} := \{$増加関数$\}$ としたときの $\geq_{\mathcal{F}_{\mathrm{FSD}}}$ を FSD (First order Stochastic Dominance) と言い, 簡単のため, $\geq_{\mathrm{FSD}}$ で表す.
2. ($\geq_{\mathrm{MPC}}$) $\mathcal{F}_{\mathrm{MPC}} := \{$凹関数$\}$ としたときの $\geq_{\mathcal{F}_{\mathrm{MPC}}}$ を MPC (Mean Preserving Contraction) と言い, 簡単のため, $\geq_{\mathrm{MPC}}$ で表す.
3. ($\geq_{\mathrm{SSD}}$) $\mathcal{F}_{\mathrm{SSD}} := \{$増加凹関数$\}$ としたときの $\geq_{\mathcal{F}_{\mathrm{SSD}}}$ を SSD (Second order Stochastic Dominance) と言い, 簡単のため, $\geq_{\mathrm{FSD}}$ で表す. □

関数族 $\mathcal{F}$ の包含関係から, 上述の確率優位の強弱関係は図 2.1 の通りである.

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \geq_{\mathrm{FSD}} Z_2 \ \searrow & & \\ & Z_1 \geq_{\mathrm{SSD}} Z_2 \ \rightarrow \ E[Z_1] \geq E[Z_2] & \\ Z_1 \geq_{\mathrm{MPC}} Z_2 \ \nearrow & & \end{array}$$

図 2.1 関数族により生成される確率優位

関数族を意思決定者の効用関数の族と考えれば,

[3] b_1 を含むある区間内の b に対して成立すれば十分である.

1. $\geq_{\mathrm{FSD}}$ $\Longleftrightarrow$ 一般の意思決定者に共通の選好,

2. $\geq_{\mathrm{SSD}}$ $\Longleftrightarrow$ 危険回避的意思決定者に共通の選好

という対応がある.

次の定理は良く知られている (例えば Huang and Litzenberger [7], Ingersoll [8], Ross [21], Stoyan [23]).

定理 2.1

1.

$$Z_1 \geq_{\mathrm{FSD}} Z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad H_1(z) \leq H_2(z), \quad \forall z \in \mathcal{R}. \tag{2.2}$$

2.

$$Z_1 \geq_{\mathrm{SSD}} Z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{z} H_1(v)dv \leq \int_{-\infty}^{z} H_2(v)dv, \quad \forall z \in \mathcal{R}. \tag{2.3}$$

□

補題 1.1 より次の補題を得る.

補題 2.1 $u' > 0$, $u'' \leq 0$ とし, さらに $z_{bb} \leq 0$ とする. このとき

$$z_b(\cdot, b) \in \mathcal{F} \text{ かつ } Y_1(b) \geq_{\mathcal{F}} Y_2(b), \quad \forall b \tag{2.4}$$

ならば $b_1 \geq b_2$ が成立する. □

確率変数 Z と事象 C に対し, $[Z|C]$ により, 事象 C が起こったという条件のもとでの Z の確率分布に従う確率変数を表わすものとする, すなわち,

$$P([Z|C] \leq z) = P(Z \leq z|C) = \frac{P(\{Z \leq z\} \cap C)}{P(C)}.$$

$\mathcal{R}$ の Borel 部分集合をその要素とする適当な集合族 $\mathcal{H}$ を与えて, 実数値確率変数 Z_1, Z_2 に対して,

$$Z_1 \geq_{\mathcal{H}} Z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad [Z_1|Z_1 \in D] \geq_{\mathrm{FSD}} [Z_2|Z_2 \in D], \quad \forall D \in \mathcal{H} \tag{2.5}$$

で新しい確率優位 $\geq_{\mathcal{H}}$ を定義できる. この様に定義される確率優位を (一様な) 条件付き確率優位 ((Uniform) Conditional Stochastic Dominance) と言う (Keilson and Sumita [10], Whitt [24, 25]).

