

## 協力ゲームのKernelとReasonable Set

富山大学経済学部 菊田健作 (Kensaku Kikuta)

### 1. はじめに.

本稿の目的は reasonable set を定義し, さらに prekernel が reasonable set に対する kernel に一致することを示すことである. これを応用して, pre-nucleolus が reasonable set に対する nucleolus に一致することを示すことができる. また, 特性関数の分割可能性を仮定すれば, 上述のことを提携構造を考えに入れた場合に容易に拡張できる.

$n$ -person cooperative game with side payments (以後 game という) とは順序対  $(N, v)$  である. ここに  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  は set of players, また  $v$  は  $N$  のべき集合上定義された実数値関数で特性関数という.  $v(\emptyset) = 0$  と仮定する (混乱を生じないかぎり game を  $v$  で表す).  $N$  の部分集合を coalition という. 有限集合  $Z$  に対し,  $|Z|$  は  $Z$  に属する元の数を表す. coalition  $S$  に対し,  $R^S$  は  $|S|$ -次元数ベクトル空間で, 各座標軸が  $S$  の各元に対応しているものとする. vector  $x \in R^S$  の第  $i$  成分を  $x_i$  と表す.  $S \subset T \subset N$  と  $x \in R^T$  に対し,  $x|_S$  は  $x$  の  $R^S$  への射影を表す. vector  $x, y \in R^S$  に対し,  $x \leq y$  (または,  $y \geq x$ ) は,  $x_i \leq y_i, \text{ all } i \in S$  を意味する. vector  $x \in R^N$ , coalition  $S$  に対し,  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$  (if  $S \neq \emptyset$ ),  $= 0$  (if  $S = \emptyset$ ) とする. game  $v$  の pre-imputation とは vector  $x \in R^N$  で次をを満たすものをいう.

$$(1) \quad x(N) = v(N).$$

game  $v$  の pre-imputation 全体の集合を  $X$  と表す. game  $v$  の reasonable set を :

$$r = \{x \in X : m \leq x \leq M\},$$

と定義する. ここに

$$M_i = \max \{v(S) - v(S - \{i\}) : i \in S\} \text{ および } m_i = \min \{v(S) - v(S - \{i\}) : i \in S\}.$$

[Gerard-Varet/Zamir 1987] は  $r$  のみならず, game の superadditive cover を考えることにより他の reasonable set を提案している. 本報告では  $r$  のみを考える.

Proposition 1. (i)  $x \in R^N$  とする.  $x \geq M$  となるのは次のときそのときに限る:

$$(2) \quad v(S) - v(S-T) \leq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(ii)  $x \in R^N$  とする.  $x \leq m$  となるのは次のときそのときに限る:

$$(3) \quad v(S) - v(S-T) \geq x(T), \text{ all } S, T \text{ such that } T \subset S \subset N.$$

(iii) 次は相互に同値である:

(a)  $m \in X$ ,

(b)  $M \in X$ , また

(c)  $v(S) = I(S)$ , all  $S \subset N$ . ここに,  $I \in R^N$  かつ  $I_i = v(\{i\})$ , all  $i \in N$ .

(iv)  $r \neq \emptyset$ .

## 2. Reasonableness of the prekernel

vector  $x \in R^N$  と coalition  $S$  に対し,  $e(S, x) = v(S) - x(S)$  とおく.  $e(S, x)$  を  $x$  における  $S$  の excess という.  $i, j \in N, i \neq j$  に対し,  $i$  を含み  $j$  を含まないような coalition 全体の集合を  $\sigma_{ij}$  と表す. 各  $x \in X$  に対し,  $i$  の  $j$  に関する maximum surplus を:

$$s_{ij}(x) = \max \{e(S, x) : S \in \sigma_{ij}\}.$$

と定義する.  $Y \subset X, x \in Y$  とする.  $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$  かつ, 十分小さいすべての  $\delta > 0$  に対し,  $x^{ij}(\delta) \in Y$  であるとき,  $i$  outweighs  $j$  at  $x$  w. r. t.  $Y$  という. ここに  $x^{ij}(\delta)_h = x_i + \delta$  (if  $h = i$ ),  $= x_j - \delta$  (if  $h = j$ ),  $= x_h$  (otherwise).  $x^{ij}(\delta)$  を  $\delta$ -transfer という.  $i, j$  がともにお互いを outweigh しないとき  $i$  と  $j$  は in equilibrium at  $x$  w. r. t.  $Y$  という. 任意の二人の players が in equilibrium at  $x$  w. r. t.  $Y$  であるような  $x \in Y$  の全体を  $Y \subset X$  に対する kernel といい,  $K(Y)$  と書く.  $X$  に対する kernel を特に  $v$  の prekernel という.  $l, u \in R^N$  に対し,

