

強非線形平面音響衝撃波によって励起される音響流

北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

北大工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)

1. はじめに

初期に $x^* = 0$ に静止していた無限平板が, 時刻 $t^* = 0$ から, 振幅 a , 角振動数 ω の正弦振動を開始するとする. これによって, 平板の右側の半無限領域を満たす理想気体中に平面音波が放射される (図 1 参照). このとき, 下の (1) 式で定義される音響マッハ数 M が有限 ($M \neq 0$) で, 音響レイノルズ数 Re が 1 に比べて十分に大きければ, 放射された音波は, 伝播するにつれて, 非線形効果によって波形を歪められ, やがて衝撃波が形成され, 発展していく:

$$M \equiv \frac{a\omega}{c_0}, \quad Re \equiv \frac{(\gamma + 1)c_0 a}{\delta} \quad (1)$$

ここで, c_0 は初期の静止一様状態の気体中の音速, γ は気体の比熱比, δ は音の拡散率である. この問題は, 音波の伝播過程に現れる非線形現象を理解する上で, 最も基本的かつ重要な問題であり, これまでに多くの理論的研究がなされてきた (文献[1]参照). しかしながら, それらのほとんどすべてが $M \ll 1$ という条件に制限される弱非線形理論であり, $M = O(1)$ の強非線形問題に対する解析は, 衝撃波形成時刻までに限られていた[2].

最近, 著者らは, $M = O(1)$ の強非線形問題を取りあげ, 解析的方法と数値解法を併用し, 衝撃波の形成と発展も含めて, 詳細な解析を行った[3]. その結果, よく知られていた弱非線形現象とは異なる, いくつかの強非線形現象の存在が明らかにされた (文献[3]参照. そこには, 弱非線形波の特徴も要約されている). そのなかでも, 衝撃波形成後に, 波の伝播する方向に正味の質量流れ (音響流) が生じることは, とくに注目すべきであろう. 論文[3]では, これによって, 音源 (振動平板) 近傍の気体の密度が, 時間の経過とともに低下していくことを示唆した (したがって定常状態は実現されないであろう). 図 2 と図 3 に, 弱非線形波と強非線形波の, 音源から十分に離れた領域での波形を模式的に示した (密度, 圧力, 流速のいずれも同様の波形をもつ). 弱非線形波の場合, 希薄部と圧縮部が対称な鋸歯状波と呼ばれる波形に漸近し, それゆえ, 第一近似では, 正味の質量流れは存在しない. これに対して, 強非線形波の場合には, 図 3 に示すような非対称な波形に漸近する. このことから, 音響流が存在することは容易にわかる[3].

文献[3]では, 少なくとも時刻 $t^* = 120\pi/\omega$ までは, 音響流が時間的にも空間的にもほぼ一定 (M には依存する) であることが示された. 長い時間が経って音源近傍の気体の密度が

著しく低下すれば、放射される音波の伝播特性が変わりうる。そうなれば、音響流の性質も変化する可能性がある。本研究は、文献[3]で実行された数値計算の計算時間を延長し、平板が振動を開始してから十分に時間が経った後の波動場を、とくに音響流の時間発展に注目して詳しく調べ、その持続性を確かめることを目的とする。

2. 問題の定式化

正弦振動する平板から放射される有限振幅の平面音波の伝播過程は、(1) 式で定義される二つの無次元パラメータによって決定される。本研究で取り扱うのは

$$M = O(1) \quad \text{かつ} \quad Re \gg 1 \quad (2)$$

の場合である。最初の条件、 $M = O(1)$ 、は音波の非線形性が強いことを意味する。第二の条件、 $Re \gg 1$ 、は気体の粘性と熱伝導性による散逸の効果が一般には十分に小さいことを意味するものであり、これによって、衝撃波面は不連続面とみなされ、そこを除いて気体の粘性と熱伝導性を無視できる。

以下のような無次元変数を導入し、問題の定式化を行う：

$$t = \omega t^*, \quad x = kx^*, \quad u = \frac{u^*}{c_0}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 c_0^2} \quad (3)$$

ここで、 x^* は平板の初期の位置からの距離、 u^* は x 方向の流速、 ρ^* は気体の密度、 p^* は圧力である (ρ_0 は初期の静止一様状態における気体の密度; $c_0 = \omega/k$)。 $Re \gg 1$ の条件によって、支配方程式として、以下の質量、運動量、および、エネルギーの保存則を用いることができる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u]}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

ここで、 $E_t = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$ は無次元化された理想気体の単位体積当たりの全エネルギーである。方程式系 (4)–(6) (Euler 方程式) は、不連続面 (衝撃波) を横切っては適用できないが、適切な数値解法を用いると、衝撃波の前後で Rankine-Hugoniot 関係式とエントロピー条件を満足する数値解を得ることができる。本研究では、文献[3]と同様に Osher のスキーム[4]を用いる。

気体は初期に静止一様状態にあったとして、初期条件

$$t = 0 \text{ において } u = 0, \quad \rho = 1, \quad p = \frac{1}{\gamma} \quad (x \geq 0) \quad (7)$$

を課す。また、振動平板上での境界条件を次式で与える：

$$x = X(t) \equiv M(\cos t - 1) \text{ において } u = -M \sin t \quad (t > 0) \quad (8)$$

衝撃波形成時刻までは、波は単一波 (simple wave) であり、初期条件 (7) と境界条件 (8) を満たす厳密解を解析的に得ることができる。それは、 μ をパラメータとして、

$$u = -M \sin \mu, \quad t - x - [\mu + M(1 - \cos \mu)] = \beta M(t - \mu) \sin \mu \quad (9a)$$

