

河川早瀬に生じる不安定波

Theoretical study of unstable waves in the rapids of the river

筑波大学・構造工学系 京藤敏達

H. Kyotoh: Institute of Engineering Mechanics, University of Tsukuba

The interesting phenomena of surface waves in the rapids of the river will be easily observed at the waterside. Particularly, it has been pointed out that only the periodic component of the waves generated at the rapids will propagate to the waterside of the down-stream pool. In order to elucidate their generating mechanisms, the simplified equations of motion, which involve the terms of the dispersion, Manning's resistance law and the eddy viscosity, are analysed by using perturbation methods and numerical calculations.

The linear and the nonlinear stability theory show that down-going waves become convectively unstable and their equilibrium amplitude does not exist at the low values of the roughness parameter. The critical Froude number Fr_{cr} and the corresponding frequency and wavenumber of unstable waves are also determined as a function of the roughness parameter. In addition, it is revealed that the scaling of the KdV-type, which is the long-wave approximation, yields also the KdV equation, but its dispersion term comes from the eddy viscosity and its solution expresses the kinematic wave. Furthermore, the waves induced by the bottom topography, whose slope is given by a sinusoidal or a step function, will be investigated numerically by spectral methods.

Keywords: the rapids, waves, bottom topography, perturbation methods

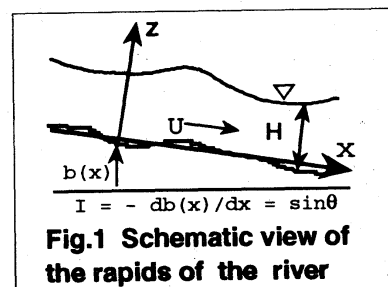
1. まえがき

河川水辺の水面波現象や都市の水空間の創出に際しての学問的な理解は、環境問題に対する興味の高まりとともにより一層要求されている。同時に、これらに関わる現象は複雑であるが、人々の心に安らぎを与え

るものである。例えば、河川早瀬で励起される水面波、噴水の水滴が水面を打つ際にできる水面変動、滝から落ちる流れなど研究テーマは多彩である。

本論文では、河川早瀬に生じる不安定波を非線形波動理論の観点から次の点に着目して調べる。

- (1) 非線形性，分散性，マンシングの抵抗則，渦粘性が表面波の安定性にどう影響するか？
- (2) 波が流れに乗っている系では，外乱は絶対不安定ではなく移流型不安定となり下流に伝播するにつれ増幅する．そのような系で起きる現象の特徴は何か？
- (3) 底面変化や底面粗度によって水面変動がどのようなになるか？



2. 基礎方程式

基礎方程式は水深方向に積分した質量および運動量の保存則である。解析を整理するために等流水深 hn および等流流速 Un を用いて無次元化($H \rightarrow hn H$, $U \rightarrow Un U$, $w \rightarrow Un w$, $x \rightarrow hn x$, $t \rightarrow t hn / (g hn)^{1/2}$)を行った。

$$\text{afr} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} = 0, \quad \text{afr} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -P_{xav} - Mn \left(\frac{U^2}{R^3} - \frac{I}{I_0} \right) + C_s \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad \text{afr} = \frac{1}{Fr}, \quad Fr = \frac{Un}{\sqrt{ghn}}, \quad Mn = \frac{gn^2}{hn^3} \quad (1)$$

ここで、 t は時間、 x は流下方向にとった座標、 H は水深、 U は断面平均流速、 ρ は流体の密度、 p_{xav} は x 方向の圧力勾配の断面平均、 g は重力加速度、 n はマンシングの粗度係数、 R は径深、 I は底面勾配で $I = \sin\theta = -db(x)/dx$ 、等流条件から $I_0 = MnFr^2$ 、運動量式の最後の項は乱流による運動量の法線方向応力を拡散係数を使ってモデル化したものである。また、本論文では長方形の幅広水路を対象とし $R = H$ 、運動量補正係数を1とする。拡散係数の値を概算するためSmagorinskyの渦粘性の式 $\zeta_s = C_s \Delta^2 |S_{ij}| \doteq C_s hn Un$ 、 $C_s = 0.003$ を用いるが、この値はオーダとしては意味があるが正確なものではない。

