数理解析研究所講究録
第 866 巻 1994 年 209-220

非線形変調波の周波数低下

九大・総理工, 加藤 由紀 (KATO Yuki)
九大・応力研, 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)
九大・応力研, 及川 正行 (OIKAWA Masayuki)

Stokes 波の長時間発展において, 初期波列の波形勾配が大きい場合は, 側帯波不安定を経た後, 波の中心周波数が低下する. 講演では, 周波数低下を説明するために, 弱非線形のポテンシャル理論をもとにしたモデルを紹介した.

§1. 周波数低下とは, どういう現象か?

2 次元深水波における有限振幅の一様波列, 即ち Stokes 波は, 側帯波擾乱にたいして不安定である. 実験 [1][2] によると, 一様波列の波形勾配が充分小さい場合は, 初期波列の周波数より少し上下にずれた周波数成分 (側帯波) が成長し, その後初期波列と同様の一様波列に回帰する. この側帯波の成長は, 側帯波不安定, 或いは Benjamin-Feir 不安定と呼ばれる.

波形勾配がある程度より大きい場合は, 上下側帯波のうち下側帯波の方が大きく発展した後, 中心周波数が初期波列の周波数より低い波列に回帰する. 回帰に伴って周波数が低下する場合には, 変調が激しいときに, 小さいスケールの砕波 (spilling breaker) や表面張力波が確認されている [1]. やや幅の広い水槽を使った実験 [3] の場合は, 砕波が起る段階で波は 3 次元的になるが, 変調がおさまると再び 2 次元化し, 中心周波数が初期波列の周波数より低い, 波群のようなものを形成する.

この実験のように, 3 次元的不安定を含むような発展における

周波数低下は, 2次元的な実験と同じ扱いをするべきでないと考える人もいるだろう. しかし, 3次元的不安定が起きているが,砕波は起きていないという, 3次元性が本質的であるような,周波数低下の実験は今のところない. また, 今回の講演では, 周波数低下をひきおこす機構の詳細を追求するのではなく, 2次元非回転, 弱非線形の枠内に, それらの仮定に反するものを, むりやり取り入れた方程式を扱った. このような理由から, 3次元的不安定を含むような発展も, 並べて紹介した.

今回の講演では,「初期の波形勾配が大きい2次元的な波列が, 変調不安定によって, 砕波や場合によっては3次元的不安定を起し, 変調がおさまったときには, 中心周波数が低い2次元的な波になる.」ことを, 周波数低下の定義としている.

§2. 弱非線形のポテンシャル理論

深水波のゆっくりとした変調は波形勾配の3次までの近似では, 非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) で記述される [4]. NLS によると, 初期に一様波列を与えると, 上下側帯波が等しく成長し, その後初期波列へ回帰する [1]. NLS は空間反転にたいして不変であるから, 対称な初期値は非対称に発展しない.

上下側帯波の非対称発展は, 波形勾配の4次まで取り入れた Dysthe 方程式で説明できる. Dysthe 方程式によると, 波形勾配が小さいときには, 下側帯波のエネルギーはいったん上側帯波より大きくなるが, その後減少し, 初期波列に回帰する [5]. 波形勾配が大きいときには, 多くの不安定波数が同程度のエネルギーを持ち, 一様波列へは回帰しない [6].

以上のように, 波形勾配の4次までの弱非線形理論では, 上下側帯波の非対称発展と初期波列への回帰は説明できるが, 周波

数低下は説明できない．そこで，弱非線形のポテンシャル理論の方程式に，水面波の方程式から導いていない項を付け加えた方程式が提案されている．

例えば，内山と川原 [7] は光パルスの伝播方程式において，遅延ラマン効果を表す項が，周波数低下を起すことを示した．ただし，このモデルは，線形不安定な波数に上限がないという欠点を持っている．また，Trulsen と Dysthe[6] は，局所的な波形勾配がある臨界値を超えたとき，一定の緩和時間で波形勾配が臨界値まで戻るような散逸項を，Dysthe 方程式に付加する事によって，砕波をモデル化し，周波数低下を引き起すことができた．このような局所的散逸項によって周波数低下が起る理由として，彼等は，散逸項が効くような波形勾配の大きい場所には，高波数成分が集中しているからだと説明している．

