数理解析研究所講究録
第864巻1994年134-143

最適化問題に関する収束定理

東工大理　高橋　渉(Wataru Takahashi)

「制約条件 $x \in S$ のもとで，$\theta(x)$ を最小化せよ」という問題(P)において

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x) & (x \in S) \\ +\infty & (x \notin S) \end{cases}$$

とすると，(P)は関数 f の最小解の問題と同じになる．そこでHilbert空間で定義され，$(-\infty, \infty]$ に値をとる関数 f が下半連続で真凸関数であるときの最小解の問題に関連した収束定理について議論してみたいと思う．

Hilbert空間H上で定義された下半連続で真凸関数 f に対し

$$\partial f(x) = \{x^* \in H : f(y) \geqq f(x) + (x^*, y-x), \forall y \in H\}$$

で定義されるHからHへの多価写像 ∂f を，f の劣微分というが，∂f が極大単調作用素であることはよく知られた事実である．また，x_0 が $0 \in \partial f(x_0)$ をみたす必要十分条件は

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x)$$

であることもよい．

Hから H への極大単調作用素 A に対して，初期値問題は

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0, & 0<t<\infty \\ u(0)=x \end{cases}$$

で定義されるが，これは一意の解 $u:[0,\infty)\to H$ をもつ．いま $x\in D(A)$ と $t\geqq 0$ に対して

$$S(t)x=u(t)$$

で $S(t)$ を定義すると，これは $D(A)$ 上の非拡大写像となり，$D(A)$ の閉包 $X=\overline{D(A)}$ に一意に拡張できる（X は A が極大であることより凸集合となる）．そしてこのように定義された X 上の写像の族

$$\mathcal{S}=\{S(t):t\geqq 0\}$$

はつぎの4つの条件：

(1) $S(t+s)x=S(t)S(s)x$, $\forall x\in X$, $\forall t,s\geqq 0$;

(2) $S(0)x=x$, $\forall x\in X$;

(3) 任意の $x\in X$ に対して，$t\mapsto S(t)x$ は連続である；

(4) $\|S(t)x-S(t)y\|\leqq\|x-y\|$, $\forall x,y\in X$, $\forall t\geqq 0$

を満たし，さらに

$$A^{-1}(0)=\bigcap_{t\geqq 0}F(S(t))$$

となる．ただし，$F(S(t))$ は $S(t)$ の不動点の集合である．だか

ら，特に $A=\partial f$ の場合は

$$f(x_0)=\min_{x\in H} f(x) \iff 0\in\partial f(x_0) \iff x_0\in\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))$$

となり，$f(x)$ の最小解 x_0 を求めることと，$\mathcal{S}=\{S(t):t\geq 0\}$ の共通不動点 x_0 を求めることとは同値になる．

極大単調作用素 A に対して，A の resolvent とよばれる H から $D(A)$ の写像

$$J_\lambda(x)=\{z\in D(A): z+\lambda Az\ni x\} \quad (\lambda>0)$$

が定義されるが，この J_λ は実は一価写像であり，非拡大写像である．また J_λ の不動点 $F(J_\lambda)$ は λ がどんな正数であっても $F(J_\lambda)=A^{-1}(0)$ を満たす [9]．

ここではこのような見地に立って最適化問題に関する収束定理をいくつか議論する．

§1. 不動点定理と非線形エルゴード定理

ここでは Hilbert 空間における一般化された nonexpansive semigroup に対する不動点定理と非線形エルゴード定理から述べることにしよう．その前にいくつかの定義と記法を与えることにする．S を semitopological semigroup，すなわち Hausdorff 位相をもった半群で，任意の $s\in S$ に対して，$t\mapsto s\cdot t$, $t\mapsto t\cdot s$ がともに連続であるものとする．$B(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体で，ノルムは $\|f\|=\sup_s|f(s)|$ で与えられる Banach 空

間とする．Xは$B(S)$のsubspaceで1を含むものとする．このとき，X上の実数値関数μがsubmean [6]であるとは

(1) $\mu(f+g) \leqq \mu(f)+\mu(g)$, $\forall f, g \in X$;

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f)$, $\forall f \in X$, $\forall \alpha \geqq 0$;

(3) $f \leqq g$, $f, g \in X \Rightarrow \mu(f) \leqq \mu(g)$;

(4) $\mu(c)=c$ (cはconstant)