さらに、河川早瀬の波は波頂曲率を無視できないため、圧力は静水圧とはならない。

$$P_{xav} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} dz, \quad P = - \int_H^z \left(afr \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + afr^2 \right) dz, \quad w = \frac{z}{H} \left(afr \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (2)$$

ここで、 w は非粘性流体の底面条件および表面の運動学的条件を満たすように決められている。

3. 線形解析

3.1 線形安定性

底面勾配が一定の水路に等流状態の流れがあるとき、その安定性を調べる。式(1)に

$$H = 1 + \epsilon hf(t, x), \quad U = 1 + \epsilon Uf(t, x), \quad hf(t, x) = Ah \exp(ikx + rt), \quad Uf(t, x) = AU \exp(ikx + rt) \quad (3)$$

を代入し、摂動パラメータ ϵ が小さいとして可解条件を求めると固有値方程式

$$-afr^2 \left(1 + \frac{k^2}{3} \right) r^2 - afr \left(\frac{2i}{3} k^3 + C_s k^2 + 2ik + 2Mn \right) + \frac{k^4}{3} - iC_s k^3 + (1 - afr^2) k^2 - \frac{10i}{3} Mn k = 0 \quad (4)$$

を得る。ここで、 k は空間波数、 r は時間増幅を表すパラメータ、 i は虚数単位である。上式を r の2次方程式とみると、その2根はそれぞれ遡上波と流下波に対応し、遡上波はすべてのフルード数のもとで減衰し、流下波は増幅率が0となる臨界点を持つ。すなわち、空間周期的な外乱の時間増幅率が0となる中立安定曲線の臨界点での各パラメータの値は以下のようなになる。

$$afr_{cr} = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{3Mn^2}{C_s(2Mn - 3C_s)}}, \quad k_{cr} = \sqrt{\frac{2(Mn - 3C_s)}{C_s}}, \quad \text{Im}[r] = -\frac{k_{cr}(10Mn + 3C_s k_{cr}^2)}{3afr_{cr}(2Mn + C_s k_{cr}^2)} \quad (5)$$

上式から臨界フルード数が存在するためには $Mn > 3C_s$ が必要であり、乱流拡散を考慮しない場合 ($C_s = 0$) にはすべてのフルード数で不安定になることが分かる。

3.2 絶対不安定・移流型不安定¹⁾

さて、フルード数が臨界点を越えた領域で流下波が絶対不安定か移流

型不安定かを調べよう。ここで、絶対不安定とは静止座標系の固定点から見て攪乱が増幅するとき、移流型不安定とは同様に観察したとき攪乱が流れていってしまい固定点では増幅せず下流で増幅する場合を言う。式(4)から、流下波の分散関係式は

$$r(k) = \frac{-2ik^3 - 3C_s k^2 - 6ik - 6Mn + \sqrt{(9C_s^2 - 12afr^2)k^4 - 16iMnk^3 + 36(MnC_s - afr^2)k^2 - 48iMnk + 36Mn^2}}{2afr(3+k^2)} \quad (6)$$

で与えられる。ところで、臨界点近傍で式(6)を次のように近似することができる。

$$r(k) \cong r(k_{cr}) + (k - k_{cr}) \frac{\partial r}{\partial k}(k_{cr}) + \frac{(k - k_{cr})^2}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial k^2}(k_{cr}) + (Fr - Fr_{cr}) \frac{\partial r}{\partial Fr}(k_{cr}) \quad (7)$$

ただし、 r の値は $Fr = Fr_{cr}$ で評価されている。上式は、臨界点を僅かに越えた領域で $r(k)$ の実数部 $\text{Re}[r(k)]$ を二次曲線で近似し、虚数部 $\text{Im}[r(k)]$ を一次曲線で近似することになり、

$$\text{Re}[r(k)] = -a(k - k_{cr})^2 + b, \quad \text{Im}[r(k)] = a + bk \quad (8)$$

