

グラム・シュミット法による第 1 種フレドホルム積分方程式の解法

名古屋大学工学部 細田陽介 (Yohsuke Hosoda)
名古屋大学工学部 鳥居達生 (Tatsuo Torii)

1 はじめに

我々の目的は悪条件線形方程式 $Ax = b$ を解くことにある。作用素 A の悪条件性は条件数 $\|A\| \|A^{\dagger}\|$ を用いて定量的に表される。ここで A^{\dagger} は A の一般逆作用素を指す。方程式 $Ax = b$ が悪条件であるとき、解 x はデータベクトル b に連続的に依存しない。言い替えると、悪条件方程式は b に微小な摂動 b_{Δ} を加えたとき、 x の変化 x_{Δ} が大きくなる恐れがあることを意味している。悪条件問題は医学、地球科学、天文学などの様々な応用分野の逆問題において現れる。これらの多くの問題は非退化核を持つ第 1 種フレドホルム積分方程式

$$\int_{I_t} K(s, t) f(t) dt = g(s), \quad s \in I_s$$

として定式化される。

上の積分方程式は適当な基底関数を導入することにより、点列空間 l_2 上で定義された悪条件な無限次元連立 1 次方程式

$$Ax = b, \quad b \in l_2$$

となる。このとき、作用素 A がコンパクトとなることはよく知られている。悪条件線形方程式の数値解法については数多くの研究がなされている。大別すれば正則化法 [8] と特異値分解による方法 [2] であり、いずれも直接法ではない。

一般に正則化法は、ノイズに敏感な高周波成分を制御する方法である。Tikhonov の正則化法はこれを正則化パラメータにより行う。したがって、Tikhonov の正則化法を用いるときの本質的な問題は正則化パラメータの選択にある [3][4][5][6][9]。

また、後者は解空間を制限することにより高周波成分を切り捨てる手法である。このときの問題は解空間の基底と次元の選定である。まず我々はこの問題に対して打ち切り最小 2 乗最小ノルム解を提案する。

打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の一般形は以下のように定義される。線形方程式 $Ax = b$ の係数行列 A が次の形に分解されたとする。

$$A = URDV^T, \quad D \stackrel{d}{=} \text{diag}(d_1, d_2, \dots), \quad d_1 \geq d_2 \geq \dots > 0. \quad (1)$$

ここで U, V は正規直交行列、 R は悪条件でない上三角行列、 D は対角行列である。

定義 1 $\varepsilon > 0$ を与え、 $c \stackrel{d}{=} U^T b = (c_1, c_2, \dots)^T$ とし、 $\sum_{i>n} c_i^2 < \varepsilon^2$ を満たす最小の $n = n(\varepsilon)$ に対し、

$$A_n \stackrel{d}{=} URD_n V^T, \quad D_n \stackrel{d}{=} \text{diag}(d_1, \dots, d_n, 0, \dots)$$

を係数行列とする方程式 $A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の最小 2 乗最小ノルム解を $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の打ち切り最小 2 乗最小ノルム解という。

定義からわかるように、打ち切り最小 2 乗最小ノルム解は分解 (1), \mathbf{b} と ε に依存する。また, ε に応じて n で切ったとき, R が上三角行列であることから, 解空間の部分空間の次元 n が決まる。その部分空間上での最小 2 乗最小ノルム解は逆代入と対角行列の逆変換だけで求めることができる。

打ち切り最小 2 乗最小ノルム解は, 制限された解空間の中では最良の解である。もし, ε として計算機イプシロンをとれば, その解は与えられた演算桁数の下では, ほぼ限界の精度に達していることになる。

特異値分解は一般に大きな条件数を持つ線形方程式の数値解法としてよく用いられる。したがって, 打ち切り最小 2 乗最小ノルム解を求めるための分解 (1) として行列の特異値分解を用いるのは妥当である。事実, 悪条件線形方程式に対する特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の有効性は数値実験により実証された。しかし, 特異値分解は直接法ではないので計算量が多いという欠点がある。また, 無駄な計算も伴う。