と与えられる[3]。流速 u が得られれば、密度 ρ と圧力 p は次式から求められる：

$$\rho = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} u\right)^{2/(\gamma - 1)}, \quad p = \frac{1}{\gamma} \rho^\gamma = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} u\right)^{2\gamma/(\gamma - 1)} \quad (9b)$$

衝撃波が形成される距離と時刻は、(9a) 式を用いて計算できる[3]。

衝撃波形成後は、波はもはや単一波とみなすことはできず、解は Osher のスキームを用いて数値的に求められる。次節に代表的な数値解のグラフを示す。

3. 強非線形音響衝撃波と音響流：数値計算の結果

数値計算は空間分割を $\Delta x = 2\pi/600$ に固定し、時間分割 Δt を $\Delta t/\Delta x \lesssim 0.1$ として行った。計算には北海道大学大型計算機センターのスーパーコンピュータ HITAC S820 を用いた。比熱比 γ は $7/5$ (空気) とした。以下では、おもに $M = 0.5$ の場合の結果を示す。

A. 衝撃波を含む波の波形の時間発展

まず、平板が振動を開始してから長い時間が経った後の波形の特徴を述べておく。

図 4 に $M = 0.5$ の場合の密度、圧力、流速の波形、および、エントロピーの分布のグラフを示す。波の $x = 0$ から $x = 40\pi$ までの部分が、時間間隔 10π ごとに描かれている。無次元化されたエントロピーの増加量 s は次式で与えられる：

$$s = \ln(\gamma p / \rho^\gamma) \quad (10)$$

平板が振動を開始してから、長い時間が経過すると、近傍場の様子は、以下に述べるように、初期の頃と比べて大きく異なる。密度波形のグラフ (図 4(a)) は、音響流によって気体が

遠方へ運ばれるために、音源近傍に低密度領域が生じ、それが時間とともに広がっていく様子を示している。低密度領域では、衝撃波面における密度の不連続も小さくなっているが、Rankine-Hugoniot 関係式は満たされている。エントロピーのグラフ (図 4(b)) は、衝撃波面でのエネルギー散逸にともなって生成されたエントロピーが、音源近傍に累積していく様子を示している。近傍場では密度が著しく低下しているにもかかわらず、圧力波形は初期の頃と比べてあまり変化していない (図 4(c))。つまり、エントロピーの増加が密度の低下による影響を相殺している ((10) 式参照)。平板のごく近傍における速度波形の振幅は、時間が経つにつれて増大し、図 4(d) に描かれている最も進んだ時刻 $t = 380\pi$ では、音響マッハ数 M のほぼ二倍に達している。低密度・高エントロピー領域を通り抜けた波の密度波形と速度波形は、ともに、初期の頃と変わらない波形 (図 3 に示した非対称な鋸歯状波型の波) に戻る。

近傍場におけるもう一つの特徴は、波の波長 (衝撃波面の間隔) の増大である: 平板近傍の低密度・高エントロピー領域では、局所音速が大きくなっている (理想気体では $c^2 = \gamma p / \rho$ だから)。一方、現象の時間変化のスケールは、常に平板の振動の角振動数の逆数 $1/\omega$ である。結果として、低密度・高エントロピー領域の中で波長が増大することになる。波がこの領域を通り抜けると、無次元化された波長 (衝撃波面の間隔) は、ほぼ 2π 、すなわち、初期の静止一様状態を伝わる音波の波長に戻る。

上で述べたことは次のように要約される: 長い時間が経過した後では、放射される音波の密度波形と速度波形は初期の頃と比べて大きく変化するが、それは、音源近傍の低密度・高エントロピー領域の中に限られる局所的なものである。

B. 音響流の時間発展と平均密度と平均圧力の分布

音響流が存在するということは、次式で定義される時間平均された質量流束密度 $\overline{\rho u}$ がゼロでないということである:

$$\overline{\rho u}(x, t; T) \equiv \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \rho(x, \tau) u(x, \tau) d\tau \quad (0 \leq x \leq t - T) \quad (11)$$

ここで、 T は平均をとる時間間隔である。線形、あるいは、弱非線形問題においては、また、強非線形問題でも衝撃波形成時刻前までは、位置を固定して波動現象を観測すると、それは厳密に 2π を周期として持つ定常な現象である [3]。したがって、 $T = 2n\pi$ (n は整数) として平均操作を行えば、結果は t と T によらず、かつ、音響流も存在しない。しかし、強非線形問題の衝撃波形成後においては、現象は“準定常的”であり [3]、平均量は t と T に依存する。以下に示す結果は、文献 [3] と同様に、 $T = 2\pi$ として計算を行った結果である。

図 5 に $M = 0.5$ の場合の音響流の分布を示す。相当に時間が経過し、音源近傍の密度が著しく低下した状態になっても、音響流はほぼ一定の値を保ち続ける。ただし、平板近傍の低密度領域の大きさが増していくのにもとない、音響流の流速が一定値に達する点は、平板から遠くなっていく。音響流の流速は、平板から十分に離れた点では、時間的にも空間的にもほぼ一定である。時刻 $t = 120\pi$ 、位置 $x = 100\pi$ における $\bar{\rho}u$ の値をプロットしたものが図 6 である。 $M \lesssim 0.1$ のとき、 $\bar{\rho}u$ は、実線で示された M^2 に比例する直線上にある。

図 7(a) に $M = 0.5$ の場合の平均密度 $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}(x, t; T) \equiv \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \rho(x, \tau) d\tau \quad (0 \leq x \leq t - T) \quad (12)$$