と置くことができる。不安定領域では $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 流下波の場合には $b < 0$ である。 $t = 0$ で $x = 0$ に δ -関数で局在した外乱の $x = ct$ における時間発展は次の積分で評価することができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikCt + r(k)t) dk \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp \left[\left\{ \beta - \frac{(b+C)^2}{4\alpha} \right\} t + i \{ a + (b+C)k_{cr} \} t \right] \quad (9)$$

十分時間が経過したあとに外乱が成長するためには、 $\beta - (b + c)^2 / (4\alpha) > 0$ が必要である。 $c = 0$ で上式が成立すれば絶対不安定、成立しなければ移流型不安定である。この論文で示すパラメータ領域では移流型不安定となることが、式(8)を数値的に求めることによって確かめられる。

4. 非線形安定性理論

4.1 ランダウ方程式

線形段階で不安定となったモードは振幅が増大し、非線形項と釣り合

うようになる。弱非線形理論を用いてこの現象を解析する。まず、フルード数が臨界値から僅かに大きくなったとき、線形理論で求めた不安定モードの長時間発展を調べる。よく知られているように、この場合には緩やかな時間スケールの変化率と振幅の3次のオーダーの項が釣り合うため、解を以下のように仮定することができる。

$$\begin{aligned}
 H &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} hf_n(t, x), \quad U = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} Uf_n(t, x) \\
 hf_1(t, x) &= Ah_1(t_1, t_2) \exp(ikx - ist) + \text{c.c.}, \quad Uf_1(t, x) = AU_1(t_1, t_2) \exp(ikx - ist) + \text{c.c.}, \\
 hf_2(t, x) &= hf_{20}(t_1, t_2) + \{hf_{21}(t_1, t_2) \exp(2ikx - 2ist) + \text{c.c.}\}, \\
 Uf_2(t, x) &= Uf_{20}(t_1, t_2) + \{Uf_{21}(t_1, t_2) \exp(2ikx - 2ist) + \text{c.c.}\} \\
 Fr &= Fr_{cr} + \varepsilon^2 Fr_1, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \quad \dots (10)
 \end{aligned}$$

ここで、"c.c."はその左辺の項の複素複素共役を意味し、 $s = -\text{Im}[r(k_{cr})]$ 、 $k = k_{cr}$ である。2次オーダーの解 $hf_2(t, x)$ 、 $Uf_2(t, x)$ に一般解が考慮されていないのは、3次オーダーの解を求める際の可解条件にこの一般解が関与しないためである。まず、方程式(1)に上記の摂動解を代入すると各オーダーの方程式は、主部が同じで外力項 F_{cn} 、 F_{mn} を持った同型の方程式となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Fr_{cr}} \frac{\partial hf_n}{\partial t} + \frac{\partial hf_n}{\partial x} + \frac{\partial Uf_n}{\partial x} &= F_{cn} \\
 \frac{1}{Fr_{cr}} \frac{\partial Uf_n}{\partial t} + \frac{\partial Uf_n}{\partial x} + Mn \left(2Uf_n - \frac{4}{3} hf_n \right) + \frac{1}{Fr_{cr}^2} \frac{\partial hf_n}{\partial x} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 hf_n}{\partial x^3} + \frac{2}{Fr_{cr}} \frac{\partial^3 hf_n}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{Fr_{cr}^2} \frac{\partial^3 hf_n}{\partial t^2 \partial x} \right) &= F_{mn} \quad (11)
 \end{aligned}$$

上記の方程式が有界な解を持つ条件、すなわち微分方程式の可解条件は

$$ikF_{mn} - \left(Cs k^2 + ik + 2Mn - i \frac{s}{Fr} \right) F_{cn} = 0 \quad (12)$$

