数理解析研究所講究録
第866巻 1994年 14-22

KdV 方程式の多重ソリトン摂動論

山口大教養　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 序論

ＫｄＶ方程式を代表とする非線形可積分方程式の研究は，逆散乱法，Bäcklund 変換，広田の方法等種々の厳密解法の開発により著しい発展をとげてきた。これら可積分方程式への高次の非線形効果や，分散効果の影響を調べる研究は，最近の非線形波動論の主要テーマのひとつである。しかしながら多数の具体例によって示されるように，これらの高次効果を入れると方程式の可積分性は失われ，解を求めるためには何らかの摂動論に頼らざるを得ないのが普通である。

非線形発展方程式，とりわけソリトン方程式に摂動を加えた方程式に対する摂動論は，逆散乱法を用いるものと ([1]-[4])，これに依らない直接法 ([5]-[11]) とに分けることができる (両者の概説については[12], [13]を参照)。ここではＫｄＶ方程式の多重ソリトン解に対する小さな摂動の影響を，多時間展開法を用いた特異摂動論によって解析し，ソリトンの振幅，および位置のパラメータの時間発展方程式を導く。さらにその結果を逆散乱法に基づく摂動論によるものと比較する。

2. 直接法

2.1 多時間展開法

以下では摂動の加わったＫｄＶ方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \epsilon R[u],\ u = u(x,t) \tag{1}$$

を考える。ここでϵは小さなパラメータで，右辺の$\epsilon R[u]$が摂動項を表す。$R = 0$ のとき (1) はＫｄＶ方程式に還元し，その数学的構造はよく知られている[14]。ここではＫｄＶ方程式の多重ソリトン解への摂動の効果を調べるために (1) に多時間展開法を適用する。まず

最初に u, および時間微分を次のようにパラメータϵで展開する：

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}\epsilon^j u_j,\ u_j=u_j(t_0,t_1,\ldots) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sum_{j=0}^{\infty}\epsilon^j\frac{\partial}{\partial t_j},\ t_j=\epsilon^j t \tag{3}$$

(2), (3) を (1) へ代入し，ϵのべきで整理すると $u_0,u_1,\ldots$ に対する次の方程式系が得られる：

$$O(\epsilon^0): u_{0,t_0}-6u_0u_{0,x}+u_{0,xxx}=0 \tag{4}$$

$$O(\epsilon^1): u_{1,t_1}-6(u_0u_1)_x+u_{1,xxx}=R[u_0]-u_{0,t_1} \tag{5}$$

2.2 KdV 方程式の Nソリトン解

最初に (4) の解として Nソリトン解を考える。

$$u_0=-2(\ln f)_{xx},\ f=\det M \tag{6}$$

$$M=(m_{ij})=\delta_{i,j}+\frac{2\sqrt{k_ik_j}e^{-(\theta_i+\theta_j)}}{k_i+k_j}\ (i,j=1,2,\ldots,N) \tag{7}$$

$$\theta_i=k_i(x-\xi_i),\ \frac{\partial\xi_i}{\partial t_0}=4k_i^2\ (i=1,2,\ldots,N) \tag{8}$$

ここで k_iおよびξ_iは各々ソリトンの振幅，および位置に関するパラメータで，摂動の無い場合 $k_i=k_{i0}(=$一定$)$, $\xi_i=4k_{i0}^2t_0+\xi_{i0}$となる。なお u_0の表式として次のものも有用である。

$$u_0=-4\sum_{i=1}^{N}k_i\phi_i^2 \tag{9}$$

ここでϕ_iは以下の線形代数方程式の解である。

$$\phi_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{2\sqrt{k_ik_j}e^{-(\theta_i+\theta_j)}}{k_i+k_j}\phi_j=\sqrt{2k_i}e^{-\theta_i}\ (i=1,2,\ldots,N) \tag{10}$$

(6) の fによりϕ_iは次のようにも表せる。

$$\phi_i=\frac{1}{f}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{2k_j}e^{-\theta_j}\frac{\partial f}{\partial m_{ji}} \tag{11}$$

2.3 可解条件

上記ソリトン解を (5) に代入し u_1 の方程式を解くと，$t_0 \to \infty$ のとき永年項 (secular term) が現れる ([5], [10]) 。これを消去するために次の可解条件を課す：

$$(g_i, R[u_0] - u_{0,t_1}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_i(R[u_0] - u_{0,t_1})dx = 0 \tag{12}$$