§3. 変形 Dysthe 方程式

本講演では，次式を用いて，前章に示した方程式とは異なる非局所的な散逸項によっても，周波数低下が起ることを示した．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \tau} + i\gamma^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i\,|A|^2\,A \\
+\;& 8\epsilon\gamma\,|A|^2\,\frac{\partial A}{\partial \xi} + 2i\epsilon\gamma(1+i\beta)A\mathcal{H}\{\frac{\partial |A|^2}{\partial \xi}\} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

この式は，包絡波 $A(\xi,\tau)$ の発展を表す． ξとτは，縮ませた無次元時間と無次元距離だが，方程式の形から，以下ではξを’空間’，τを’時間’ と呼ぶ．現実の時間 t と距離 x との関係は

$$
\begin{cases}
\xi \equiv \epsilon\gamma(2kx - \omega t) \\
\tau \equiv \epsilon^2 kx
\end{cases}
\tag{2}
$$

である．ここで,k と ω は搬送波の波数と周波数，ϵ は初期波列の波形勾配，γ は ξ の値域を $(0,2\pi)$ に規格化するための定数である．β は正数である．(1) 式の $\mathcal{H}\{f(\xi)\}$ は，次式で定義される $f(\xi)$ のヒルベルト変換である．

$$\mathcal{H}\{f(\xi)\} \equiv \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\eta)}{\eta-\xi}d\eta \tag{3}$$

(1) 式において，βを含む項が付け加えた項で，この項が散逸項であることは後で示す．この式は，$\beta=0$ のとき Dysthe 方程式に一致する．付け加えた散逸項は，基礎方程式から導いたものではないが，Dysthe 方程式を導く際，ヒルベルト変換の部分は平均速度ポテンシャルの関数だったことから，物理的には波と平均流の相互作用に関係があると考えている．砕波は，変調が激しい時に振幅の大きい場所で起り，砕波によって失われた運動エネルギーの一部は，平均流へ入ると思われることから，平均流に関係した高次の散逸項によって周波数低下が起る可能性がある．以下，この式を変形 Dysthe 方程式と呼ぶことにする．

変形 Dysthe 方程式は，ξ に依らない一様波列解を持つが，その側帯波擾乱にたいする安定性は図 1のようになる．成長率は，β が大きいほど低くなっているが，Dysthe 方程式の場合と同様に不安定な波数に上限があり，定性的な変化はない．また，β が小さいときには，最大成長率をもつ擾乱の波数は，Dysthe 方程式と同じである．従って，このような方程式の変形によって，発展の初期段階に現れる側帯波不安定の様子は変らないと考えられる．

変形 Dysthe 方程式の散逸性は A が周期的であるか，或いは $\xi\to\pm\infty$ で充分速く 0 になると仮定すれば，容易に証明できる．ここでは，周期的な場合についてのみ証明しておく．

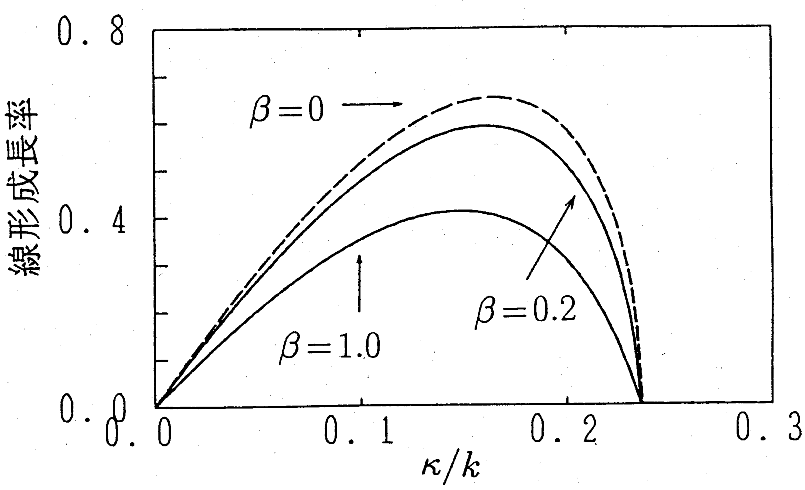

図 1: 線形安定性の一例. kは一様波列解の波数, κは擾乱の波数.