$$Y(l, u) = \{x \in X : l \leq x \leq u\}$$

とおく.  $r = Y(m, M)$  である.  $l, u \in \mathbb{R}^N$  に対し,  $Y = Y(l, u)$  であると仮定する. このとき,  $x \in K(Y)$  となるのは次のときかつそのときに限る:

$$(4) \quad s_{ij}(x) > s_{ji}(x) \text{ ならば } x_j = l_j \text{ または } x_i = u_i.$$

$x \in X$  に対し,  $\theta(x)$  は  $2^n$ -vector でその成分は  $\{e(S, x)\}_{S \subset N}$  が大きさの順に並んでいるものとする. すなわち,  $\theta_i(x) \geq \theta_j(x)$  whenever  $1 \leq i \leq j \leq 2^n$ .  $\theta(x)$  が辞書式順序で  $\theta(y)$  より小さいとき,  $\theta(x) \prec_L \theta(y)$  と書く. つまり, ある  $k$  に対して  $\theta_i(x) = \theta_i(y)$  for all  $i < k$ , かつ  $\theta_k(x) < \theta_k(y)$ .  $\theta(y) \prec_L \theta(x)$  でないとき,  $\theta(x) \leq_L \theta(y)$  と書く.  $Y \subset X$  とする. 辞書式順序で  $\theta$  を最小にするような  $Y$  の vector の集合を  $Y$  に対する nucleolus といい,  $N(Y)$  と表す. すなわち,  $N(Y) = \{x \in Y : \theta(x) \leq_L \theta(y) \text{ for all } y \in Y\}$ .  $X$  に対する nucleolus を特に game  $v$  の pre-nucleolus と呼ぶ. 次の事実 はよく知られている ([Schmeidler 1969] の p.1165 参照).

$$(5) \quad Y \subset \mathbb{R}^N \text{ とする. } Y \neq \emptyset \text{ ならば } N(Y) \subset K(Y).$$

ここで  $Y \subset X$  に関する二つの条件を考える.

(OPEN)  $r \subset Y$  かつ,  $Y$  は  $X$  における open set,

および

(BOX) ある  $l, u \in \mathbb{R}^N$  に対し,  $Y = Y(l, u)$  しかも  $l \leq m$  かつ  $M \leq u$ .

$X$  および  $r$  はそれぞれ条件 (OPEN), (BOX) を満足する. 両方とも  $r \subset Y$  を含んでいる. これは次の点で必要である. prekernel が  $r$  の extreme point であることがある. この場合,  $r \subset Y$  を仮定しないならば, prekernel が  $r-Y$  に属することもある.  $Y(l, u)$  は  $\mathbb{R}^N$  における interval と  $X$  との共通部分であり,  $l = m, u = M$  とおくと  $r$  に一致する.  $Y(l, u)$  が互いに直交する超平面によって定義されるということは  $\delta$ -transfer が  $Y$  から出ていかないという点で重要であると考え.  $Y$  が open set である条件は  $\delta$ -transfer の定義に関連している.

Theorem 2(i) は, これらの条件の下では  $\delta$ -transfer を考えに入れる手間を省くことができることを述べている. [Maschler/Peleg/Shapley 1979] の p.314 では関数  $v$  にある条件を課すことにより同様

のことを示している。Theorem 2(iv) は [Schmeidler 1969] の Theorem 1 に関連している。さらに [Maschler 1992] の Theorem 5.2 を参照。ここでは条件 (OPEN) の下で  $Y$  の closedness を仮定しない。

Theorem 2.  $Y \subset X$  とし、条件 (OPEN) または (BOX) を仮定する。

- (i)  $x \in K(Y)$  とする。すると  $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$  for all  $i, j \in N, i \neq j$ .
- (ii)  $K(Y) \subset r$ .
- (iii)  $K(Y) = K(r)$ .
- (iv)  $N(Y) \neq \emptyset$ .
- (v)  $N(Y) = N(r)$ .

