数理解析研究所講究録
第 865 巻 1994 年 40-45

山辺の問題の解の漸近的挙動に対する数値的検証法の応用

九州大学（理）　山本　野人 (Nobito Yamamoto)
龍谷大学（理）　四ツ谷　晶二 (Shoji Yotsutani)
東京工業大学（理）　柳田　英二 (Eiji Yanagida)

ここで取り扱う方程式は conformal scalar curvature equation と呼ばれるもので、非線形楕円型方程式

$$\triangle u + K(|x|)u^p = 0, \qquad x \in R^n$$

において、$p = (n+2)/(n-2)$ に取ったものである（ただし $n > 2$, $K(|x|) \geq 0$, $|x| = \{\sum_{j=1}^n x_j^2\}^{1/2}$）。この方程式の解を求める問題は、いわゆる山辺の問題と本質的に同じである。その正値球対称解の存在、一意性、構造については四ツ谷、柳田らによって研究され、特にこの数年で著しい進展を見せている。一方、中尾、山本らは偏微分方程式の解を精度保証付きで数値的に検証する方法を開発してきた。両者の研究成果を合わせることで、これまで解析的な手法では証明が難しいと考えられてきた問題に、証明を与えることが出来るようになった。

この報告では山本が、特に正値球対称解の漸近的挙動に関する結果を、数値的検証法の説明に重点をおいて述べる。

1　漸近挙動の判定法

簡単のために $n = 3$ の場合について述べることにしよう。正値球対称解については、$r = |x|$ とおくことで、問題は次のような常微分方程式の初期値問題に帰着される。

$$\begin{cases} (r^2 u_r)_r + r^2 K(r)(u^+)^5 = 0, & r > 0 \\ u(0) = \alpha, \quad u_r(0) = 0 \end{cases}$$

ここに、$u^+ = \max\{u, 0\}$ である。

この方程式は、有界連続な $K(r)$ に対して、一意な解を持つことが分かっている。特に $K(r) \equiv 1$ のときは

$$u(r;\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^4}{3} r^2}}$$

を解として持つ。また、解はその漸近挙動から

1. fast-decay solution : r^{-1} のオーダーで 0 に収束するもの
2. slow-decay solution : 減少が r^{-1} より遅いもの

3. zero-hit solution : $r < \infty$ で 0 になるもの

の三種に分けることが出来る。

$K(r)$ が与えられたとき、初期値 α に対する解の漸近挙動を知りたい。今回はこの問題を、$K(r) \equiv 1$ に摂動を加えたばあいについて考えることにする。

実は、Pohozaev の恒等式

$$
\begin{aligned}
\frac{dP(r;u(r))}{dr} &\equiv G_r(r)u^{+6}(r), \\
\text{where} \quad G_r(r) &= \frac{1}{6}r^3K_r(r)
\end{aligned}
$$

にあらわれる量

$$
P(r;u(r)) = \frac{1}{2}r^2u_r(ru_r+u) + \frac{1}{6}r^3K(r)u^{+6}
$$

の無限遠での符号を調べれば、解がどの種類に属するかを知ることが出来る。すなわち、

1. $\lim_{r\to\infty} P(r;u) = 0$ ならば u は fast-decay solution.
2. $\lim_{r\to\infty} P(r;u) > 0$ ならば u は slow-decay solution.
3. $\lim_{r\to\infty} P(r;u) < 0$ ならば u は zero-hit solution.

となることが分かっている。だが、P の値を近似的に計算するだけでは、厳密な意味での判定をすることはできない。そこで微分方程式の解の数値的検証の手法を用いることで、精度保証付き計算を行なう。

2 解の包み込み

さて、$K(r)$ は $[0,\infty)$ で連続かつ区分的に微分可能であって、ある与えられた r^* について $r \geq r^*$ で $K(r) = 1$ であると仮定する。与えられた問題は、次のような積分方程式で表わすことが出来る。

$$
u(r) = \alpha - \int_0^r (1-\frac{s}{r})sK(s)u^{+5}(s)ds.
$$

$K(s)$ は非負だから u は非増加関数であることがわかる。また、右辺によって Fu を定義すれば、F は sup norm のもとで、$C[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ から $C[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ への compact 作用素となる。そこで、方程式 $u = Fu$ の解の存在と、また特にその値の範囲とを知るのに Schauder の不動点定理が利用できる。すなわち、有界凸閉集合 $U \subset C[0,\infty)\bigcap L^\infty[0,\infty)$ に対して、

$$
FU = \{v \in C[0,\infty)\cap L^\infty[0,\infty) | v = Fu, \quad \forall u \in U\}
$$