(1) $\times A^* +$ (1)$^* \times A$ (*は複素共役を示す) をξについて積分すると,

$$\frac{dI}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau}\int_0^{2\pi} |A|^2\, d\xi = 4\epsilon\gamma\beta \int_0^{2\pi} |A|^2\, \mathcal{H}\{\frac{\partial |A|^2}{\partial \xi}\} d\xi \tag{4}$$

となる. Aが周期的なので, $|A|^2$をフーリエ級数で

$$|A|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos\nu\xi + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu\xi \tag{5}$$

と表すと, ヒルベルト変換の公式

$$\begin{cases} \mathcal{H}\{\cos\nu\xi\} = -\sin\nu\xi \\ \mathcal{H}\{\sin\nu\xi\} = \cos\nu\xi \end{cases} \quad (\nu > 0)$$

を用いて

$$\mathcal{H}\{\frac{\partial |A|^2}{\partial \xi}\} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu \cos\nu\xi - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu \sin\nu\xi. \tag{6}$$

これらを用いて, (4) の積分を計算すると,

$$\frac{dI}{d\tau} = -4\pi\epsilon\gamma\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(a_\nu^2 + b_\nu^2) \ \leq\ 0. \tag{7}$$

従って, $\beta = 0$ なら保存的, $\beta > 0$ なら散逸的である. 特に, 高波数成分ほど, エネルギー散逸に対する寄与が大きいことがわかる.

§4. 数値計算の結果

数値計算の方法は Lo と Mei[5] に倣って, Split Step フーリエ法を使った. 空間ステップは $\Delta\xi = 2\pi/2N$, $N = 128$, 時間ステップは $\Delta\tau = 0.001$ とした. 数値的な不安定を抑えるため, 各時間ステップでフーリエ空間の高波数成分を強制的に 0 にした. そのときの打ち切り波数 ν_{tr} は, $|\nu_{tr}| \geq 3N/4$ である. 計算に使ったパラメーターは, $\epsilon = 0.23$, $\gamma = 0.229$, $\beta = 0 \sim 2.0$. γ の値は, 変調の一周期あたりの搬送波の波の数を 19 としたことに対応している.

初期値は,

$$A(\xi, 0) = a_0 + \sum_{\nu=-6\,(\nu\neq 0)}^{6} a_\nu\, e^{i\nu\xi} \tag{8}$$

$$a_0 = 1.021$$

$$a_\nu = 0.01\, \frac{1 + \epsilon\gamma\nu - \frac{3}{8}\epsilon^2 a_0^2}{1 - \frac{3}{2}\epsilon^2 a_0^2 - \epsilon^2\gamma^2\nu^2 + \frac{27}{64}\epsilon^4 a_0^4}\,.$$

これは, Trulsen と Dysthe が用いた初期値と同じであり, 一様波列に上下 6 個ずつの側帯波擾乱を加えたものであるが, このうち線形不安定な側帯波は $\nu = \pm 1 \sim \pm 4$ に対応する上下四個ずつの側帯波である. 最も不安定な擾乱は $\nu = \pm 3$ に対応する.

図 2は $\beta = 0$ の場合の各々の時刻での波形を, 図 3(a) は対応するエネルギー $I(\tau)$ の時間発展を, 図 3(b) はスペクトル成分の時間発展を描いた図である.