の分布の時間変化が示されている。図中には、左から順に、時間間隔 38π ごとに、時刻 $t = 380\pi$ までの $\bar{\rho}$ の分布を表す曲線が描かれている。音響流によって気体が遠方へ運ばれるため、平板近傍に低密度領域が生じ、それが時間とともに、ほぼ一定の割合で広がっていくのがわかる。

衝撃波形成後、平板近傍の $\bar{\rho}$ は急激に減少し始めるが、平均圧力 \bar{p}

$$\bar{p}(x, t; T) \equiv \frac{1}{T} \int_{t-T}^t p(x, \tau) d\tau \quad (0 \leq x \leq t - T) \quad (13)$$

は、その大きな密度変化に対応するほどには変化しない(図 7(b))。その分、平均温度が、相当に上昇していると考えられる(文献[3]参照)。

平均密度 $\bar{\rho}$ も、平均圧力 \bar{p} も、平板から離れたところでは、初期の一様状態における値よりも大きい値を持つ。この値は、双方とも、時間的にほぼ一定である。これは、図 3 に示した非対称な鋸歯状波型の波形が実現されているためで、強非線形波の特徴であるといえる(文献[5]に、弱非線形波の衝撃波形成前までは、 $\bar{\rho}$ と \bar{p} 、ともに、初期の一様状態の値より小さいことが述べられている)。

各時刻における平均密度 $\bar{\rho}$ の最小値 $\bar{\rho}_{\min}$ を図 8 に示す。ただし、最小値 $\bar{\rho}_{\min}$ が実現される点 x は、各時刻において異なることを注意しておく。

C. エネルギー流束密度と運動量流束密度

平板の振動が気体に伝えるエネルギーは、エネルギー流束密度を用いて表現できる。その時間平均 \mathcal{E} は、衝撃波形成時刻より前であれば、単一波の解を用いて計算できる：

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E_t + p) u dt = \frac{M^2}{2} F\left(-\frac{1}{\gamma-1}, -\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}, 2; \frac{(\gamma-1)^2 M^2}{4}\right) \quad (14)$$

ここで、 F は Gauss の超幾何関数である。(14) 式の右辺は、衝撃波形成前であれば、 \mathcal{E} の値が x に依存しないことを示している。とくに、 $\gamma = 7/5$ のときには (14) 式は多項式

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}M^2 + \frac{3}{40}M^4 + \frac{3}{2000}M^6 + \frac{1}{4 \cdot 10^5}M^8 \quad (15)$$

となる。衝撃波が存在すると上の公式を用いることはできないが、図 9 に示した数値計算の結果から、平板から気体へ伝えられる平均のエネルギー ($x = 0$ における \mathcal{E}) の、(15) 式で与えられる値 ($M = 0.5$ のとき 0.13) との差は、 $t = 382\pi$ のとき、15% 程度であることがわかる。

衝撃波形成時刻より前であれば、時間平均された運動量流束密度 \mathcal{M} も、単一波の解を用いて計算でき、その結果は x に依存しない:

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\rho u^2 + p - \frac{1}{\gamma} \right) dt = \frac{1}{\gamma} \left[F\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}, -\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}, 1; \frac{(\gamma-1)^2 M^2}{4}\right) - 1 \right] \quad (16)$$

これもやはり、 $\gamma = 7/5$ のとき多項式

$$\mathcal{M} = \frac{3}{10}M^2 + \frac{3}{200}M^4 + \frac{1}{10000}M^6 \quad (17)$$

となる。図 10 に \mathcal{M} の分布を示す。平均の運動量流束密度 \mathcal{M} も、 \mathcal{E} と同様に、衝撃波形成前の値から大きくは変化しない。 $\overline{\rho u}$ が単位体積あたりの平均運動量の意味を持つことに注意すると、運動量流束がほぼ一樣かつ一定であることが、音響流がほぼ一樣であることに対応していることがわかる。

4. おわりに

平板が振動を開始してから十分に時間が経過した後の波動場の様子を、数値計算の結果をもとに考察した。おもな結果は以下のようにまとめられる:

- (1) 平板が振動を開始してから長い時間が経過した後には、音源 (振動平板) の近傍に、低密度・高エントロピー領域が形成される。この領域の大きさは時間とともにほぼ一定の割合で増大していく。
- (2) そこでは、密度は著しく低下しており、速度波形の振幅は増大しているが、圧力波形の変化は相対的に小さい。波長 (衝撃波面の間隔) は増大している。
- (3) 近傍場の低密度・高エントロピー領域を通過した波は、初期の頃とあまり変わらない非対称な鋸歯状波型の波形に戻る。
- (4) 音響流 $\overline{\rho u}$ の値は、音源近傍および波の先端を除いて、ほぼ一樣である。音源近傍に低密度領域が形成された後も、音源から離れたところでは $\overline{\rho u}$ はほぼ一定の値を保ち続ける。

- (5) $M \lesssim 0.1$ では, $\overline{\rho u} \propto M^2$ である.
- (6) 長い時間が経過して, 近傍場に波長の数倍以上の大きさを持つ低密度・高エントロピー領域が形成されても, 振動平板から気体へ伝えられる運動量とエネルギーの時間平均はあまり変化しない.