これに対して我々は直接法による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解を提案する。この方法はピボティング付を含む 3 回の修正グラム・シュミット法による QR 分解から成る。数値実験で特異値分解による方法と同程度の精度の近似解が得られることが確認された。

2 特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解

今, A を列ベクトル $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots]$ を要素とする l_2 から l_2 へのコンパクト作用素とする。特異値分解は次のように定義される。

定義 2 コンパクト作用素 A に対して

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V^T \\ U^T U &= V^T V = I, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

なる分解が存在する。ここで, I は恒等写像を表わす。また, $\{\sigma_i\}$ を A の特異値, $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots]$ の列ベクトルを A の左特異ベクトル, $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots]$ の列ベクトルを A の右特異ベクトルという。なお, 特異値は

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$$

の順序で並んでいるものとする。

次に, この特異値分解を用いて悪条件方程式を定義する。

定義 3 $\{\sigma_i\}$ を A の特異値とする。全ての特異値は正で, かつ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0 \quad (3)$$

を満たしているとき、線形方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in l_2$$

は悪条件であるという。

方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が悪条件であるとき、明らかに A^\dagger のノルムは $\|A^\dagger\| = \infty$ である。

今、 A の特異値分解 (2) が得られたとする。このとき、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は二つのベクトル

$$\mathbf{z} \stackrel{d}{=} V^T \mathbf{x} = (z_1, z_2, \dots)^T, \quad \mathbf{c} \stackrel{d}{=} U^T \mathbf{b} = (c_1, c_2, \dots)^T$$

を定義することにより方程式

$$\Sigma \mathbf{z} = \mathbf{c}$$

に変換できる。つまり、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は一般性を失うことなく単独の方程式を単に列記したものとなる。

$$\sigma_i z_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解 $\mathbf{x}_n^{(\text{SVD})}$ は、定義 1 にしたがって、 $R = I$, $D = \Sigma$, 残差の許容誤差限界 $\varepsilon = \varepsilon_b$ を与えることにより、 \mathbf{c} を $n = n(\varepsilon)$ で打ち切り、

$$\mathbf{x}_n^{(\text{SVD})} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (4)$$

として求めることができる。また、このときの誤差は

$$E_{(\text{SVD})}(n) \stackrel{d}{=} \sum_{i>n} \left(\frac{c_i^2}{\sigma_i^2} \right)^{1/2} \quad (5)$$

で表わされる。この級数の収束が速ければ、実用上 (4) の右辺のフーリエ係数の最後の 2 項の絶対値の和

$$\tilde{E}_{(\text{SVD})}(n) \stackrel{d}{=} \left| \frac{c_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \right| + \left| \frac{c_n}{\sigma_n} \right| \quad (6)$$

により誤差を推定することができる。逆に収束が遅ければ、悪条件線形方程式の数値解法はいつそう困難となる。

数値計算では、計算機イプシロン ε_μ に対して、 ε_μ 以下となる特異値は 0 に置き換える。このとき、もし $\sigma_{m+1} < \varepsilon_\mu$ なる最小の $m = m(\varepsilon_\mu)$ に対して、 $\sum_{i>m} c_i^2 > \varepsilon_\mu^2$ ならば、ノルムが $1/\varepsilon_\mu$ 以下の数値解は存在しない。この意味で l_2 には解は存在しない。

悪条件線形方程式に対する、特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の有効性を数値実験で検証する。第 1 種フレドホルム積分方程式

$$\int_0^1 e^{st} f(t) dt = \frac{e^{s+1} - 1}{s+1}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (7)$$