で与えられる。最終的に3次オーダーの方程式の可解条件からランダウ方程式が得られることがわかっているため、以下の記号処理はすべ

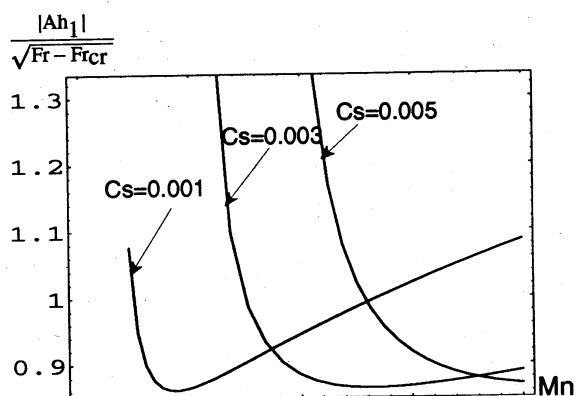


Fig.2.1 The equilibrium amplitudes obtained from the nonlinear stability theory

て数式処理ソフト(Mathematica)を用いて行ない、ここでは摂動計算の結果を述べる。

最終的に、ランダウ方程式

$$\frac{dAh_1}{dt_2} = a_1 Ah_1 + a_2 |Ah_1|^2 Ah_1, \quad \lim |Ah_1| = \sqrt{-\frac{\text{Re}[a_1]}{\text{Re}[a_2]}} \quad (13)$$

となり、係数 a_1, a_2 によって平衡振幅 $|Ah_1|$ が存在する場合と代数的に発散する場合がある(Fig. 2.1)。上式の係数 a_1 は式(7)の右辺最後の項と等しく、空間的な変調まで考慮すると

Ginzburg-Landau方程式

$$\frac{\partial Ah_1}{\partial t_2} = (Fr - Fr_{cr}) \frac{\partial r}{\partial Fr} (k_{cr}) Ah_1 - i \frac{\partial r}{\partial k} (k_{cr}) \frac{\partial Ah_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial k^2} (k_{cr}) \frac{\partial^2 Ah_1}{\partial x_1^2} + a_2 |Ah_1|^2 Ah_1 \quad (14)$$

が得られる。Ginzburg-Landau方程式の解はカオスから乱流に至る挙動を示すことが確認されている²⁾。とくに、上式はストークス型の厳密解

$$Ah_1 = Am \exp(iKx_1 - iSt_2), \quad -iS = (Fr - Fr_{cr}) \frac{\partial r}{\partial Fr} (k_{cr}) + K \frac{\partial r}{\partial k} (k_{cr}) + \frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 r}{\partial k^2} (k_{cr}) + a_2 Am^2 \quad (15)$$

を持つ。S, K, Amを実数として上の分散関係式を解き、Amを平衡振幅とすれば、臨界値を僅かに越えたときの周期波の波数および振動数が得られる(Fig.2.2)。

4.2 KdV方程式

KdV方程式と同じスケーリングをすれば、マンシングの抵抗則のもとでもKdV方程式が得られることを示す。まず、多重スケールの摂動法を用いて解を以下のように仮定する。

$$H = 1 + \epsilon^2 hf(t, x), \quad U = 1 + \epsilon^2 Uf(t, x)$$

$$hf(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} Ah_n(x_1, t_1, t_2, t_3), \quad Uf(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} AU_n(x_1, t_1, t_2, t_3), \quad x_1 = \epsilon x, t_1 = \epsilon t, t_2 = \epsilon^2 t, t_3 = \epsilon^3 t \quad (16)$$