ここで

$$g_i = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial u_0}{\partial p_i} dx \quad (i = 1, 2, \ldots, 2N) \tag{13}$$

$$p_i = k_i,\ p_{i+N} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{14}$$

で，g_i は線形化されたＫｄＶ方程式（(5) の右辺を零とおいたもの）に対する共役な随伴方程式を満足する[6]。すなわち

$$g_{i,t_0} - 6u_0 g_{i,x} + g_{i,xxx} = 0 \tag{15}$$

小さな摂動による k_i, および ξ_i の時間依存性を次のように仮定する。

$$k_i = k_i(t_1, t_2, \ldots),\ \xi_i = \xi_i(t_0, t_1, \ldots) \tag{16}$$

このとき (12) は，以下の p_i に対する発展方程式に還元する。

$$\sum_{j=1}^{2N} (g_i, \frac{\partial u_0}{\partial p_j}) \frac{\partial p_j}{\partial t_1} = (g_i, R[u_0]) \quad (i = 1, 2, \ldots, 2N) \tag{17}$$

ここでＫｄＶ方程式 (4), および g_i から導かれる次の直交関係式に注意する。

$$(g_i, \frac{\partial u_0}{\partial p_i}) = 8,\ (g_{i+N}, \frac{\partial u_0}{\partial p_{i+N}}) = 0,\ (g_i, \frac{\partial u_0}{\partial p_{i+N}}) = -(g_{N+i}, \frac{\partial u_0}{\partial p_i}) = 8k_i^2,$$

$$(g_i, \frac{\partial u_0}{\partial p_j}) = 0 \quad (\text{上記以外}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N) \tag{18}$$

(17), (18) より k_i および ξ_i に対する発展方程式として以下が得られる：

$$\frac{\partial k_i}{\partial t_1} = -\frac{\epsilon}{8k_i^2}(g_{i+N}, R[u_0]) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{19}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_1} = \frac{\epsilon}{8k_i^2}(g_i + \frac{g_{i+N}}{k_i^2}, R[u_0]) \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{20}$$

2.4 g_i および g_{i+N} の計算

g_i および g_{i+N} は N ソリトン解と g_i の定義式 (13) から直接計算によって導かれる。まず最初に g_{i+N} は次のように書ける：

$$g_{i+N} = -2(\ln f)_{x\xi_i} = 2k_i\sqrt{2k_i}e^{-\theta_i}\phi_i + 2\sum_{j=1}^{N}\sqrt{2k_j}e^{-\theta_j}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_i} \tag{21}$$

ここで上式右辺第 2 項の $\partial\phi_j/\partial\xi_i$ は，(10) を ξ_i で微分すると次の線形代数方程式を満たす。

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_i} + \sum_{s=1}^{N}\frac{2\sqrt{k_j k_s}e^{-(\theta_j+\theta_s)}}{k_j+k_s}\frac{\partial\phi_s}{\partial\xi_i} = G_{i,j} \tag{22}$$

$$G_{i,j} \equiv -\sum_{s=1}^{N}\frac{2\sqrt{k_j k_s}}{k_j+k_s}(k_j\delta_{i,j} + k_s\delta_{i,s})e^{-(\theta_j+\theta_s)}\phi_s + k_j\sqrt{2k_j}e^{-\theta_j}\delta_{i,j} \tag{23}$$

(22) を解いて結果を (21) へ代入すると，最終的に簡単な表式

$$g_{i+N} = 4k_i\phi_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{24}$$

が導かれる。g_i に対しても同様な計算を行うと

$$\begin{aligned} g_i &= -2(\ln f)_{xk_i} - 4 \\ &= -\frac{4}{k_i}\theta_i\phi_i^2 + \frac{2}{k_i}\phi_i^2 + 8\phi_i\sum_{j=1}^{N}\frac{\sqrt{k_i k_j}}{(k_i+k_j)^2}e^{-(\theta_i+\theta_j)}\phi_j - 4 \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned} \tag{25}$$

2.5 k_i および ξ_i の時間発展

(24), (25) を (19) および (20) へ代入し、時間変数を元の t で書き換えると，k_i および ξ_i の時間発展方程式は以下のように表せる：

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{\epsilon}{2k_i}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_i^2 R[u_0]dx \tag{26}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 4k_i^2 - \frac{\epsilon}{4k_i^3}\int_{-\infty}^{\infty}R[u_0][2\theta_i\phi_i^2 - 3\phi_i^2 + 2k_i - 4\sum_{j=1}^{N}\frac{k_i\sqrt{k_i k_j}}{(k_i+k_j)^2}e^{-(\theta_i+\theta_j)}\phi_i\phi_j]dx$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N) \tag{27}$$

2.6 例：$N=1$

1ソリトン解に対しては(9), (10)より

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{k_1}{2}}\mathrm{sech}\,\theta_1,\ \ u_0 = -2k_1^2\mathrm{sech}^2\theta_1 \tag{28}$$