を50点ガウス・ルジャンドル数値積分則を用いて離散化して解く。これは非退化核を持つ第1種フレドホルム積分方程式の例として[1]より引用した。厳密解は $f(t) = e^t$ である。このとき得られた特異値分解による打ち切り最小2乗最小ノルム解の計算結果を図1に示す。計算はすべて倍精度演算, すなわち $\epsilon_\mu = 1.0 \times 10^{-15}$ で行なった。特異値分解はライブラリ[10]を用いた。なお, 積分方程式の離散化法の詳細は後述する。

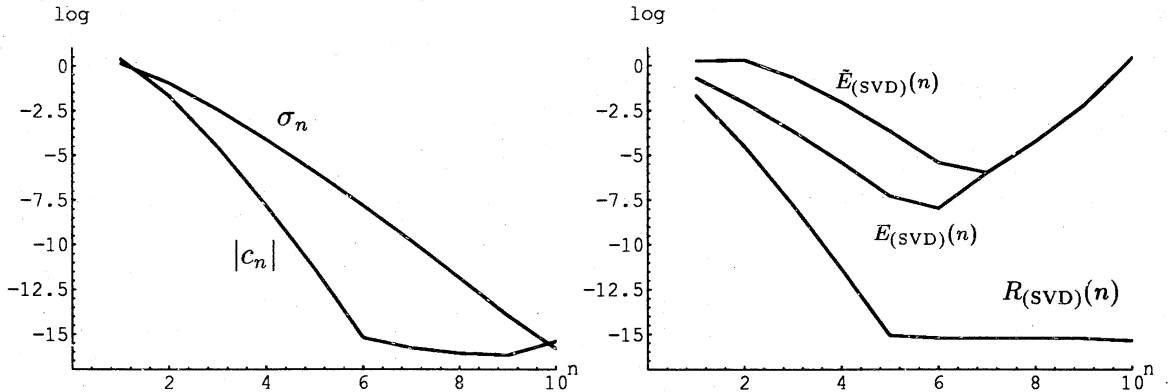


図1: 方程式(7)に対する特異値分解による打ち切り最小2乗最小ノルム解の計算結果。

図1の左図は離散化した行列の特異値と左特異ベクトル $\{u_i\}$ によるデータベクトル b のフーリエ係数の絶対値を常用対数の尺度で図示したものである。どちらも計算機イプシロンレベルまでは順調に小さくなる様子が観測できる。これから, 離散化した行列の実質的な次元は10程度であるといえる。

右図は(4)式の n を順次増やしたときの誤差 $E_{(SVD)}(n)$, 推定誤差 $\tilde{E}_{(SVD)}(n)$ と残差ノルム $R_{(SVD)}(n)$ の振る舞いを示したものである。ここでの誤差と残差は, それぞれ

$$E_{(SVD)}(n) \stackrel{d}{=} \|\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_n^{(SVD)}\|$$

$$R_{(SVD)}(n) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i>n}^m c_i^2 \right)^{1/2}$$

を表す。ただし, \mathbf{x}_o は解 $f(t) = e^t$ を離散化したベクトル, m は計算機イプシロン ϵ_μ 以上の特異値の個数である。有効桁数7桁程度の近似解が得られることがわかる。

次に, 積分方程式の特異値と右辺のデータ関数の特異関数によるフーリエ係数が正確にわかっている第1種フレドホルム積分方程式

$$\frac{ab}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\sin(\pi(s+t))}{a^2 - 2ab \cos(\pi(s+t)) + b^2} + \frac{\sin(\pi(s-t))}{a^2 - 2ab \cos(\pi(s-t)) + b^2} \right) f(t) dt \quad (8)$$

$$= \frac{b \sin \pi s}{1 - 2b \cos \pi s + b^2}, \quad -1 \leq s \leq 1$$

に対する同様の結果を図2に示す。上式の厳密解は

$$f(t) = \frac{a - \cos \pi t - a^2}{1 - 2a \cos \pi t + a^2}$$

であって、この k 番目の特異値およびフーリエ係数はそれぞれ $(b/a)^k$, b^k である。数値実験では $a = 0.2$, $b = 0.05$ と設定した。