各オーダの方程式はすべて同型であり、次式のように書くことができ

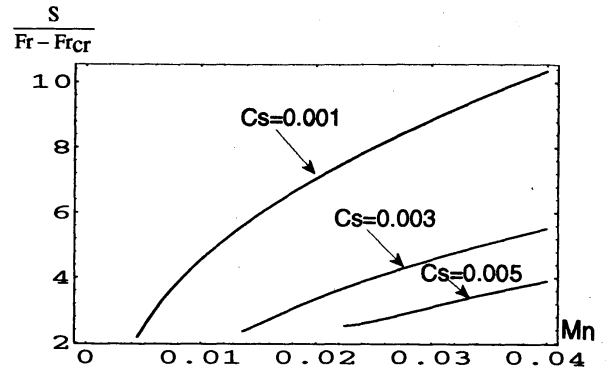


Fig.2.2 The frequency S for K=0 obtained from the nonlinear stability theory

る。

$$\frac{6}{Fr_{cr}} \frac{\partial Ah_n}{\partial t_1} + 6 \frac{\partial Ah_n}{\partial x_1} + 6 \frac{\partial AU_n}{\partial x_1} = Fc_n, \quad 4Mn \left(AU_n - \frac{2}{3} Ah_n \right) = Fm_n \quad (17)$$

先程と同様に有界な解が存在するための可解条件は、

$$Fc_n - \frac{3}{2Mn} \frac{\partial}{\partial x_1} Fm_n = 0 \quad (18)$$

で与えられ、2次オーダの可解条件はKdV方程式

$$\frac{\partial Ah_0}{\partial t_2} + \frac{5}{3} Fr_1 \frac{\partial Ah_0}{\partial x_1} + \frac{9}{5} Ah_0 \frac{\partial Ah_0}{\partial x_1} + \frac{1}{10} \frac{\partial^3 Ah_0}{\partial x_1^3} = 0 \quad (19)$$

を与える。ここで、 $Fr_{cr} = 3/2$, $Mn = 3C_s$ を用いた。このKdV方程式は高粘性流体の表面波の方程式と同様なものであり、ポテンシャル流中の水面波と比較すると以下の点が異なっている。

- ・時間微分項は運動学的条件式から出ており、kinematic wave である。
- ・分散項が乱流拡散項から出ている。

さらに、緩やかな底面変化がある場合には、底面形状を $z = b(x)$ と置くと

$$I = -\frac{db(x)}{dx} = I_0 - \varepsilon^2 bx(x_1) \quad (20)$$

ここで、 $bx(x_1)$ は一定勾配からのずれであり、KdV方程式の各項と釣り合うように ε^4 のオーダの項となっている。さて、運動量の方程式にこの項を付加して摂動計算をすると外力項を持ったKdV方程式が得られる。

$$\frac{\partial Ah_0}{\partial t_2} + \frac{5}{3} Fr_1 \frac{\partial Ah_0}{\partial x_1} + \frac{9}{5} Ah_0 \frac{\partial Ah_0}{\partial x_1} + \frac{1}{10} \frac{\partial^3 Ah_0}{\partial x_1^3} = \frac{9}{20I_0} \frac{d^2 b}{dx_1^2} \quad (21)$$

上記の方程式は、ポテンシャル流中を外乱が移動するときに引き起こされる水面波の方程式と外力項の入り方が異なっていることに注意を要する。また、乱流状態にある河川では遡上波ではなく流下波が不安定となりソリトンを生成すると考えられ、物体の移動によって造波されるソリトンと異なることに注意する3)。

5. 2次の非線形偏微分方程式によるシミュレーション

等流解からのずれを波形勾配の2次のオーダまで考慮した方程式を用

いて、底面変化がある場合に生成される水面波を数値的に調べる。2次のオーダーまでの精度をもつ方程式は3次のオーダーの誤差を許容しており変調不安定については議論できないが、フルード数が臨界値よりも小さい流れが底面変化によって受ける影響を調べることはできる。実際の早瀬では平均流速から計算したフルード数が0.5ぐらいいでも底面からの外乱によって水面波が生じており⁴⁾、底面変化によって波動が生成・伝播しているものと考えられる。

5.2 底面変化があるときの水面形

底面勾配がステップ状もしくは空間周期的に変化するときの水面形を次の点に着目して検討する。

- ・定常流の水面形がフルード数によってどのように変化するか。
- ・初期値 $hf(t, x)=0$, $Uf(t, x)=0$ から出発すると定常解に収束する場合と底面変化によって波が誘起される場合がある。誘起される波の性質を適当なフルード数およびマニングの係数のもとで数値的に調べる。