$\beta = 0$ では, 波列は側帯波不安定を経てその後回帰しない. 図は $\tau = 15$ までの結果だが, これ以上長い時間を計算しても, 1

つの波数が卓越するということはない．この結果は Trulsen と Dysthe の計算と一致する．スペクトル空間においては，$\tau = 8$ で，$\nu = 20$ くらいまで高波数が励起されて，その状態は $\tau = 15$ まで変らない．この場合保存的であるが，エネルギーは初期値の ±0.5%の範囲内で保存した．波形勾配が小さく，しかも不安定な波数が少ない初期値の場合には，初期値へ完全に回帰した．

$\beta = 0.2$ では，上下側帯波は非対称的に発展し，変調が小さくなる時刻 ($\tau = 12$) にはもともとの搬送波の成分は他の側帯波と同じレベルまで減衰し，線形理論で最も不安定な下側帯波 $\nu = -3$ が支配的になり，周波数低下が再現されている (図 4, 図 5)．エネルギーは変調が激しいときに急激に減って，$\tau = 15$ では初期値の 52%だった．より長い時間計算しても，下側帯波 $\nu = -3$ が支配的なまま安定だった．$\beta = 0$ のときと同様に，$\tau = 8$ で，$\nu = 20$ くらいまでの高波数成分が励起されるが，その後徐々に小さくなって，変調のおさまる時刻には，高波数成分はほとんどない．

$\beta = 1.0$ では，β が小さい場合に比べて，側帯波の成長が遅く，その成長率も低い (図 6, 図 7)．高波数成分はほとんど励起されない．エネルギーは搬送波のエネルギーが低下するのに応じて減っていき，$\tau = 15$ では初期値の 36%だった．

§5.　結論と考察

数値計算の結果，付け加えた散逸項はエネルギーを減少させた．ただし，パラメーター β の値によって，波の発展に与える影響は様々である．適当な値を選んでやれば，周波数低下が再現されるが，β が大きすぎると不安定波の発展が抑制される．

付け加えた項は高次の項であるから，基本的には，ある程度振幅が大きくならないと，効かないはずである．実際，β が小さい

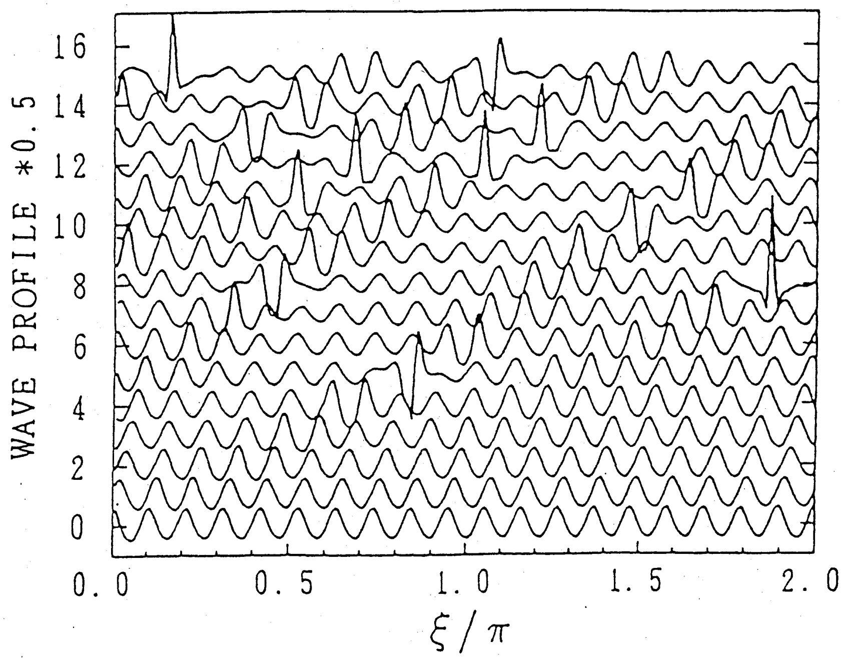

図 2: 波形の時間発展. 縦軸は時間 τ. $\beta = 0$.