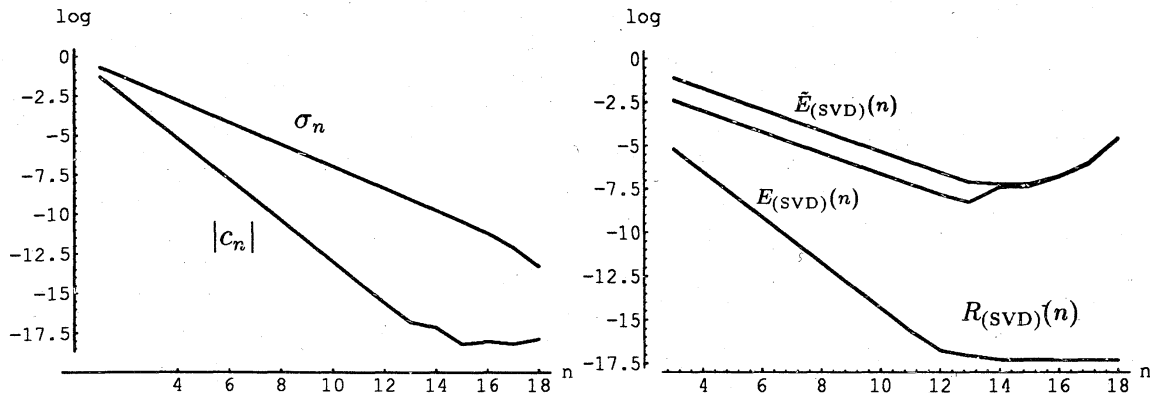


図 2: 方程式 (8) に対する特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の計算結果。

この例においても有効桁数 7 桁程度の近似解が得られている。いずれも特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解が、悪条件線形方程式に対して有効であることを示している。

3 QR 分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解

前節で述べたように、特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解は、悪条件線形方程式に対して有効である。しかし、特異値分解は直接法ではないので、計算量が多いという欠点がある。また、無駄な計算も伴っている。方程式 (7) を離散化した行列の実質的な階数は 10 程度であるが、この情報は特異値分解を行う前には不明である。したがって、10 個の特異値とそれに対応する特異ベクトル (u_i と v_i) を得るために 50 個の特異値と特異ベクトルを求めている。それ以外の 40 個の特異値と特異ベクトルはすべて無駄となった。

以下、ピボッティング付修正グラム・シュミット法を用いた QR 分解による悪条件線形方程式の直接法による数値解法を提案する。なお、特異値分解との対応を明確にするため、本節においても U, V, c 等の記号を用いるが、意味は異なることを注意しておく。

今、 A の特異値はすべて正で、 A の列ベクトルにピボッティング付修正グラム・シュミット法を適用することにより

$$AP = Q_1 DS, \quad D \stackrel{d}{=} \text{diag}(d_1, d_2, \dots) \quad (9)$$

の分解が得られたとする。ここで、 Q_1 は列正規直交行列、 $S = (s_{ij})$ は上三角行列である。このとき、ピボッティングの効果により

$$\begin{aligned} d_1 &\geq d_2 \geq \dots > 0, \\ s_{ii} &= 1, \\ |s_{ij}| &\leq 1, \quad j > i \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ。以後、簡単のために A の列ベクトルはピボットリングが事前に行われているものとして P を省略する。

ここで、 S の条件数を考察する。 S が有限次元行列のとき、その評価が [7] にある。しかしながら、 S が無限次元行列のとき、その評価は発散してしまう。ここでは、典型的な場合として、 s_{ij} , ($j > i$) が $[-1, 1]$ 区間上の一様乱数の場合を考察する。このとき、 $S^T S$ の非対角要素は、 s_{ij} の統計的独立性から、対角要素に比べて無視できる程度となり、 S の条件数は有限である。したがって、(9) の分解において、 A の悪条件性 (3) は、対角行列 D だけに反映されると考えてよい。