参考文献

- [1] Beyer, R. T. (ed.) (1984) *Nonlinear acoustics in fluids* (Van Nostrand Reinhold, New York).
- [2] Blackstock, D. T. (1962) Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids, *J. Acoust. Soc. Am.* 34, 9–30.
- [3] Inoue, Y. and T. Yano (1993) Propagation of strongly nonlinear plane waves, *J. Acoust. Soc. Am.* 94, 1632–1642.
- [4] Osher, S. and F. Solomon (1982) Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws, *Math. Comput.* 38, 339–374.
- [5] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz (1987) *Fluid Mechanics Second Edition* (Pergamon, Oxford), Sec. 101.

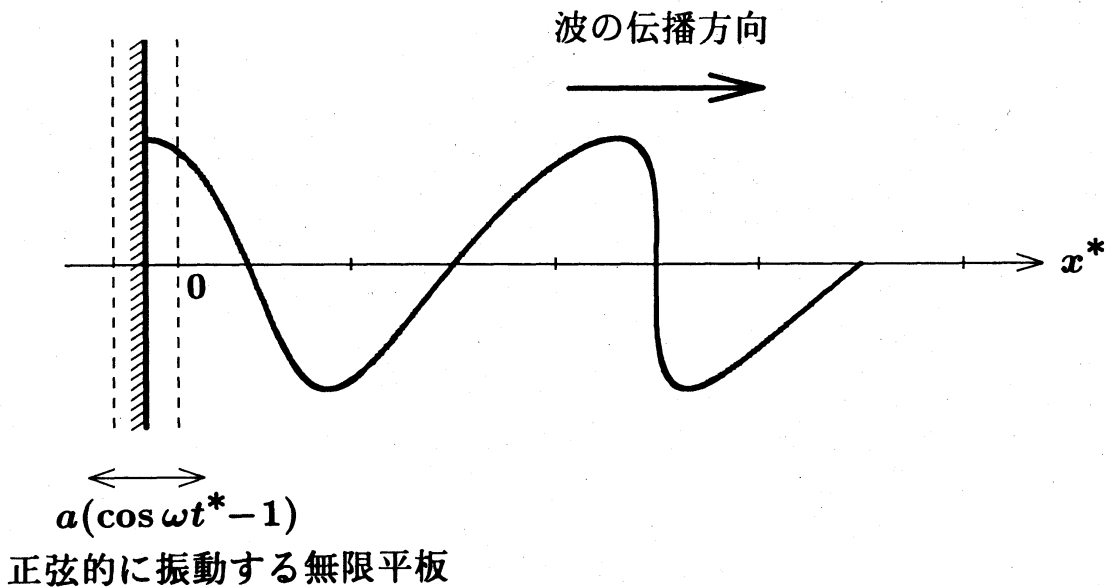