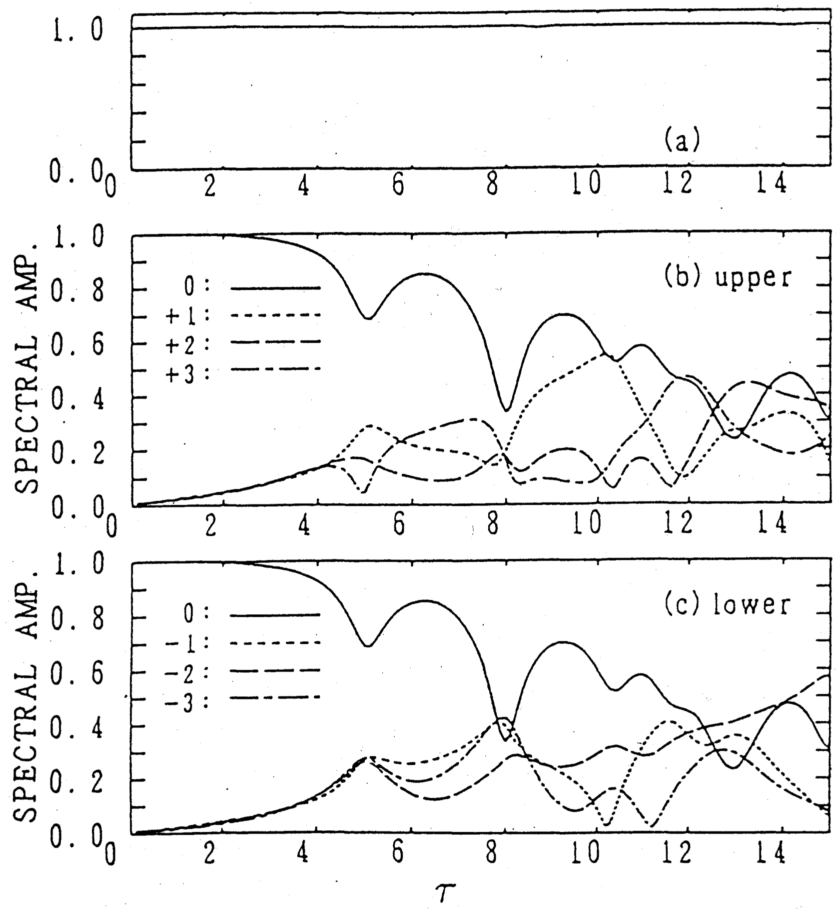

図 3: (a) エネルギー I と,(b) (c) スペクトル成分の時間発展. 0: 搬送波, +1, +2, +3: 上側帯波, −1, −2, −3: 下側帯波. $\beta = 0$.

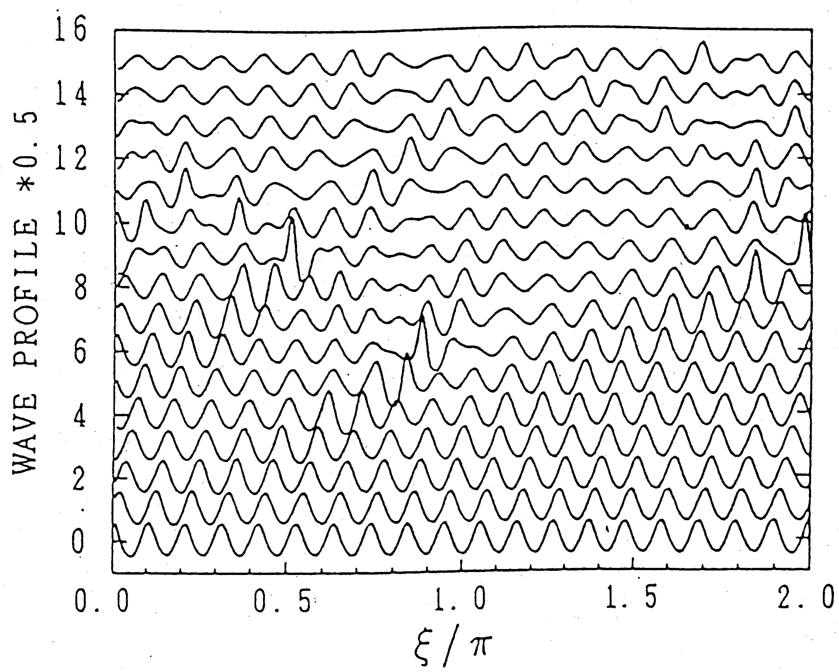

図 4: 図 2 と同じ. $\beta = 0.2$.