定義 2.2 (条件付き確率優位)

1. ($\geq_{\mathrm{LRD}}$) $\mathcal{H}_{\mathrm{LRD}} := \{(s,t] : -\infty < s \leq t < +\infty\}$ としたときの $\geq_{\mathcal{H}_{\mathrm{LRD}}}$ を尤度比優位 (Likelihood Ratio Dominance) と言い, 簡単のため $\geq_{\mathrm{LRD}}$ で表す.

2. ($\geq_{\mathrm{RHD}}$) $\mathcal{H}_{\mathrm{RHD}} := \{(-\infty, t] : t \in \mathcal{R}\}$ としたときの $\geq_{\mathcal{H}_{\mathrm{RHD}}}$ を逆ハザード率優位 (Reversed Hazard Rate Dominance) と言い, 簡単のため $\geq_{\mathrm{RHD}}$ で表す. □

以下の定理はよく知られている.

定理 2.2

1.

$$Z_1 \geq_{\mathrm{LRD}} Z_2 \iff h_1(z)/h_2(z) \text{ が } z \text{ に関して増加.} \tag{2.6}$$

2.

$$\begin{aligned} Z_1 \geq_{\mathrm{RHD}} Z_2 &\iff H_1(z)/H_2(z) \text{ が } z \text{ に関して増加} \\ &\iff h_1(z)/H_1(z) \geq h_2(z)/H_2(z), \quad \forall z \in \mathcal{R}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし 0/0 は適当に定義するものとする. $h_i(z)/H_i(z)$, $i = 1,2$ は Z_i の逆ハザード率関数 (Reversed Hazard Rate Function) と呼ばれる. □

集合族 $\mathcal{H}$ の包含関係から, 上述の条件付き確率優位の強弱関係は図 2.2 の通りである.

$$Z_1 \geq_{\mathrm{LRD}} Z_2 \;\rightarrow\; Z_1 \geq_{\mathrm{RHD}} Z_2 \;\rightarrow\; Z_1 \geq_{\mathrm{FSD}} Z_2$$

図 2.2 条件付き確率優位

Brown and Solomon [2] と Shanthikumar and Yao [22] は, 上述の条件付き確率優位に対して, 以下のような 2 実変数実数値関数による特徴付けを得た.

定義 2.3

$$\mathcal{G}_{\mathrm{LRD}} := \{g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R},\ z_1 \geq z_2 \text{ のとき } g(z_1, z_2) \geq g(z_2, z_1)\}. \tag{2.8}$$

□

定理 2.3 (Brown and Solomon [2]) 以下の 2 つの条件は同値である:

1. $Z_1 \geq_{\mathrm{LRD}} Z_2$.

2. それぞれ H_1, H_2 を累積分布に持つ, 同じ確率空間上で定義された, 互いに独立な確率変数 $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$ に対して,

$$E\left[g(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2)\right] \geq E\left[g(\hat{Z}_2, \hat{Z}_1)\right], \quad \forall g \in \mathcal{G}_{\mathrm{LRD}} \tag{2.9}$$

が成立する. □

2 実変数実数値関数 g $(: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R})$ に対して,

$$\Delta g(z_1, z_2) := g(z_1, z_2) - g(z_2, z_1) \tag{2.10}$$

と表わすことにする.

定義 2.4

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{RHD}} &= \{g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R},\ \Delta g(z_1, z_2) \text{ が } z_1 \geq z_2 \text{ のとき } z_2 \text{ について減少 }\}, \\ &:= \{g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R},\ \Delta g(z_1, z_2) \text{ が } z_1 \leq z_2 \text{ のとき } z_1 \text{ について増加 }\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

□

定理 2.4 (Shanthikumar and Yao [22]) 以下の 2 つの条件は同値である:

1. $Z_1 \geq_{\text{RHD}} Z_2$.
2. それぞれ H_1, H_2 を累積分布に持つ, 同じ確率空間上で定義された, 互いに独立な確率変数 $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$ に対して,

$$E\left[g(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2)\right] \geq E\left[g(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2)\right], \quad \forall g \in \mathcal{G}_{\text{RHD}} \tag{2.12}$$

が成立する. □

3 一般的結果

次の補題は明らかである.