これらを(26), (27)へ代入すると

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{\epsilon}{4k_1}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]\mathrm{sech}^2\theta_1 d\theta_1 \tag{29}$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = 4k_1^2 - \frac{\epsilon}{4k_1^3}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0](\theta_1\mathrm{sech}^2\theta_1 + \tanh\theta_1 + \tanh^2\theta_1)d\theta_1 \tag{30}$$

3. 逆散乱法

ここでは逆散乱法に基づくソリトンの摂動論をKarpman [4] に従って要約し，直接法によって得られた結果に対応するソリトンの振幅，および位置の変化を記述する方程式を導く。

3.1 Jost 関数

Schrödinger 方程式

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0 \tag{31}$$

の散乱状態を表す解で，次の境界条件を満足するものを f, g とする。

$$f(x,k) \to e^{ikx}\ (x\to\infty),\ \ g(x,k) \to e^{-ikx}\ (x\to-\infty) \tag{32}$$

f, g の間には以下の関係式が成り立つ。

$$g(x,k) = a(k)f^*(x,k) + b(k)f(x,k) \quad (g^*(x,k) = g(x,-k)) \tag{33}$$

$$f(x,k) = a(k)g^*(x,k) - b^*(k)g(x,k) \quad (f^*(x,k) = f(x,-k)) \tag{34}$$

ここで a, b はパラメータ k に依存する定数で以下の条件を満たす。

$$a^*(k) = a(-k),\ \ b^*(k) = b(-k),\ \ |\,a\,|^2 - |\,b\,|^2 = 1 \tag{35}$$

他方，束縛状態は a の零点によって特徴づけられる。すなわち

$$g(x, ik_n) = \rho_n f(x, ik_n), \ a(ik_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{36}$$

$$\rho_n = 2ik_n a'(ik_n) e^{2k_n \xi_n} \quad (a'(ik_n) \equiv \frac{da(k)}{dk} |_{k=ik_n}) \tag{37}$$

3.2 摂動展開

f, g, a, u 等をϵのべきに展開する。

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \ldots \tag{38}$$

$$g = g_0 + \epsilon g_1 + \ldots \tag{39}$$

$$a = a_0(1 + \epsilon A + \ldots) \tag{40}$$

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \ldots \tag{41}$$

これらの展開式において，最低次の項はＫｄＶ方程式の N ソリトン解に対応しており，具体的には以下のように書ける[14]：

$$f_0(x, k) = e^{ikx}(1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{2k_j} e^{-\theta_j} \phi_j}{k_j - ik}) \tag{42}$$

$$g_0(x, k) = a_0(k) f_0(x, -k) = a_0(k) e^{-ikx}(1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{2k_j} e^{-\theta_j} \phi_j}{k_j + ik}) \tag{43}$$

$$a_0(k) = \prod_{j=1}^{N} \frac{k - ik_j}{k + ik_j} \tag{44}$$

$$\phi_n = c_n^{(+)} f_0(x, ik_n) = c_n^{(-)} g_0(x, ik_n) \tag{45}$$

$$c_n^{(+)} = c_n = \sqrt{2k_n} e^{k_n \xi_n} \tag{46}$$

$$c_n^{(-)} = \frac{2k_n}{c_n} \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq n)}}^{N} \frac{k_n + k_m}{k_n - k_m} \tag{47}$$

3.3 a, b, k_n およびρ_nの時間発展

逆散乱法を適用すると，a, b, k_nおよびρ_nの時間発展方程式は次数ϵまでの近似において次のように表せる[3, 4]：

$$\frac{\partial a(k,t)}{\partial t} = \frac{i\epsilon}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]g_0(x,k)f_0(x,k)dx \tag{48}$$

$$\frac{\partial b(k,t)}{\partial t} = 8ik^3 b - \frac{i\epsilon}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]g_0^*(x,k)f_0^*(x,k)dx \tag{49}$$

$$\frac{dk_n(t)}{dt} = -\frac{\epsilon}{2k_n}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]f_0^*(x,ik_n)f_0(x,ik_n)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x,ik_n)dx} \tag{50}$$

$$\frac{1}{\rho_n(t)}\frac{d\rho_n(t)}{dt} = 8k_n^3 + \frac{\epsilon}{2k_n a_0'(ik_n)}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]f_0(x,ik_n)\frac{\partial}{\partial k}[g_0(x,k) - \rho_{n0}f_0(x,k)]\,|_{k=ik_n}\,dx \tag{51}$$