Example 3.  $n = 3$  とする。、  $v(123) = 5, v(12) = v(13) = v(23) = 3$ , and  $v(i) = 0$  for  $i = 1, 2, 3$ . すると  $M_i = 3, m_i = 0$  for  $i = 1, 2, 3$ , また  $r = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leq y_i \leq 3, i = 1, 2, 3, \text{かつ } y(123) = 5\}$ .  $Y \subset X$  を  $Y = \{(y_1, y_2, y_3) : 0 \leq y_1, 3 \geq y_2, y_3 \geq 0, 8y_1 + 5y_2 \geq 10, 4y_1 + y_2 \leq 14, \text{かつ } y(123) = 5\}$ .  $Y$  は convex かつ compact.  $x = (5, -6, 6)$  とおく。  $x \in Y \cdot r$  かつ  $x$  は  $Y$  の extreme point. さらに  $s_{21}(x) > s_{12}(x), s_{13}(x) > s_{31}(x)$ , かつ  $s_{23}(x) > s_{32}(x)$ . よって,  $x$  から発する 3 本の半直線が  $x$  のみを  $Y$  と共有することにより,  $x \in K(Y)$  であることがわかる。

Theorems 2(iii) と (v) において  $Y = X$  とおくと次を得る。

Corollary 4.  $K(X) = K(r)$  かつ  $N(X) = N(r)$ .

game  $v$  に対する imputation set を  $\underline{X} = \{x \in X : x \geq I\}$  と定義する。  $K(\underline{X})$  を  $v$  の kernel という。  $v$  が次を満足するとき zero-monotonic という:  $T \subset S \subset N$  であるようなすべての  $S, T$  に対して,  $v(S) \geq v(T) + I(S-T)$ . Corollary 4 と Theorem 2 とから, 次がわかる: もしも  $v$  が zero-monotonic であれば,  $K(\underline{X}) = K(X)$  ([Maschler et al. 1972] の Theorem 2.7). これは以下のようにしてわかる。まず,  $v$  が zero-monotonic であるための必要十分条件は  $m = I$  が成り立つことである。次に,  $m = I$  であるための必要十分条件は  $Y(m, u^*) = X$  が成り立つことである。ここに,  $u^* \in R^N$  かつ  $u^*_i = v(N) - m(N - \{i\})$ , all  $i \in N$ . ゆえにもし  $v$  が zero-monotonic ならば,  $K(X) = K(Y(m, u^*))$ . さらに  $u^* \geq M$  であることは容易にわかる。これより,  $Y(m, u^*)$  は (BOX) を満足することがわかる。ゆえに Theorem 2(iii) と Corollary 4 とから,  $K(Y(m, u^*)) = K(r) = K(X)$ . 結局

$$K(\underline{X}) = K(X).$$

### 3. 提携構造を持つ Game.

本節では、これまでの議論を提携構造を持つような game の場合に拡張する。与えられた提携構造に関する特性関数の分割可能性を仮定すれば、第2節の議論を応用できる。

$v$  を game とする。  $B = \{B_1, \dots, B_h\}$  を  $N$  の  $h$  ( $\geq 2$ ) 個の空でない部分集合への分割とする。 $B$  を  $N$  上の提携構造という。  $H = \{1, \dots, h\}$  とおく。本節では、 $v$  は  $B$  に関して分割可能であると仮定する。 i.e., 各  $S \subset N$  に対し、