5.2.1 定常流の水面形

まず底面勾配が一定値 I_0 から僅かにずれて単振動しているとして、式(20)の底面勾配を表す式で $bx(x) = a_m k_b I_0 \cos(k_b x)$ と置く。 a_m が小さいとしてその2次のオーダーまでの解を求めると以下のようなになる。

$$H = 1 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots, \quad U = \frac{1}{H}, \quad h_1 = Ah \exp(ik_b x) + c.c., \quad h_2 = Ag_0 + (Ag_2 \exp(2ik_b x) + c.c.)$$

$$Ah = \frac{3afr^2 a_m k_b}{2\{ik_b^3 + 3C_s k_b^2 + 3i(1 - afr^2)k_b + 10Mn\}}$$

$$Ag_0 = \frac{2|Ah_1|^2 (65Mn + 9C_s k_b^2)}{15Mn}, \quad Ag_2 = \frac{Ah^2 (9ik_b^3 + 27C_s k_b^2 + 27ik_b + 65Mn)}{3\{4ik_b^3 + 6C_s k_b^2 + 3i(1 - afr^2)k_b + 5Mn\}} \quad (22)$$

ただし、摂動に際して流量が一定となるように空間定数項を決めた。さて、第一近似の解を使って底面変動と水位変動の位相差を求め、水面形を定性的に調べる。底面の位相を0とすると水位の位相 ϕ_s は、

$$\phi_s = \phi + \frac{\pi}{2}, \quad \tan \phi = \frac{k_b (3afr^2 - 3 - k_b^2)}{3C_s k_b^2 + 10Mn} \quad (23)$$

で与えられる。Bresseの式では、 $\phi_s=0$ のとき射流、 $\phi_s=\pi$ のとき常流となるため、その臨界点として $\phi=0$ をとると $k_b^2 = 3(1 - Fr^2)/Fr^2$ である。底面形と水面形の位相差は k_b やフルード数によって連続的に変わるため定常流の水面形で常流・射流を明確に区別することはできない。

とくに底面形が様々なスペクトルの合成で表され、それらの振幅 a_m が一定のとき、水面の増幅率:(定在波振幅/ a_m)の最大値を与える波数 k_b が存在する。河川早瀬の定在波の波長とこの k_b の間には何らかの相関があると考えられる。

5.2.2 数値実験

底面勾配が一定ではなく変化するとき、表面波が生成される場合と定常流の水面形に時間とともに漸近する場合とがある。ここでは、底面変動の波長を底面が平らなときの不安定波の波長に固定し、粗度に関するパラメータ Mn およびフルード数 Fr の値によって水面波にどのような差異が現れるかを調べた。計算は解を空間フーリエ級数展開し、その係数の時間発展をルンゲ・クッタ法で求めた。

5.2.2.1 底面勾配が空間周期的に変化するとき

底面変動の波数は、 Mn および c_s を固定したときの水面の不安定波の臨界波数 k_{cr} とした。また、底面勾配の変動の最大振幅は平均勾配 $I_0 = Mn Fr^2$ の a_l 倍とした。さらに、空間モードの数 N は収束性が保たれるように選んである。Fig.3.1, 3.2, 3.3, 3.4 の(a),(b),(c),(d)は、(a)流速変動の空間平均の時間発展、(b)水位の空間波形の時間発展、(c)水位変動の1次の空間モードの時間発展と(d)対応するスペクトルを示したものである。流速の空間平均値 $Uf(0)$ が時間的に変動する理由は、運動量方程式が保存形ではないためである。 $Mn=0.02$ の場合の空間平均流速は時間変動が激しく安定状態が存在しないように思われる(Fig.3.3(a), Fig.3.4(a))。いずれも、水面波は振幅を変化させながら下流に伝播している(Fig.3.1(b) ~ Fig.3.4(b))。また、 $Fr=0.8Fr_{cr}$ のときには、水面波の振動数は線形理論の予測値に近い値をとる。