図 1. 無限平板の正弦振動によって放射される有限振幅音波の概略図

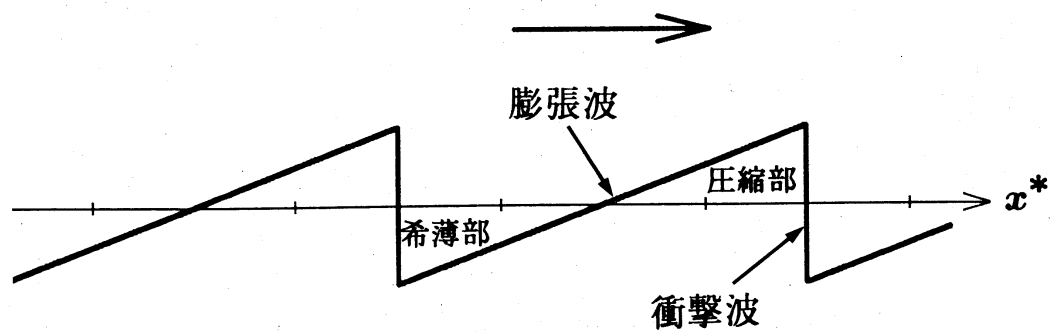


図 2. 弱非線形波の遠方での波形 — 鋸歯状波

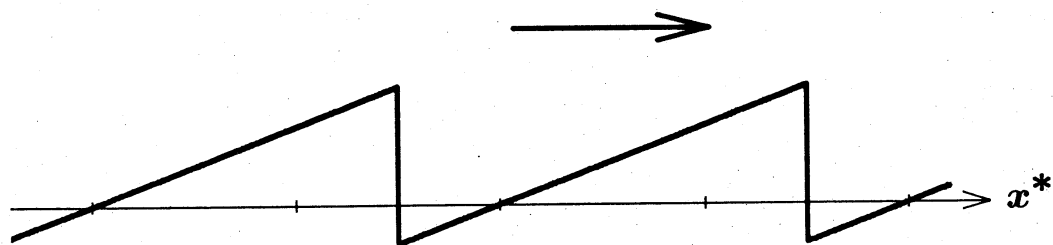


図 3. 強非線形波の遠方での波形 — 非対称な鋸歯状波型の波

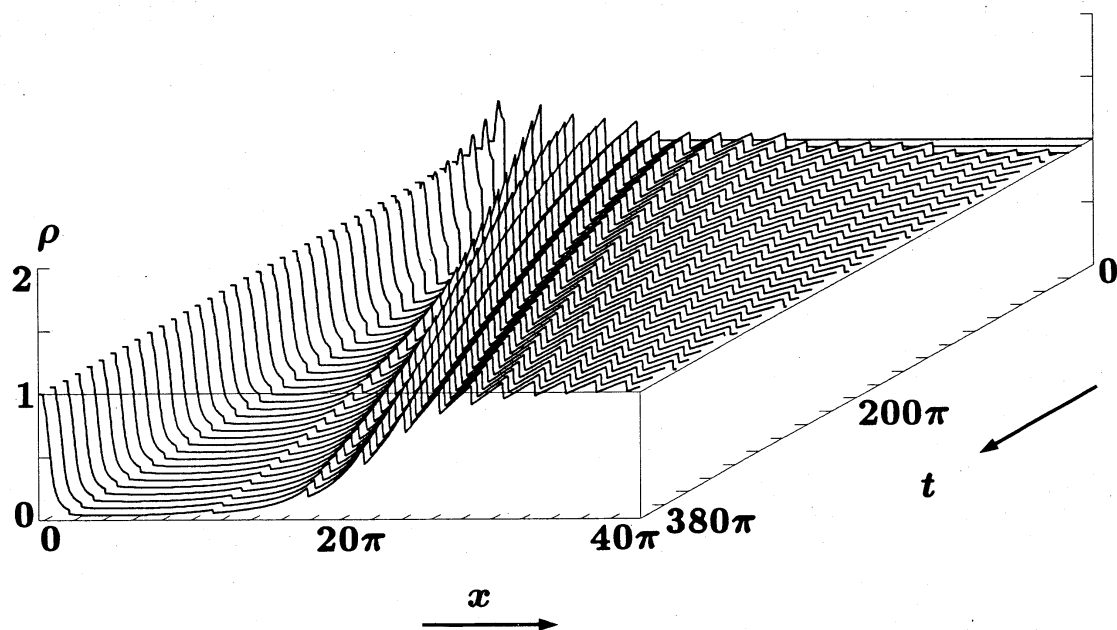


図 4(a). 平板近傍における密度波形の時間発展

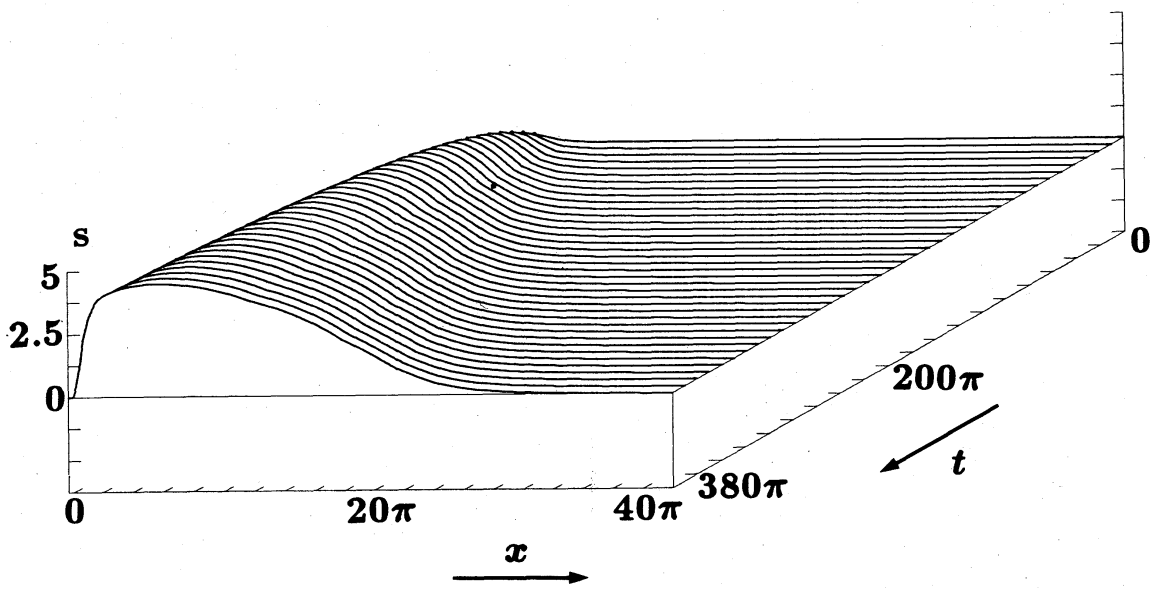


図 4(b). 平板近傍におけるエントロピー分布の時間発展