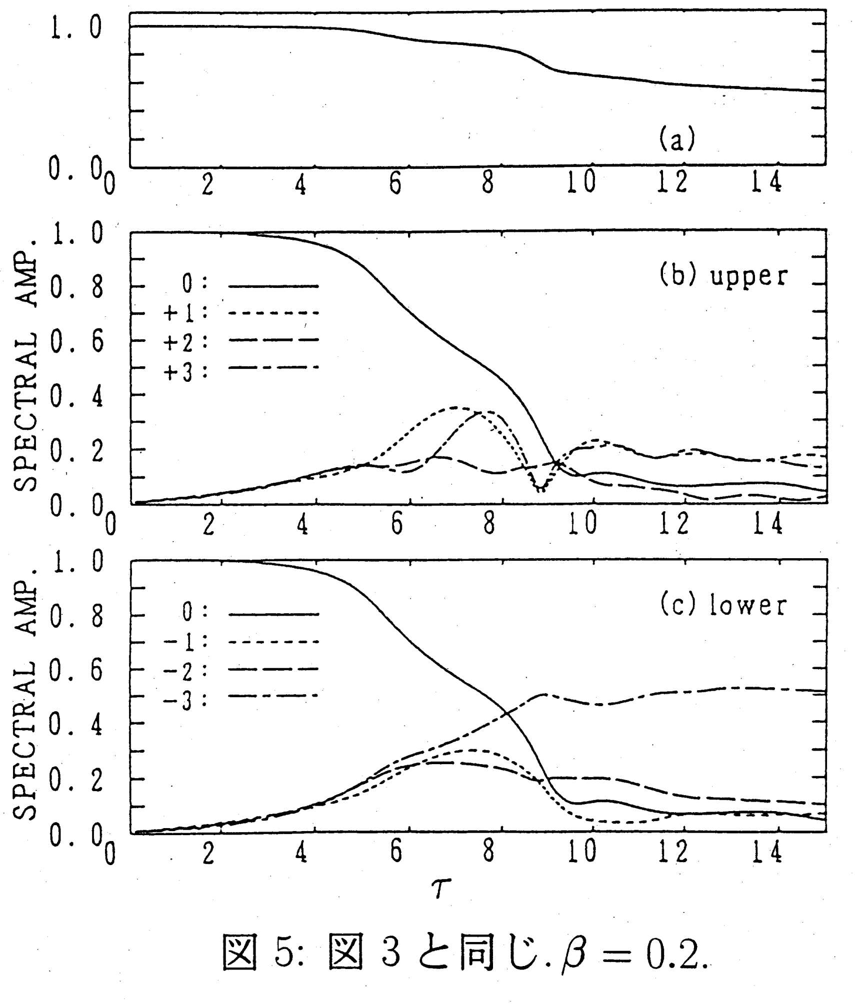

図 5: 図 3 と同じ. $\beta = 0.2$.