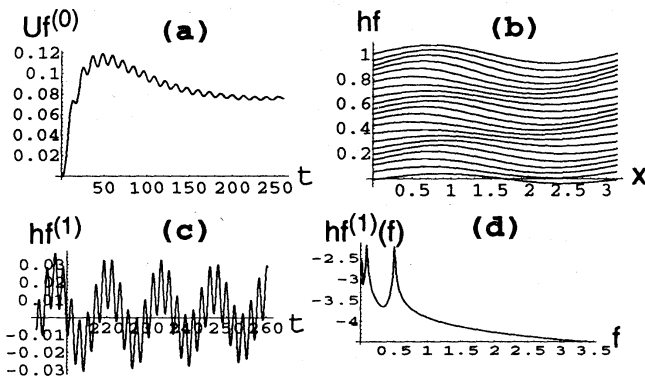


Fig.3.1 $Mn=0.015, Fr=0.4Fr_{cr}, L=L_{cr}$

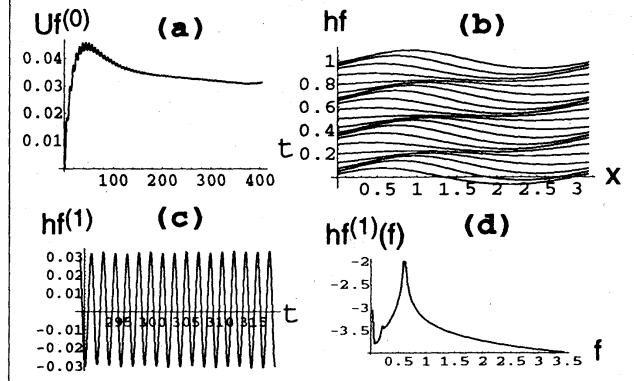


Fig.3.2 $Mn=0.015, Fr=0.8Fr_{cr}, L=L_{cr}$

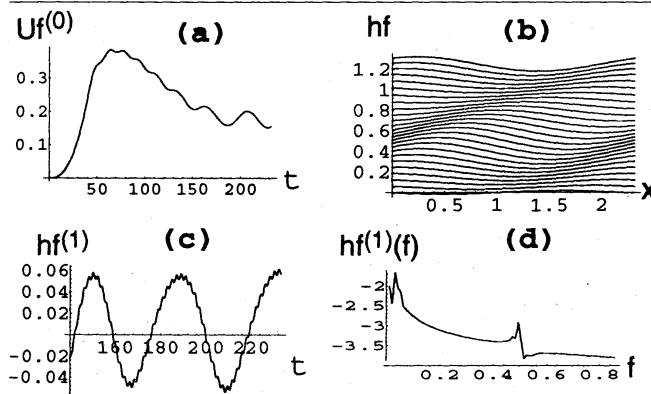


Fig.3.3 $Mn=0.02, Fr=0.4Fr_{cr}, L=L_{cr}$

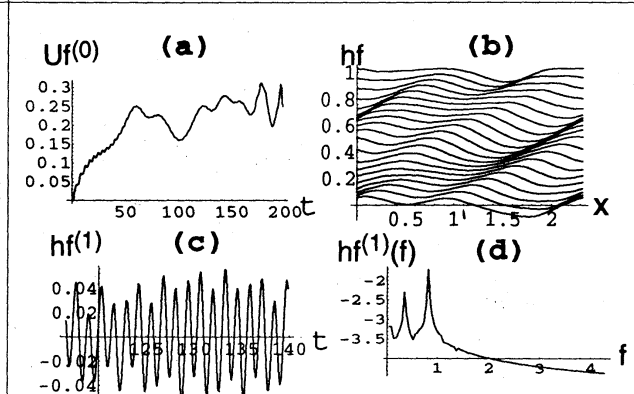


Fig.3.4 $Mn=0.02, Fr=0.8Fr_{cr}, L=L_{cr}$

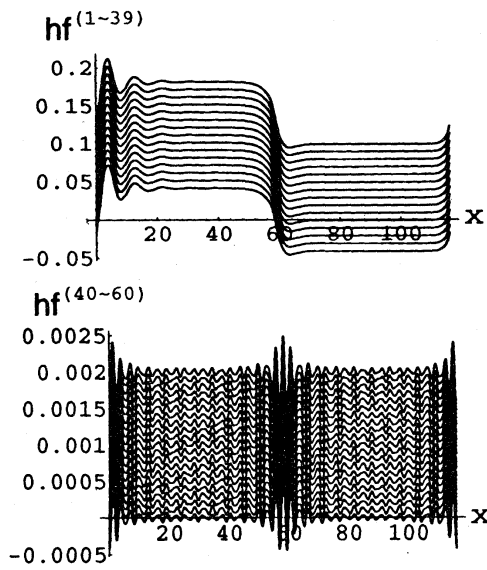
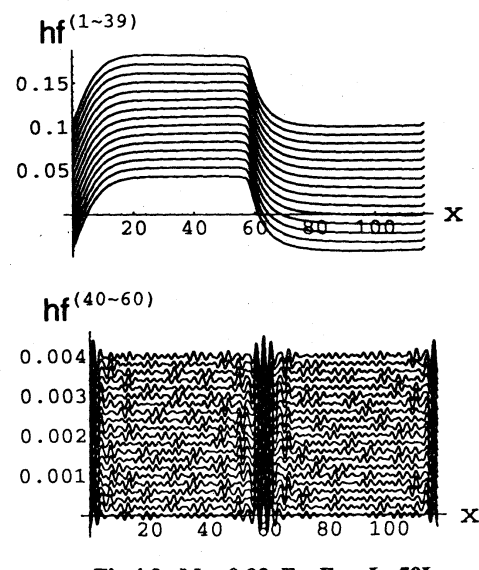
Fig.3.1, 3.2, 3.3, 3.4 The waves induced by the bottom topography : $bx(x)=a \ell_0 \cos(k_{cr}x)$

(a) spatial averaged velocity: $Uf(0)$, (b) wave profiles: hf , (c) first order Fourier mode of $hf(t,x)$: $hf(1)$, (d) corresponding spectrum: $hf(1)(f)$.

5.2.2.2 底面勾配がステップ状に変化するとき

河川早瀬の水面波が移流型不安定であることから、水面波が不安定となる勾配が一部存在しても流れ場が線形不安定となるとは限らない。ここでは、安定勾配と不安定勾配が交互に繰り返す一様水路の水面波の数値計算結果について述べる。