を満たすときをいう．X上のsubmeanはmeanの拡張概念である（$\mu \in X^*$がmeanであるとは，$\|\mu\|=\mu(1)=1$を満たすときをいう）．時と場合に応じて，$f \in X$におけるμの値を$\mu_t(f(t))$と書く場合がある．$s \in S$と$f \in B(S)$に対して，$l_s f$, $r_s f$が

$$(l_s f)(t)=f(st), \quad (r_s f)(t)=f(ts), \quad \forall t \in S$$

で与えられる．Xが1を含む$B(S)$のsubspaceで，$l_s X \subset X$であるとき，submean (mean) μは

$$\mu(f)=\mu(l_s f), \quad \forall s \in S, \quad \forall f \in X$$

を満たすならleft invariantであるといわれる．同様にright invariant submean (mean)も定義できる．invariant submean (mean)とはrightかつleft invariantなsubmean (mean)のことである．Sが可換であるならinvariant meanは常に存在する．つぎにHilbert空間でのnonexpansive semigroupの定義を与えておこう．$C \subset H$上で定義された写像の族$\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$が$C$上のnonexpansive semigroupであるとは

(1) $T_{st}x = T_sT_tx$, $\forall s, t \in S$, $x \in C$;

(2) $x \in C$を固定したとき，$s \mapsto T_sx$は連続である；

(3) $s \in S$を固定したとき，$\|T_sx - T_sy\| \leqq \|x-y\|$, $\forall x, y \in C$

を満たすときである．

$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$の共通不動点の全体は$F(\mathcal{S})$で表される．不動点定理と非線形エルゴード定理を与える前にもう少し定義をしておこう．$C(S)$はS上の有界連続関数全体の集合であり，$RUC(S)$は

$$RUC(S) = \{f \in C(S) : s \mapsto r_sf \text{ は連続}\}$$

で定義される1を含む$C(S)$のclosed subalgebraである．また，l_s, r_sのもとでinvariantであることも知られている[5]．$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$を$C$上のnonexpansive semigroupとし，$x \in C$に対して，$\{T_sx : s \in S\}$が有界であるとする．このとき，$u \in C$と$v \in H$に対して，関数$f(t) = \|T_tu - v\|^2$と$g(t) = (T_tu, v)$が$RUC(S)$の元になることは知られている．最後に，$RUC(S)$のsubmeans(means)のnet $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$がasymptotically invariantであるとは，任意の$f \in RUC(S)$と$s \in S$に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_sf) \to 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_sf) \to 0$$

が成り立つことである．

つぎの補助定理はHilbert空間の性質をうまく使って証明されている．

補助定理1 [6]　S を semitopological semigroup とし，X を $B(S)$ の subspace とする．$1 \in X$ とし，μ を X 上の submean とする．$\{x_t : t \in S\}$ を H の有界な集合とし，D を H の閉凸集合とする．いま，任意の $x \in D$ に対して

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される関数 f が X に属するとし，

$$g(x) = \mu_t \|x_t - x\|^2, \ \forall x \in D, \quad r = \inf\{g(x) : x \in D\}$$

とする．このとき，$g(z) = r$ となる $z \in D$ が一意に存在する．また，つぎの不等式がつねに成立する．

$$r + \|z - x\|^2 \leqq g(x), \quad \forall x \in D$$

補助定理2 [7]　S を semitopological semigroup とし，C を H の閉凸集合とする．$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき，$x \in C$ に対して

$$r(y) = \sup_s \inf_t \|T_{ts} x - y\|^2, \quad \forall y \in F(\mathcal{S})$$

とするなら，$r(z) = \inf\{r(y) : y \in F(\mathcal{S})\}$ となる $z \in F(\mathcal{S})$ が一意に存在する．さらにこの z に対してつぎの不等式が成立する．

$$r(z) + \|z - y\|^2 \leqq r(y), \quad \forall y \in F(\mathcal{S})$$

補助定理1を用いるとつぎの定理が得られる．

定理1　S を semitopological semigroup とし，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，$RUC(S)$ が invariant submean をもつものとする．このとき，

$\{T_s x : s\in S\}$が有界となるような$x\in C$が存在するならば

$$F(\mathcal{S})\cap\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}\neq\phi$$

証明　μを$RUC(S)$上のinvariant submeanとし

$$g(y)=\mu_t\|T_t x-y\|^2,\ \forall y\in H\quad,\quad r=\inf\{g(y) : y\in H\}$$

とする．補助定理1より，

$$r+\|z-y\|^2\leqq g(y),\ \forall y\in H$$

となる$z\in H$が一意に存在する．いま$s\in S$に対して，Hから$\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}$の上へのmetric projectionを$Q_s$とすると，$Q_s$はnonexpansiveであり，任意の$t\in S$に対して

$$\|T_{ts}x-Q_s z\|^2=\|Q_sT_{ts}x-Q_s z\|^2\leqq\|T_{ts}x-z\|^2$$

となる．よって

$$\mu_t\|T_{ts}x-Q_s z\|^2=\mu_t\|T_t x-Q_s z\|^2\leqq\mu_t\|T_{ts}x-z\|^2=\mu_t\|T_t x-z\|^2$$