次に、 S^T を QR 分解すると、 $S^T = Q_2 L^T$, すなわち

$$A = Q_1 D L Q_2^T$$

が得られる。ここで、 Q_2 は列正規直交行列、 L は下三角行列である。このとき、 L の条件数は、 Q_2 の正規直交性から、 S の条件数と同じである。さらに、 D で L を相似変換すると

$$A = Q_1 M D Q_2^T, \quad M \triangleq D L D^{-1} \quad (11)$$

となり、 D の対角要素の単調性 (10) より、下三角行列 M の対角要素は非対角要素に比べて相対的に大きくなる。

D による相似変換が L の対角要素をどれほど強調しているかを示すために次の指標を定義する。

$$d_L(k) \triangleq \frac{1}{m-k} \sum_{j=1}^{m-k} |l_{k+j,j}|, \quad L = (l_{ij}).$$

$d_M(k)$ についても同様である。ここで m は行列 L, M の次数を表す。積分方程式 (7) と (8) を離散化した行列に対して上の指標を求めたものが図 3 の左図と右図である。

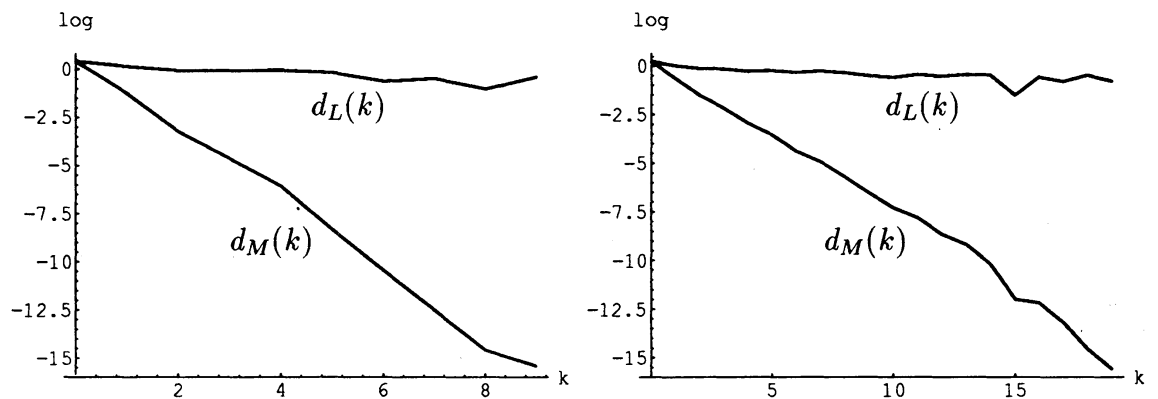


図 3: 行列 L と M の対角優位性の比較。

M が L に比べて対角要素が優位である様子がわかる。

さらに、 M に QR 分解を施すことにより、 $M = Q_3 R$ が得られる。 Q_3 は列正規直交行列、 R は正則な上三角行列である。以上、3 回の QR 分解を用いて、 A の分解

$$A = Q_1 Q_3 R D Q_2^T$$

が得られる. ここで, $U \stackrel{d}{=} Q_1 Q_3$, $V \stackrel{d}{=} Q_2$ とおくことにより,

$$A = URDV^T \quad (12)$$

となる.

本題に立ち返って, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解くことを考える. 行列 A の分解 (12) が得られれば, 悪条件線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の直接法による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解 $\mathbf{x}_n^{(QR)}$ は, 定義 1 にしたがって, 残差の許容誤差限界 $\varepsilon = \varepsilon_b$ を与えることにより容易に求めることができる.

4 算法のまとめ

前節で述べた分解 (12) を用いて, 悪条件線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の算法について述べる. まず, A, \mathbf{b} , 計算機イプシロン $\varepsilon_\mu > 0$ と残差の許容誤差限界 $\varepsilon_b \geq \varepsilon_\mu$ を与える.