Fig.4.2は不安定勾配を含んだ斜面であり、斜面長は不安定波長の50倍であるから50番目の空間モードを中心に線形不安定が起きていると予想される。Fig.4.1, 4.2で $hf(1\sim39)$ は空間モード m が1から39まで、 $hf(40\sim60)$ は40から60までを合成した水位の時間変化をプロットしたものである。Fig.4.2から攪乱が流下方向に伝播していることがわかる。

Fig.4.1 $Mn=0.02, Fr=0.8Fr_{cr}, L=50L_{cr}$ Fig.4.2 $Mn=0.02, Fr=Fr_{cr}, L=50L_{cr}$ Fig.4.1, 4.2 Waves induced by the bottom topography: $b_x(x) = \sum a_m I_0 \cos(m k_{cr} x/50)$

6. まとめ

河川早瀬に生じる波を非線形波動理論から調べた。基礎方程式中に入る経験的なパラメータを実験および実測を通して定量化することが最大の課題である。

参考文献

- (1) Huerre, P. and P. A. Monkewitz : Local and global instabilities in spatially developing flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, V.22, pp. 473-537, 1990.
- (2) Deissler, R. J.: Noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation, *J. Statistical Phys.*, V.40, N.3/4, pp. 371-395, 1985.
- (3) Wu, T. Y. : Generation of upstream-advancing solitons by moving disturbances, *J. Fluid Mech.*, V.184, pp. 75-99, 1987.
- (4) 福島雅紀, 京藤敏達 : 河川の流体力学的観察, 第48回土木学会年講概要集, pp.480-481, 1993.