3.4 k_nおよびξ_nの時間発展

(37),(42)-(51) より k_nおよびξ_nの時間発展として以下の方程式が得られる：

$$\frac{dk_n}{dt} = -\frac{\epsilon}{2k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^2 R[u_0]dx \tag{52}$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 4k_n^2 - \frac{\epsilon}{4k_n^3}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0][2\theta_n\phi_n^2 + \sqrt{2k_n}e^{\theta_n}\phi_n(1 - \sum_{\substack{m=1\\(m\neq n)}}^{N}\frac{\sqrt{2k_m}e^{-\theta_m}\phi_m}{k_m - k_n}) - 2\phi_n^2]dx$$
$$= 4k_n^2 - \frac{\epsilon}{4k_n^3}\int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]\times$$
$$\times[2\theta_n\phi_n^2 - 3\phi_n^2 + 2k_n - 4\sum_{m=1}^{N}\frac{k_n\sqrt{k_n k_m}e^{-(\theta_n+\theta_m)}}{(k_n+k_m)^2}\phi_n\phi_m - 4\sum_{\substack{m=1\\(m\neq n)}}^{N}\frac{k_n k_m}{k_m^2 - k_n^2}\phi_m^2]dx \tag{53}$$
$$(n = 1, 2, \ldots, N)$$

ここで (53) の第２行目の式を導くには (10) を用いた。１ソリトン解，すなわち $N = 1$ に対しては (52),(53) は各々(29),(30) に一致する。しかし $N \geq 2$ では，(26),(27) および (52),(53) からわかるように，k_iの発展方程式は完全に一致するが，ξ_iのそれは異なる式を与える。

4. 議論

ここで展開した直接法による摂動論は，永年項を消去するための可解条件 (12) をよりどころとしている。これに必要な線形随伴方程式 (15) の解として，(13) で与えられる 2 N個の解を用いたが，これらのみでは完全系をつくらない。実際，(13) 以外に連続スペクトルに対応する解が必要となる[15, 16]。後者は適当な条件の下で，$t_0 \to \infty$ において永年項を生じる[10]。詳しい議論は省略するが，この永年項は，(13) の $g_i(i=1,2,\ldots,N)$ に対する境界条件をうまく選ぶこと（今の場合 $g_i(-\infty)=0$ ）により消去できる。この境界条件の設定は，(15) の解が任意定数だけの不定性をもつことを考慮すると常に可能である。

逆散乱法による摂動論は，直接法で用いた可解条件 (12) に相当するものを少なくとも表面上は使用しておらず，いわゆる通常の摂動論と考えられる。u_1への連続スペクトルの部分からの寄与（波数に関する積分の形で書ける）は，波数零近傍において発散するが，これを避けるために Karpman たちは，散乱係数に特別な仮定を置いた[3, 4]。これが正当化されるかどうかは検討の余地があるように思われる。第２，および第３章の計算結果からわかるように，ＫｄＶ方程式の Nソリトン解に対する両摂動論は，$N\geq 2$ においてソリトンの位置パラメータξ_iに対する発展方程式に異なる結果を与える。この相違はおそらく永年項の処理の仕方の違いによるものと考えられるが，今後詳細に検討する予定である。

参考文献

[1] D.J. Kaup, SIAM J. Appl. Math. **31**(1976)121.

[2] D.J. Kaup and A.C. Newell, Proc. R. Soc. London **A361** (1978)413.

[3] V.I. Karpman and E.M. Maslov, Phys. Lett. **60A**(1977)307; Soviet Phys. JETP **46**(1977)281, **48**(1978)252.

[4] V.I. Karpman, Physica Scripta **20**(1979)462.

[5] J.P. Keener and D.W. McLaughlin, Phys. Rev. **A16** (1977)777.

[6] M. Tanaka, J. Phys. Soc. Jpn. **49**(1980)807.

[7] K.A. Gorshkov and L.A. Ostrovsky, Physica **3D**(1981)428.

[8] Y. Kodama and M.J. Ablowitz, Stud. Appl. Math. **64** (1981)225.

[9] R.L. Herman, J. Phys. A: Math. Gen. **23**(1990)2327.

[10] L.A. Kalyakin, Theor. Math. Phys. **92**(1992)736.

[11] R. Grimshaw and H. Mitsudera, Stud. Appl. Math. **90**(1993)75.

[12] A.C. Newell, *Solitons*, ed. R.K. Bullough and P.J. Caudrey (Springer, Berlin, 1980) 177.

[13] Y. Kivshar and B.A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61** (1989)763.

[14] F. Calogero and A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons I* (North-Holland, New York, 1982).

[15] R.L. Sachs, SIAM J. Math. Anal. **14**(1983)674.

[16] V.A.Arkad'ef, A.K. Pogrebkov and M.K. Polivanov, Theor. Math. Phys. **72**(1987) 909.