とおくとき、もし $FU \subset U$ が成立すれば $u = Fu$ の解は FU の中に、したがって U の中に存在するのである。

$P(r)$ の積分表現

$$P(r;u) \quad = \quad \frac{1}{6}\int_0^r s^3 K_r(s) u^{+6} ds$$

を見れば、この場合には $r \geq r^*$ で $P(r) = P(r^*)$ となっていることが分かる。そこで我々の目標を、$r = r^*$ での P の正負を厳密に判定することにおこう。$\lim_{r\to\infty} P(r;u)$ の 0 点の存在は、P の α に関する連続性から、いくつかの特定の α における $P(r^*)$ の符号より知ることが出来る。まず $u(r)$ $(0 \leq r \leq r^*)$ の値を評価し、これを用いて $P(r^*)$ の値を計算することにしよう。

はじめに区間 $[0, r^*]$ を n 個の小区間に分割し、その第 j 番目のものを $e_j = [r_{j-1}, r_j]$ とおく。$r_n = r^*$ である。この小区間の中での u の最大値を上から、最小値を下から評価するのだが、その際、丸め誤差も含めた計算誤差を考慮にいれて厳密に捉えなくてはならない。そこで次のように考える。

e_i $(i \leq j)$ においては小区間毎に u の 最大値・最小値の評価（これをここでは u の e_i における包込みと呼ぼう）ができているとしよう。すなわち $U_i = [\underline{U}_i, \overline{U}_i]$ が与えられていて、$u = Fu$ の解は $0 \leq r \leq r_{j-1}$ で存在し、かつ

$$u(r) \quad \in \quad U_i, \qquad \forall r \in e_i, \quad 1 \leq i \leq j-1,$$

を満たすと仮定する。いま e_j における u の包み込みの候補として $U_j = [\underline{U}_j, \overline{U}_j]$ を考える。集合 $U \subset C[0, r_j]$ を

$$U \quad = \quad \{u \in C[0, r_j] | u(r) \in U_i, \qquad \forall r \in e_i, \quad 1 \leq i \leq j\}$$

とおくと、これは有界閉凸集合だから、もし $FU \subset U$ が成立すれば先に述べたように Schauder の不動点定理から U の中に解 u が存在し、U_j は e_j における u の包込みであることが分かる。

では、どうしたら $FU \subset U$ を成り立たせるような U_j を見出すことが出来るだろうか。もう一度積分方程式を見ると、右辺にあらわれる $(1 - \frac{s}{r}) sK(s)$ は非負であることが分かる。このことから任意の $u \in U$ に対して、$r \in e_j$ で

$$\begin{aligned} &\alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \overline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds - \overline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds \quad \leq u(r) \leq \\ &\alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \underline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds - \underline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、$FU \subset U$ を成り立たせる U_j としては、次の不等式

$$\underline{U}_j \quad \leq \quad \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \overline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds - \overline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds$$

$$\alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \underline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds - \underline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r} (1 - \frac{s}{r}) sK(s) ds \quad \leq \quad \overline{U}_j$$

を任意の $r \in e_j$ に対して満たすものにとればよい。簡単な計算により、十分条件として、

$$\begin{aligned}
\underline{U}_j \quad &\leq \quad \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \overline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r_j}) sK(s) ds - \overline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r_j} (1 - \frac{s}{r_j}) sK(s) ds \\
\alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \underline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r_{j-1}}) sK(s) ds \quad &\leq \quad \overline{U}_j
\end{aligned}$$

が得られる。なるだけせまい区間巾の U_j が望ましいので、等号の場合を採ることにしよう。すなわち

$$\begin{aligned}
\overline{U}_j \quad &= \quad \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \underline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r_{j-1}}) sK(s) ds \\
\underline{U}_j \quad &= \quad \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \overline{U}_i^{+5} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (1 - \frac{s}{r_j}) sK(s) ds - \overline{U}_j^{+5} \int_{r_{j-1}}^{r_j} (1 - \frac{s}{r_j}) sK(s) ds
\end{aligned}$$

によって U_j を定める。以上のような計算を $j = 1$ から $j = n$ まで行なえば、解 u の $[0, r^*]$ における包込みを得ることが出来る。

次に、これを用いて $P(r^*)$ の値を包み込む。$P(r)$ の積分表現にしたがって、$P = [\underline{P}, \overline{P}]$ を、

$$\begin{aligned}
\underline{P} \quad &= \quad \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} U_j^{+6} \int_{r_{j-1}}^{r_j} s^3 K_r(s) ds \\
\overline{P} \quad &= \quad \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} U_j^{+6} \int_{r_{j-1}}^{r_j} s^3 K_r(s) ds
\end{aligned}$$