[Step 1] A の列ベクトルに対し, ピボット列のノルムが ε_μ 以下になるまでピボットイング付修正グラム・シュミット法を施すことにより, A の QR 分解

$$AP = Q_1 DS + O(\varepsilon_\mu)$$

を求める. ただし, P はピボットイングによる列交換行列である. $m = m(\varepsilon_\mu)$ 列でピボット列のノルムが ε_μ 以下になったとすると, Q_1 は列数が m の縦長の列正規直交行列, S は行数が m の横長の台形型行列, D は m 次の対角行列となる.

[Step 2] ベクトル $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b} - Q_1 Q_1^T \mathbf{b}$ を計算する. このとき, $\|\Delta\mathbf{b}\| > \varepsilon_\mu$ ならば元の方程式は l_2 に解を持たない.

[Step 3] S^T の QR 分解を行う. すなわち, $S = LQ_2^T$ を求める. ここで, L は m 次の正則な下三角行列である.

[Step 4] D による L の相似変換 $M = DLD^{-1}$ を計算し, 引き続き M の QR 分解 $M = Q_3 R$ を求める. R は m 次の正則な上三角行列である.

[Step 5] ベクトル $\mathbf{c} = Q_3^T Q_1^T \mathbf{b} = (c_1, \dots, c_m)^T$ を求め, 残差の許容誤差限界 ε_b に基づき,

$$\sum_{i>n}^m c_i^2 < \varepsilon_b^2$$

を満たす最小の $n = n(\varepsilon_b)$ を決定する. 上式を満たす $n < m$ が存在しないときは $n = m$ とする.

[Step 6] $\mathbf{c}_n = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^m$ とし, 方程式 $R\mathbf{y}_n = \mathbf{c}_n$ を逆代入で解く.

[Step 7] 方程式 $D_n Q_2^T \mathbf{x} = \mathbf{y}_n = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0)^T$ を \mathbf{x} について解く.

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{y_i}{d_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = Q_2(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)^T.$$

最後に \mathbf{x} にピボットリングによる列交換行列 P の逆変換を行えば打ち切り最小 2 乗最小ノルム解 $\mathbf{x}_n^{(QR)}$ が得られる. このときの残差の 2 乗の上界は $\|\Delta \mathbf{b}\|^2 + \varepsilon_b^2$ である. 近似解の誤差は

$$\tilde{E}_{(QR)}(n) \stackrel{d}{=} \left| \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}} \right| + \left| \frac{c_n}{d_n} \right| \quad (13)$$

で推定する.

計算法としては, A の最終列に \mathbf{b} を加えた行列に修正グラム・シュミット法を施すと効率がよい. もちろん, \mathbf{b} の列はピボットリングの対象から外さなければならない. これにより, [Step 2] の $Q_1 \mathbf{b}$ と $\Delta \mathbf{b}$ が同時に計算できる.

5 数値実験およびその考察

第 1 種フレドホルム積分方程式

$$\int_{I_t} K(s, t) f(t) dt = g(s), s \in I_s$$

の離散化法を述べる. 一般性を失うことなく, 区間 I_t および I_s は区間 $[-1, 1]$ にとる.

区間 $[-1, 1]$ 上の N 点ガウスルジャンドル数値積分則の分点を $\{x_1, \dots, x_N\}$, 重みを $\{w_1, \dots, w_N\}$ とする. 今,

$$\hat{K} \stackrel{d}{=} (K(x_i, x_j)) \in \mathbf{R}^{N \times N},$$

$$W^{\frac{1}{2}} \stackrel{d}{=} \text{diag}(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_N}) \in \mathbf{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{g} \stackrel{d}{=} (g(x_1), \dots, g(x_N))^T \in \mathbf{R}^N$$