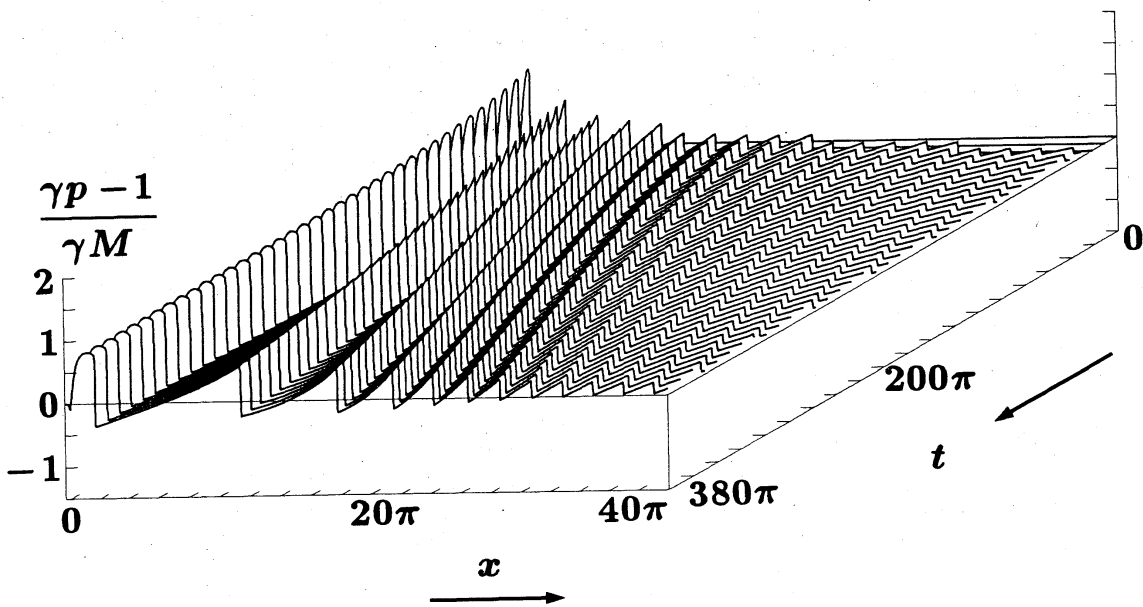


図 4(c). 平板近傍における圧力波形の時間発展

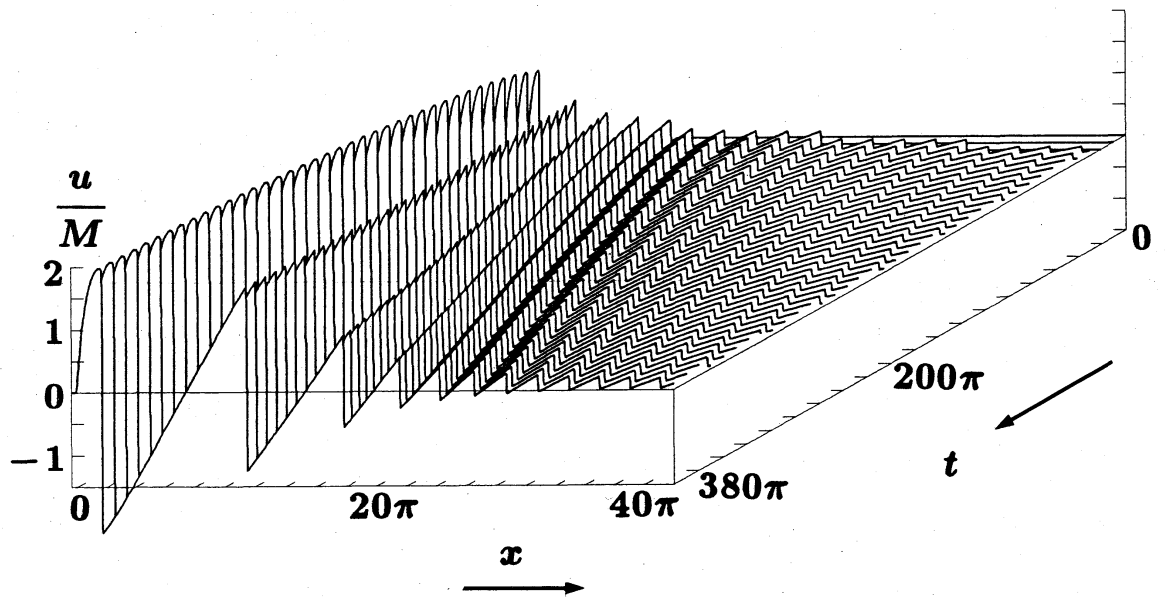


図 4(d). 平板近傍における速度波形の時間発展

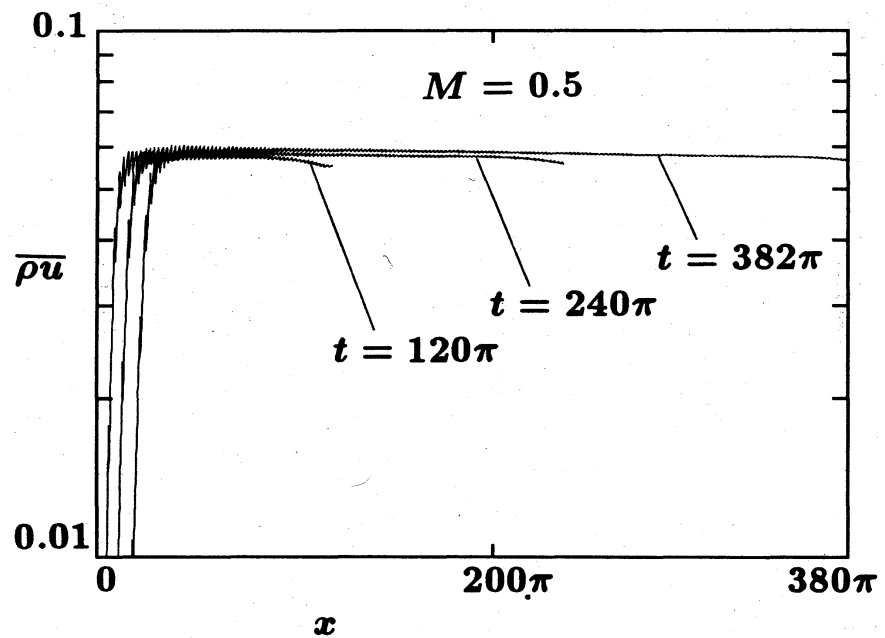


図 5. 音響流の分布

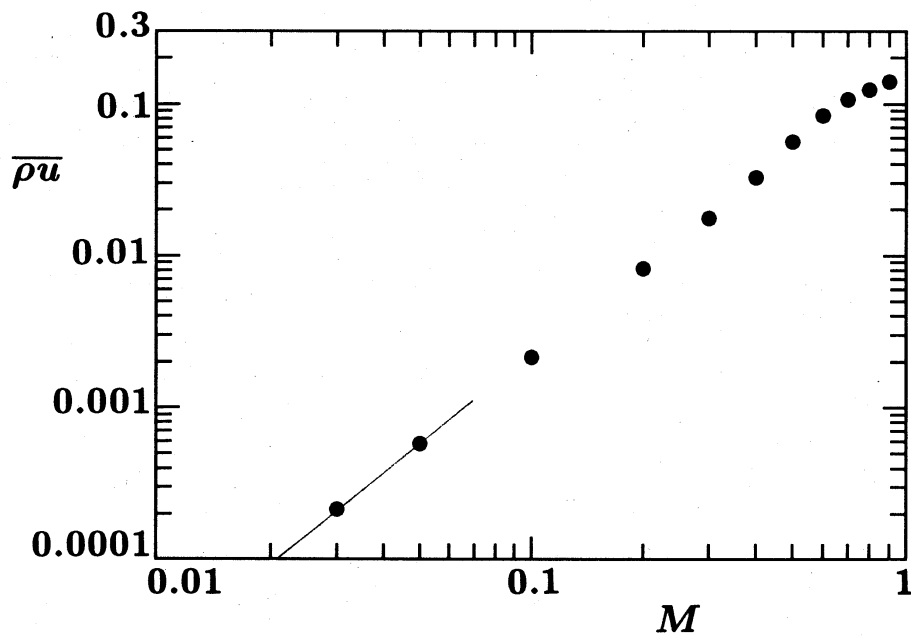


図 6. 音響流 $\overline{\rho u}$ の M 依存性

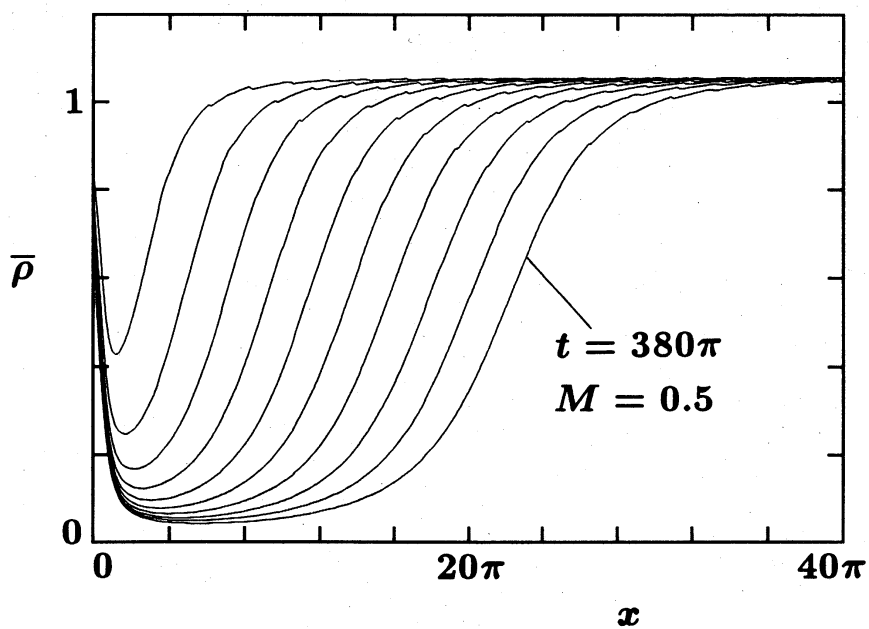