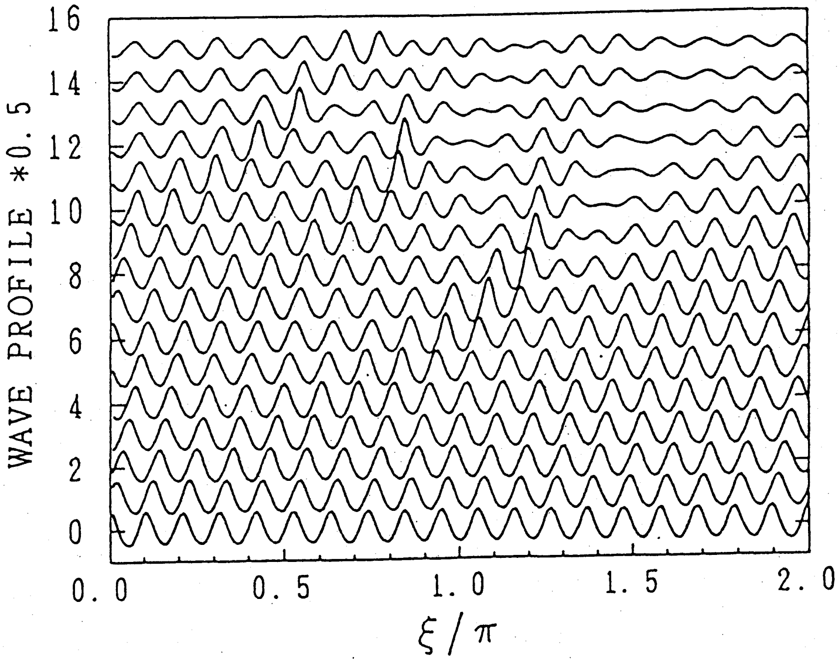

図 6: 図 2 と同じ. $\beta = 1.0$.

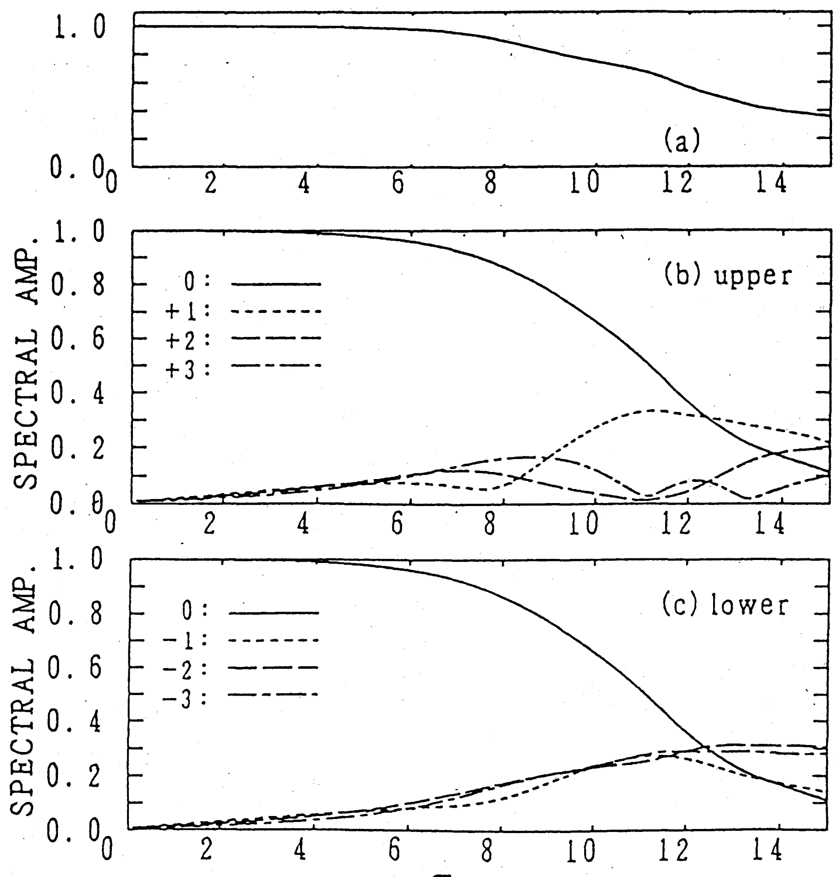

図 7: 図 3 と同じ. $\beta = 1.0$.