を定義すると, 未知関数 f に対する積分方程式の残差ノルムは, \mathbf{R}^N における 2 乗ノルムを用いて

$$\left\| \int_{-1}^1 K(s, t) f(t) dt - g(s) \right\|_{L_2} \approx \left\| W^{\frac{1}{2}} \hat{K} W^{\frac{1}{2}} \mathbf{f} - \mathbf{g} \right\|, \quad \mathbf{f} \stackrel{d}{=} (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$$

で近似できる. ただし, $\|\cdot\|_{L_2}$ は L_2 空間でのノルムを表す. ここで, 数値積分による離散化誤差は, 計算機イプシロン ε_μ に比べて, 小さくなるようにあらかじめ分点数 N を十分大きくとるものとする. したがって, 積分方程式の最小 2 乗最小ノルム問題は, 線形方程式

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \stackrel{d}{=} W^{\frac{1}{2}} \hat{K} W^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{b} \stackrel{d}{=} W^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}$$

の最小 2 乗最小ノルム問題に帰着する. このときの解は $\mathbf{x} = W^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}$ である.

方程式 (7) に対する計算結果を図 4 に示す.

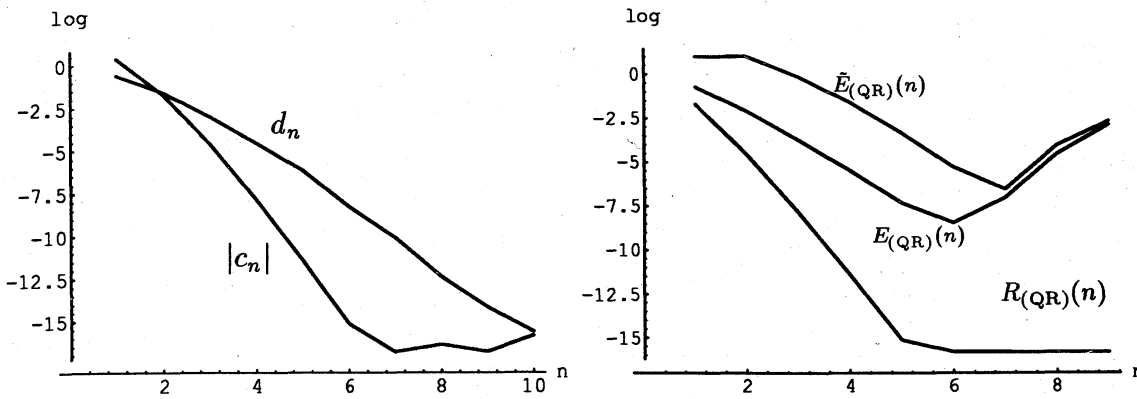


図 4: 方程式 (7) に対する分解 (12) による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の計算結果.

左図の d_n, c_n は, それぞれ

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m), \quad A = Q_1 Q_3 R D Q_2^T,$$

$$c = Q_3^T Q_1^T b = (c_1, \dots, c_m)^T$$

であって, それらの振る舞いは図 1 の左図に酷似している. これは, A の悪条件性が対角行列 D によく反映されていることを意味している.

右図の図中の $E_{(QR)}(n)$, $\tilde{E}_{(QR)}(n)$, $R_{(QR)}(n)$ は, それぞれ誤差, 推定誤差 (13), 残差ノルムを表す. ここでの誤差, 残差ノルムは

$$E_{(QR)}(n) \stackrel{d}{=} \|\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_n^{(QR)}\|,$$

$$R_{(QR)}(n) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i>n} c_i^2 \right)^{1/2}$$

である. 今, $\varepsilon_b = 1.0 \times 10^{-14}$ とすることにより, 有効桁数 7 桁程度の近似解が得られることがわかる. これは特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解と同程度の精度である.

方程式 (8) に対する計算結果を図 5 に示す.