図 7(a). 平板近傍における平均密度の時間変化

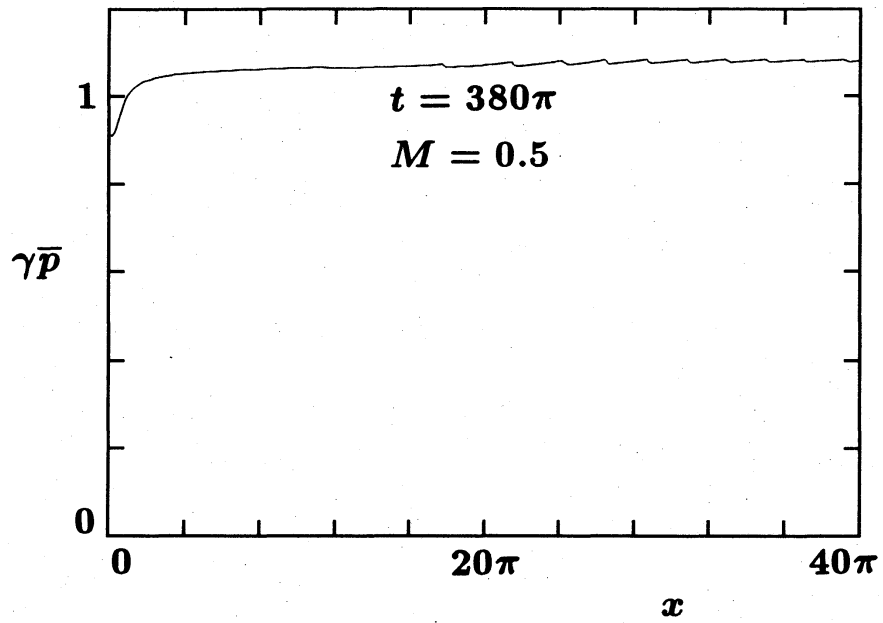


図 7(b). 平板近傍における平均圧力

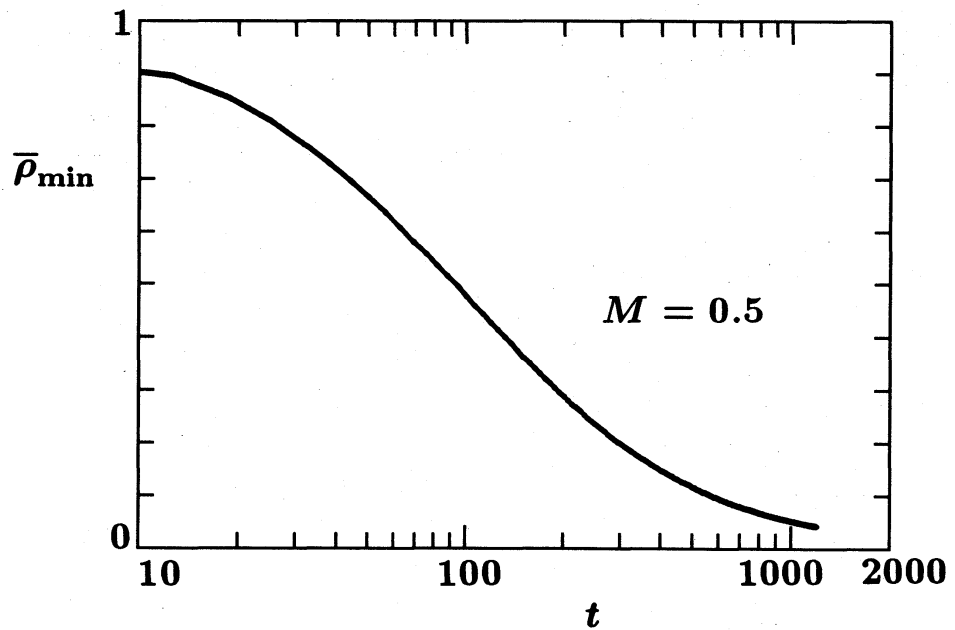


図 8. 平均密度の最小値 $\bar{\rho}_{\min}$ の時間変化

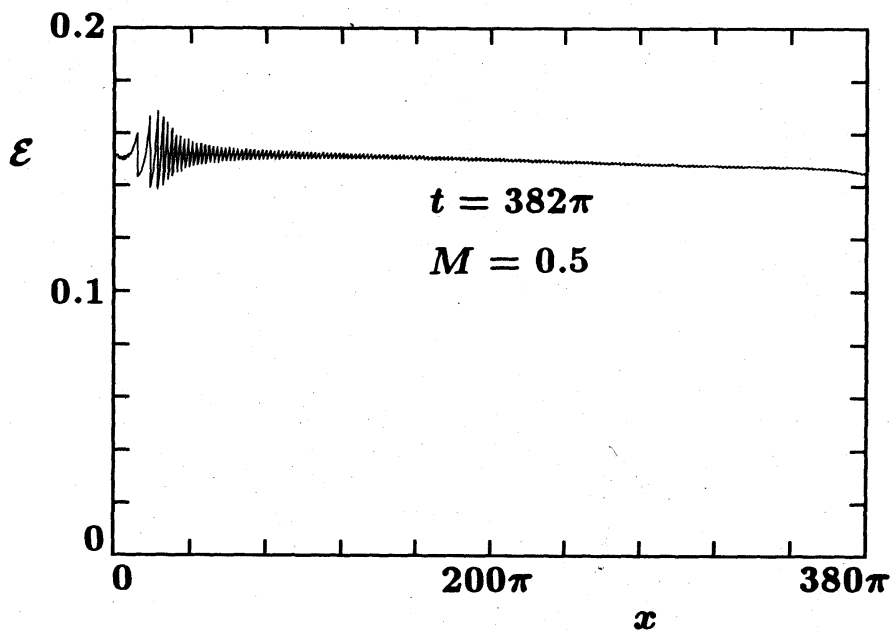


図 9. 平均のエネルギー流束密度の分布

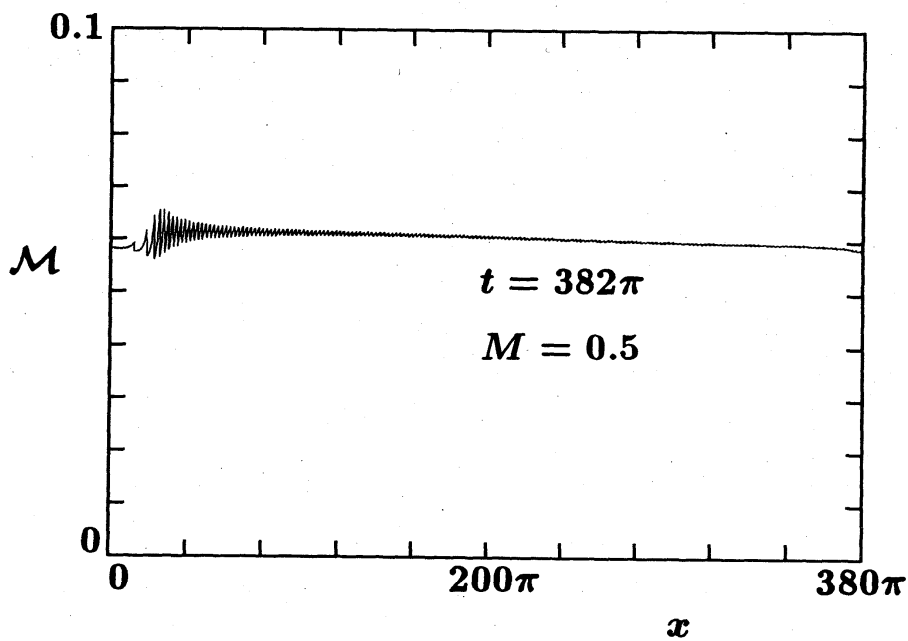


図 10. 平均の運動量流束密度の分布