とすると、$P(r^*) \in P$ が成り立つ。ただし、$U_j^{+6} = \underline{U}_j^{+6}$ or $\overline{U}_j^{+6}$ で、その選択は区間ごとに積分の正負にしたがうこととする。計算された $\underline{P}$, $\overline{P}$ の正負が一致していれば、$P(1)$ の符号が判定できることになる。

以上で述べたような計算は、丸め誤差を考慮したやり方で行なわないと意味がない。ここでは、有理数演算と区間演算を併用することで、丸め誤差からの寄与を含んだ包込みを得ている。利用したソフトウェアは David I. Bell 氏による

CALC - C-style arbitrary precision calculator : version 1.25.0

を早稲田大学の柏木雅英氏が改良したものである。

3 計算例

例題としては、K を

$$K(r) = \begin{cases} 1 & r \in [0, 0.5] \\ 4r-1 & r \in [0.5, 0.75] \\ -4r+5 & r \in [0.75, 1.25] \\ 4r-5 & r \in [1.25, 1.5] \\ 1 & r \in [1.5, \infty) \end{cases}$$

に取ったものを考える。$r^* = 1.5$ である。近似計算からは、この問題が少なくともふたつの first-decay solutions を持つだろうということが分かるのだが、これを解析的に証明することは非常に難しい。我々は前章で述べた方法を用いて、この問題の first-decay solution が少なくとも二つ存在することを示した。すなわち $u(r;\alpha)$ の包込みを計算し、これを用いて次の 4 つの α で $P(r^*)$ の包込みを得た。以下に CALC による計算結果の出力を示す。

The results :

α = 0.8 ; $imax$ = 64 ; h = 0.015625;

$rerror$ = .00000095367431640625;

P = obj intvl{˜.0038085701352O740327, ˜.0060250500598585749 2}

α = 1 ; $imax$ = 64 ; h = 0.015625;

$rerror$ = .00000095367431640625;

P = obj intvl{˜ − .01496067749479972040, ˜ − .00470492867862477022}

α = 1.4 ; $imax$ = 120 ; h = ˜.00833333333333333333;

$rerror$ = ˜.00000000093132257461;

P = obj intvl{˜ − .02472377667815111096, ˜ − .00501861410963051548}

α = 1.7 ; $imax$ = 120 ; h = ˜.00833333333333333333;

$rerror$ = ˜.00000000093132257461;

P = obj intvl{˜.00880063090891210890, ˜.02985830968433102542}

ここに $imax$ は分割数、h は小区間の巾、$rerror$ は丸め誤差の限界であり、obj intvl { ·,· } は区間値の変数を表わし、˜ は内部で有理数として持っている量を便宜上それに近い値の小数で表現していることを示す記号である。

これより $P(r^*)$ の 0 点の存在が、$\alpha = 0.8$ と $\alpha = 1.0$ のあいだ、及び $\alpha = 1.4$ と $\alpha = 1.7$ のあいだで確定した。なお、近似計算の 0 点は $\alpha = 0.8940475$ と $\alpha = 1.5214330$ である。

4 おわりに

ここで用いた手法は、精度保証のテクニックとしては特に新しいものであるとは言えないが、実際に興味をもたれて研究されている問題に対して応用し、結果を得たことに意味がある。精度保証付き計算法の分野では、計算法自身の研究開発もさることながら、現実の問題に応用することで保証付き計算の有用性をアピールし、より多くの人に興味を持ってもらうことをとおして応用範囲を広げて行くことも重要であると考えている。

References

[1] Ni, W.-M. & Yotsutani, S., Semilinear elliptic equations of Matukuma-type and related topics, Japan J. Appl. Math, 5 (1988) 1-32.

[2] Yanagida, E., Strucure of radial solutions to $\triangle u + K(|x|)|u|^{p-1}u = 0$ in R^n, preprint.

[3] Yanagida, E. & Yotsutani, S., Existence of nodal fast-decay solutions to $\triangle u + K(|x|)|u|^{p-}$ 0 in R^n, Nonlinear Anal., to appear.

[4] Yanagida, E. & Yotsutani, S., Classification of positive radial solutions to $\triangle u + K(|x|)|u|^{p-1}u = 0$ in R^n, preprint.

[5] Nakao, M.T., A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan Journal of Applied Mathematics, 5, (1988) 313 - 332.

[6] Nakao, M.T. & Yamamoto, N., Numerical verifications of solutions for elliptic equations with strong nonlinearity, Numerical Functional Analysis and Optimization 12 (1991), 535-543.

[7] Tsuchiya, T. & Nakao, M.T., Numerical verification of solutions of parametrized nonlinear boundary value problems with turning points, Research Report of Mathematics of Computation, Kyushu University, RMC 67-02 (1992), 17 pages.

[8] Watanabe, Y. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for nonlinear elliptic equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 10 (1993) 165-178

[9] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains, Numerische Mathematik 65 (1993) 503-521