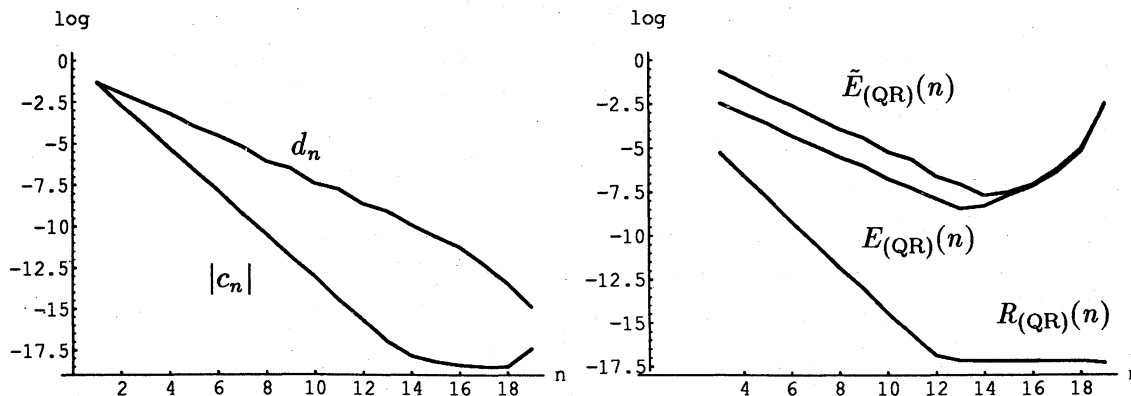


図 5: 方程式 (8) に対する分解 (12) による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解の計算結果.

この場合も特異値分解による打ち切り最小 2 乗最小ノルム解と同程度の精度の計算結果を得た.

6 おわりに

第1種フレドホルム積分方程式の数値解法において, 典型的な悪条件線形方程式 $Ax = b$ が現われる. 我々は, A の条件数 $\|A\| \|A^\dagger\| = \infty$ の線形方程式を取り扱った. 打ち切り最小2乗最小ノルム解を定義し, それを求める直接法を提示した. この直接法の主要な部分は A に対する3回のQR分解から成る. 特異値分解による方法と比較し, 本方法は精度において遜色がない. 与えられた演算桁数の下で, ほぼ限界の精度が得られる.

謝辞

本研究を行うにあたり, 助言や討論をしていただいた名古屋大学工学部杉浦洋助教授, 張紹良助手に感謝する.

参考文献

- [1] Baker, C. T. H., Fox, L., Mayers, D. F. and Wright, K., *Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of First Kind*, Comput. J., 7(1964), pp. 141-148.
- [2] Hansen, P. C., *Computation of the Singular Value Expansion*, Computing, 40(1988), pp. 185-199.
- [3] 細田陽介, 北川高嗣, L-カーブによる不適切問題の最適正則化について, 日本応用数理学会論文誌, 2(1992), pp. 55-68.
- [4] 細田陽介, 北川高嗣, 不適切問題に対する MAICE-DP 法による最適正則化について, 日本応用数理学会論文誌, 3(1993), pp.47-58.
- [5] Kitagawa, T., *A Deterministic Approach to the Optimal Regularization, -The Finite Dimensional Case-*, Japan J. of Appl. Math., 4(1987), pp. 371-391.
- [6] Morozov, V. A., *The Error Principle in the Solution of Operational Equations by the Regularization Methods*, USSR Comput. Math. and Math. Phys., 8(1968), pp. 63-87.
- [7] 中川 徹, 小柳義夫, 最小2乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 東京, 1982, pp. 67-72.
- [8] Tihonov, A. N., *Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method*, Soviet Math., 4(1963), pp. 1035-1038.
- [9] Wahba, G., *Practical Approximate Solutions to Linear Operator Equations When the Data Are Noisy*, SIAM J. Numer. Anal., 14(1977), pp. 651-667.
- [10] 科学用サブルーチンライブラリ SSL II 使用手引書, サブルーチンDASVD1, 富士通株式会社, 1987.