補題 3.1 $u' > 0$ とする. このとき

$$X_1 \geq_{\text{LRD}} X_2 \iff Y_1(b) \geq_{\text{LRD}} Y_2(b). \tag{3.1}$$

□

いま 1 実変数実数値関数 $r(y)$ に対して,

$$\begin{aligned} E[r(Y_i(b))] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(y) g_i(y : b) dy \\ &= \frac{1}{E[u'(z(X_i, b)]} \int_{-\infty}^{\infty} r(x) u'(z(x, b)) f_i(x) dx \\ &= \frac{E[r(X_i) u'(z(X_i, b))]}{E[u'(z(X_i, b))]}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

であることに注意すれば, 1 実変数実数値関数族 $\mathcal{F}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
& Y_1(b) \geq_{\mathcal{F}} Y_2(b) \\
\Longleftrightarrow \quad & E[r(Y_1(b))] \geq [r(Y_2(b))], \quad \forall r \in \mathcal{F} \\
\Longleftrightarrow \quad & E\left[r(\hat{X}_1)u'(z(\hat{X}_1,b))u'(z(\hat{X}_2,b))\right] \geq E\left[r(\hat{X}_2)u'(z(\hat{X}_2,b))u'(z(\hat{X}_1,b))\right], \\
& \forall r \in \mathcal{F} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ, ただし $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ は, 同じ確率空間上で定義され, それぞれ X_1, X_2 と等しい周辺分布 F_1, F_2 を持つ, 互いに独立な確率変数である.

いま

$$g(z_1, z_2 : b) := r(z_1)u'(z(z_1,b))u'(z(z_2,b)) \tag{3.4}$$

と定義すれば,

$$\Delta g(z_1, z_2 : b) := \{r(z_1) - r(z_2)\}\, u'(z(z_1,b))u'(z(z_2,b)) \tag{3.5}$$

となり, 式 (3.3) は

$$E\left[g\left(\hat{X}_1, \hat{X}_2 : b\right)\right] \geq E\left[g\left(\hat{X}_2, \hat{X}_1 : b\right)\right] \tag{3.6}$$

と書ける.

補題 2.1 と定理 2.4 から次の補題が従う.

補題 3.2 $u' > 0$, $u'' \leq 0$ とする. このとき

$$z_x \geq 0 \ \text{かつ}\ X_1 \geq_{\mathrm{RHD}} X_2 \tag{3.7}$$

ならば, $Y_1(b) \geq_{\mathrm{FSD}} Y_2(b)$, $\forall b$ が成立する. □

以上の補題から, 次の定理を得る.

定理 3.1 $u' > 0$, $u'' \leq 0$ とし, さらに $z_{bb} \leq 0$, $z_{xb} \geq 0$ とする. このとき, 以下のいずれの条件もとでも, $b_1 \geq b_2$ が成立する:

1. $X_1 \geq_{\mathrm{LRD}} X_2$,

2. $X_1 \geq_{\mathrm{RHD}} X_2$ かつ $z_x \geq 0$. □

4　2 資産ポートフォリオ選択問題

具体例として 2 つの資産からなるポートフォリオ選択問題を取り上げる. この場合

$$z(X_i, b) = bX_i + (1-b)r, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

ただし

X_i : 危険資産の収益率を表す確率変数,

r : 安全資産の安全利子率,

b : 危険資産への投資比率 (空売りは認めず, $b \in [0,1]$ なる制約条件を課す; 脚注 2 参照)

とすれば,

$$\begin{aligned} z_x(x,b) &= b, \\ z_b(x,b) &= x-r, \\ z_{bb}(x,b) &= 0, \\ z_{xb}(x,b) &= 1 \end{aligned}$$

であるから, 前節の定理 3.1 の前提条件は満たされおり, その結果を直接的に適用できる. さらに問題固有の性質を吟味することで, 他にもいくつかの興味深い結果を導くことができるが, ここでは紙面の制約上省略する.