となる．ゆえに$Q_s z=z$である．そこで$z\in\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}$である．$s\in S$は任意であるから$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}$である．

一方補助定理1より

$$\|z-y\|^2\leqq\mu_t\|T_t x-y\|^2-\mu_t\|T_t x-z\|^2,\ \forall y\in H$$

である．そこで任意の$s\in S$に対して，$y=T_s z$とすると

$$\begin{aligned}\|z-T_s z\|^2&\leqq\mu_t\|T_t x-T_s z\|^2-\mu_t\|T_t x-z\|^2\\&=\mu_t\|T_{st}x-T_s z\|^2-\mu_t\|T_t x-z\|^2\\&\leqq\mu_t\|T_t x-z\|^2-\mu_t\|T_t x-z\|^2=0\end{aligned}$$

となり，$z=T_s z$を得る．よって，$z\in F(\mathcal{S})$である．

補助定理２を用いるとつぎの定理が得られる．

定理２　S を semitopological semigroup とし，C を H の閉凸集合とする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき，任意の $x\in C$ に対し，集合

$$F(\mathcal{S})\cap\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}$$

は高々１点からなる．

証明の概略　補助定理２により

$$r(y)=\sup_s\inf_t\|T_{ts}x-y\|^2,\ \forall y\in F(\mathcal{S})$$

とすると，$r(z)=\inf\{r(y) : y\in F(\mathcal{S})\}$ となる $z\in F(\mathcal{S})$ が一意に存在する．いま $y\in F(\mathcal{S})\cap\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\}$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，長い計算をへて

$$2\sup_s\inf_t\langle T_{ts}x-z,z-y\rangle>-\|z-y\|^2-\varepsilon$$

を得る．よって，

$$2\langle T_{ta}x-z,z-y\rangle>-\|z-y\|^2-\varepsilon$$

となる $a\in S$ が存在する．$y\in\overline{co}\{T_{ta}x : t\in S\}$ であるので

$$2\langle y-z,z-y\rangle\geqq-\|z-y\|^2-\varepsilon$$

と得，$\varepsilon\geqq\|y-z\|^2$ を得る．よって $z=y$ である．

これらの定理１，定理２を用いるとつぎの非線形エルゴード定理が得られる．

定理３　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，S を $RUC(S)$ が invariant mean をもつような semitopological semigroup とする．$\mathcal{S}=$

$\{T_t : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，ある $x \in C$ に対して $\{T_t x : t \in S\}$ は有界となるものとする．このとき，$F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ である．また，$\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ を $RUC(S)$ 上の asymptotically invariant な means の net とするとき，$\{T_{\mu_\alpha} x : \alpha \in A\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．ただし，$T_{\mu_\alpha} x$ は $(\mu_\alpha)_t (T_t x, y) = (T_{\mu_\alpha} x, y)$，$\forall y \in H$ を満たすただ1つの元である．

上の定理において，$\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ を $RUC(S)$ の asymptotically invariant な submeans の net とするとき，定理がどこまでいえるかは興味のある問題である．

§2 おわりに

A を極大単調作用素とするとき，A の resolvent J_λ の収束定理もいろいろな形で得られるがここでは紙面の都合上書かない．

非線形エルゴード定理ならびに resolvent の収束定理を Banach 空間で研究しようとすると非常に難しいが，現在では一様凸性と Frechet 微分可能性ぐらいを仮定すると比較的きれいな形で証明できる．非線形エルゴード定理や resolvent の収束定理は最適化理論の収束定理としても有用であるが，最近では画像処理の分野でも使われはじめている．

References

[1] J.B. Baillon, Un théorème de type ergodic pour les contractions non linéares dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B,

280 (1975), 1511–1514.

[2] Hirano, N., Kido, K., and W. Takahashi, Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, Nonlinear Anal., 12 (1988), 1269–1281.

[3] Kitahara, S. and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, to appear in Top. Methods in Nonlinear Anal..

[4] A. T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 105 (1985), 514–522.

[5] T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math., 14 (1970), 630–641.

[6] Mizoguchi, N., and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69–80.

[7] Nishiura, K., and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings, to appear.

[8] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253–256.

[9] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[10] W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, Canadian J. Math., (1992), 880–887.