$$(6) \quad v(S) = v(S \cap B_1) + \dots + v(S \cap B_h).$$

各  $t \in H$  に対し、  $(B_t, v_t)$  は次のような game を表す： $B_t$  は set of players また  $v_t$  は 特性関数ですべての  $T \subset B_t$  に対し  $v_t(T) = v(T)$ 。この game を簡単に  $v_t$  と表す。  $X^t, M^t, m^t, r^t, e^t(\cdot, \cdot), \theta^t(\cdot), K^t(\cdot)$ , そして  $N^t(\cdot)$  をこの game に即して定義する。また  $(\text{OPEN})^t$  および  $(\text{BOX})^t$  と表す。  $x \in R^N$  と  $t \in H$  に対し、  $t_x \equiv x|_{B_t}$ ,  $-t_x \equiv x|_{(N \setminus B_t)}$  とおく。  $X(B) \equiv X^1 \times \dots \times X^h$  および  $r(B) \equiv \{x \in X(B) : m \leq x \leq M\}$  と定義する。  $t_M = M^t$  かつ  $t_m = m^t$  for all  $t \in H$  であるから  $r(B) = r^1 \times \dots \times r^h$  である。  $i, j \in B_t$ , と  $x \in X^t$  に対し、  $st_{ij}(x) \equiv \max \{e(S, x) : S \in \sigma_{ij}, S \subset B_t\}$  と定義する。(6)より、  $x \in X(B)$ ,  $i, j \in B_t$  および  $t \in H$  に対し、

$$(7) \quad s_{ij}(x) - s_{ji}(x) = st_{ij}(t_x) - st_{ji}(t_x).$$

$Y \subset X(B)$  に対する kernel を  $K(Y, B)$  と表す, i.e.,

$$K(Y, B) = \{x \in Y : \text{任意の } t \in H, i, j \in B_t \text{ に対し, } s_{ij}(x) > s_{ji}(x) \text{ ならば } x^{ij}(\delta) \notin Y \text{ for all sufficiently small } \delta > 0\}.$$

**Proposition 5.**  $B = \{B_1, \dots, B_h\}$  を  $N$  上の提携構造とする。(6)を仮定する。 $Y = Y^1 \times \dots \times Y^h$ ,  $Y_t \subset X^t$  for all  $t \in H$  と仮定する。各  $t \in H$  に対し  $Y_t$  は  $(\text{OPEN})^t$  かまたは  $(\text{BOX})^t$  を満足するとする。

(i)  $N(Y) \subset K(Y, B)$  かつ  $N(Y) \neq \emptyset$ ,

(ii)  $K(Y, B) = K(r(B), B)$ , さらに

(iii)  $N(Y) = N(r(B))$ .

(6) は  $K(X(B), B)$  と  $K(r(B), B)$  が一致するための必要条件ではない。これは次の例からわかる。  $n = 3$ .  $v(123) = 5$ ,  $v(13) = v(23) = -3$ ,  $v(12) = 6$ ,  $v(i) = 0$  for  $i = 1, 2, 3$ とする。  $B = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ .  $v$  は (6) を満足しない。しかし  $K(X(B), B) = K(r(B), B) = \{(3, 3, 0)\} \subset r(B)$ .  
[Gerard-Varet and Zamir 1987] の p.137 では特性関数の優加法性が仮定されている。

諸命題の証明は省略する。参考文献の [Kikuta 1994] を参照されたい。

#### 参考文献.

- Aumann, R. J. and J. H. Dreze: Cooperative Games with Coalition Structures. *International Journal of Game Theory*, Vol. 3 (1974), 217-237.
- Gerard-Varet, L. A. and S. Zamir: Remarks on the Reasonable Set of Outcomes in a General Coalition Function Game. *International Journal of Game Theory*, Vol. 16 (1987), 123-143.
- Kikuta, K.: The Kernel for the Reasonable Set in a Cooperative Game. mimeo. February, 1994.
- Maschler, M.: The Bargaining Set, Kernel, and Nucleolus. Ch. 18 of *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, Edited by R. J. Aumann and S. Hart. Elsevier Science Publishers 1992.
- Maschler, M., B. Peleg and L. S. Shapley: The Kernel and Bargaining Set for Convex Games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 1 (1972), 73-93.
- Maschler, M., B. Peleg and L. S. Shapley: Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4 (1979), 303-338.
- Milnor, J. W.: Reasonable Outcomes for  $n$ -Person Games. RM-916, The Rand Corporation, Santa Monica, CA. (1952).
- Schmeidler, D.: The Nucleolus of a Characteristic Function Game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17 (1969), 1163-1170.
- Shapley, L. S.: A Value for  $n$ -Person Games. *Annals of Mathematics Study*, Vol. 28, 1953, 307-317.