謝辞: 本研究を進めるにあたり, 鳥取大学 工学部 河合 一 教授に貴重な御意見を賜わりました. ここに記して感謝の意を表します.

参考文献

[1] Aly, E.–E. A. A. and Kochar, S. C., "On Hazard Rate Ordering of Dependent Variables", *Advances in Applied Probability*, **25** (1993), pp. 477–482.

[2] Brown, M. and Solomon, H., "Optimal Issuing Policies under Stochastic Fields Lives", *Journal of Applied Probability*, **10** (1973), pp. 761–768.

[3] Fishburn, P. C. and Porter, R. B., "Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset: Effects of Changes in Rate of Return and Risk", *Management Science*, **22** (1976), pp. 1064–1073.

[4] Hadar, J. and Russell, W. R., "Application in Economic Theory and Analysis", Ch. 7 in *Stochastic Dominances: An Approach to Decision–Making Under Risk* (Whitmore, G. A. and Findlay, M. C. Eds.), Lexington Books, Lexington, 1978.

[5] Hadar, J. and Seo, T. K., "Asset Proportions in Optimal Portfolios", *Review of Economic Studies*, **55** (1988), pp. 459–468.

[6] Hadar, J. and Seo, T. K., "The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolios", *International Economic Review*, **31** (1990), pp. 721–736.

[7] Huang, C. and Litzenberger, R. H., *Foundations for Financial Economics*, North–Holland, New York, 1988.

[8] Ingersoll, J. E. Jr., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, New York, 1987.

[9] Karlin, S., *Total Positivity*, **I**, Stanford University Press, Stanford, 1968.

[10] Keilson, J. and Sumita, U., "Uniform Stochastic Ordering and Related Properties", *Canadian Journal of Statistics*, **10** (1982), pp. 181–198.

[11] Kijima, M. and Ohnishi, M., Addendum to the Bivariate Characterization of Stochastic Orders, Technical Report No. 92–11, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo, 1992.

[12] Kijima, M. and Ohnishi, M., Stochastic Dominance by Functional Characterization Approach: Fundamental Results and Applications, Technical Report No. 92–12, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo, 1992.

[13] Landsberger, M. and Meilijson, I., "Demand for Risky Financial Assets: A Portfolio Analysis", *Journal of Economic Theory*, **50** (1990), pp. 204–213.

[14] Landsberger, M. and Meilijson, I., "Mean–Preserving Portfolio Dominance", *Review of Economic Studies*, **60** (1993), pp. 479–485.

[15] Lehman, E. L., *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[16] Levy, H., "Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis", *Management Science*, **38** (1992), pp. 555–593.

[17] Ormiston, M. B. and Schlee, E. E., "Necessary Conditions for Comparative Statistics under Uncertainty", *Economics Letters*, **40** (1992), pp. 429–434.

[18] Ormiston, M. B. and Schlee, E. E., "Comparative Statistics under Uncertainty for a Class of Economic Agents", *Journal of Economic Theory*, **61** (1993), pp. 412–422.

[19] Righter, R. and Shanthikumar, J. G., "Extension of the Bivariate Characterization for Stochastic Orders", *Advances in Applied Probability*, **24** (1992), pp. 506–508.

[20] Ross, S. M., *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1983.

[21] Ross, S. M., *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[22] Shanthikumar, J. G. and Yao, D. D., "Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations", *Advances in Applied Probability*, **23** (1991), 642–659.

[23] Stoyan, D. (Edited with Revision by Daley, D. J.), *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley & Sons, Chichester, 1983.

[24] Whitt, W., "Uniform Conditional Stochastic Order", *Journal of Applied Probability*, **17** (1980), pp. 112–123.

[25] Whitt, W., "Uniform Conditional Variability Ordering on Probability Distribution", *Journal of Applied Probability*, **22** (1985), pp. 619–633.