場合のエネルギーの変化をみると, 変調が進んで, 包絡波の振幅が増大する前までは, エネルギーはあまり減らない. 例えば $\beta = 0.2$ の場合, $\tau = 4$ までは, エネルギーがほとんど減らない(図 5(a)). このことから, β が小さい場合には, 変調が増大されるまでは, 付け加えた項がたいして効いてないといえる. 変調増大の後, 付け加えた項の効果が効き始め, β が適当な値の場合には, 変調がおさまって, 中心周波数が低下する. この結果は, Trulsen と Dysthe の砕波をモデル化した方程式の計算結果と非常によく似ている. 図 8は, 付け加えた項 $2\epsilon\gamma\beta A\mathcal{H}\{\partial|A|^2/\partial\xi\}$ の値を, 同時刻での波形とともに示したものである. 付け加えた項は ξ についての積分を含む非局所的な項であるにも関わらず, この場合には局所的に働いて, 包絡波の振幅が大きい場所だけを減衰させている. その為に, 砕波を取り込んだのと似た発展になると考えられる. β が大きい場合には, 変調が増大する前に, 付

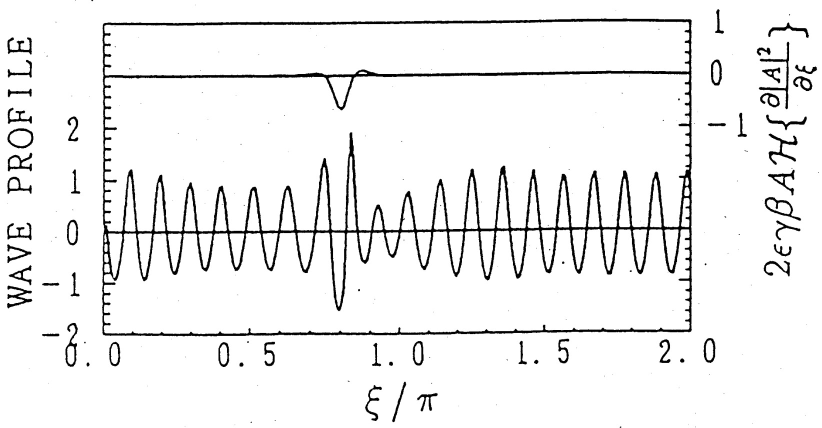

図 8: 波形と付け加えた項. $\beta = 0.2$, $\tau = 5.0$.

け加えた項が効き始める. 変調が増大する前ということは, 高波数が励起されず, 場所による包絡波の振幅の差が小さい状態である. この場合, 付け加えた項は非局所的に働き, 振幅をさらに平均化しながら, エネルギーを減衰させる. 従って, 側帯波が励

起され大きくなる前に, 搬送波のエネルギーも減ってしまう.

以上, Dysthe 方程式に取り入れた非局所的な散逸項がβの値を適当に選ぶと, Trulsen と Dysthe の砕波モデルと同様の周波数低下を引き起すことを示した. さて, 異なるモデルが同様の周波数低下を再現したということは, 1つには, 周波数低下は, モデルが一定の性質を持てばその詳細には依らないことを示し, また1つには, 水面波以外の分野でも起り得る現象であることを示唆する. こうした異なったモデルの共通点を絞っていくことが, 周波数低下の原因を探ることになる. 一方で, 数値計算の結果が実験結果と一致することのみでは, 周波数低下という現象を説明したことにはならない. 水の波の周波数低下という現象を正しく説明するモデルは, 流体の基礎方程式から導かれなければならない. 砕波の効果を取り入れるためには, 粘性や表面張力の影響も考えねばならない. しかし, 砕波の機構が充分わかってない現時点において, 正しいモデルを作ることはまだ困難である. 波列の長時間発展と砕波に関する, より詳しい実験的研究が望まれる.

参考文献

[1] B.M.Lake, H.C.Yuen, H.Rungaldier and W.E.Ferguson: J.Fluid Mech.,83 (1977) 49-74
[2] W.K.Melville:J. Fluid Mech.,115 (1982) 165-185
[3] M.Y.Su and A.W.Green:Phys Fluids,27 (1984) 2595-2597
[4] Hasimoto and Ono:J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972) 805-811
[5] E.Lo and C.C.Mei:J.Fluid Mech.,150 (1985) 395-416
[6] K.Trulsen and K.B.Dysthe:A.Tørum and O.T.Gudmestad, (eds.),Water Wave Kinematics,561-572
[7] 内山幸央, 川原琢治:数理解析研究所講究録, (1993)