数理解析研究所講究録
第 867 巻 1994 年 61-64

群と母関数

筑波大学大学院数学研究科 千吉良直紀 (Naoki Chigira)

群に関係したある集合の濃度の列 $\{a_n\}$ に関して、その指数型母関数、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$$

について考察する。

G を有限群とし、d を自然数とするとき、$A(G,d)=\{x\in G|x^d=1\}$ なる集合を考える。$a(G,d)=|A(G,d)|$ とおく。n 次対称群 S_nに対して、この集合の母関数が求められている。

Chowla-Herstein-Scott (1952, [2]) 任意の自然数 d に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(S_n,d)}{n!}x^n=\exp(\sum_{k|d}\frac{x^k}{k})$$

ここで、$a(S_0,d)=1.$

ここで右辺の関数をマクローリン展開することにより、任意の $n,\ d$ に対して $a(S_n,d)$ を求めることができる。一般に任意の群 G に対して $a(G,d)$ の母関数を見つけることは容易ではない。

有限生成な群 A に対して、$h_n(A)=|Hom(A,G)|$ とおく。このとき、

Wohlfarlt (1977, [6])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(A)}{n!}x^n=\exp(\sum_{\substack{B<A\\(A:B)<\infty}}\frac{x^{(A:B)}}{(A:B)})$$

$A=Z_d$ (d 次巡回群) とおけば、$h_n(Z_d)=a(S_n,d)$ であるから、Wohlfarlt の定理は Chowla-Herstein-Scott の定理の拡張になっている。

有限生成な群 A に対して、$b_n(A)=|\{H\le A|(A:H)=n\}|$ とし、

$$\zeta_A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(A)}{n^s}$$

なる関数を考える。これは母関数ではないが、次の定理のように $b_n(A)$ を求めるのによい関数である。

(See Lubotzky, [3]) A を *discrete Heizenberg group* とする。すなわち、

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

このとき、

$$\zeta_A(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}$$

が成り立つ。ここで、$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n^s$ とする。

この関数については Lubotzky [3] にくわしく述べられている。

G, H を有限群とし、

$$c(H, G) = |\{K \leq G | K \simeq H\}|$$

とおく。このとき、

$$a(G, d) = \sum_{k|d} \varphi(k) c(Z_k, G)$$

である。ここで、φ はオイラー関数をあらわす。ゼータ関数を用いると次のような関係が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(G, d)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(s) c(Z_n, G)}{n^s}$$

このような $a(G, d)$ と $c(Z_n, G)$ との関係については、Yoshida [7] に詳しく書かれている。

Chowla-Herstein-Scott の定理から、数列 $\{a(S_n, d)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の漸化式は

$$a(S_n, d) - a(S_{n-1}, d) = \sum_{\substack{k|d \\ k \neq 1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!} a(S_{n-k}, d)$$

であることがわかる。この数列の漸近評価を与えた定理がある。

Moser-Wyman (1956, [4])

$$a(S_n, 2) \sim \frac{1}{2} n^{n/2} \exp(-\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \sqrt{n}) \qquad (n \to \infty)$$

$$a(S_n, p) \sim \frac{1}{p} n^{n(1-1/p)} \exp(-n(1 - \frac{1}{p}) + n^{1/p}) \qquad (n \to \infty) \quad (p : \text{奇素数})$$

Wilf (1986, [5])

$$\frac{a(S_n, d)}{n!} \sim \frac{\tau^n}{\sqrt{2\pi d n}} \exp(\sum_{k|d} \frac{1}{k\tau^k}) \qquad (n \to \infty)$$

ここで、

$$\tau = \tau(d, n) = n^{-1/d} \{1 + \tfrac{1}{dn} \sum_{\substack{k|d \\ k<d}} n^{k/d} + \varepsilon_{d,n}\}$$

$$\varepsilon_{d,n} = \begin{cases} \frac{1}{2d^2 n}, & d: \text{偶数}, \\ 0, & d: \text{奇数}. \end{cases}$$

以上のように対称群については様々な結果が得られている。その他の群について次のような結果を得た。

定理 1 任意の自然数 d に対して、

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(A_n,d)}{n!}x^n=\frac{1}{2}\{\exp(\sum_{k|d}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k)+\exp(\sum_{k|d}\frac{x^k}{k})\}.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(S_m \wr S_n,d)}{n!}x^n=\exp(\sum_{k|d}\frac{a(S_m,d/k)(m!)^{k-1}}{k}x^k).$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(Z_m \wr S_n,d)}{n!}x^n=\exp(\sum_{k|d}\frac{a(Z_m,d/k)m^{k-1}}{k}x^k).$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(W(D_n),d)}{n!}x^n=\frac{1}{2}\{1+\exp(\sum_{\substack{k|d\\ k:even}}\frac{2^k}{k}x^k)\}\exp(\sum_{\substack{k|d\\ k:odd}}\frac{2^{k-1}}{k}x^k).$

ここで、$W(D_n)$ は D型の *Weyl* 群である。

系 (1) 定理 1 (2), (3) において $m=1$ とすれば、*Chowla-Herstein-Scott* を得る。
(2) 定理 1 (2), (3) において $m=2$ とすれば, B型の *Weyl* 群の式が得られる。

また $S_m \wr S_n$, $Z_m \wr S_n$ について、Wilf [5] と同様の漸近評価を与えることができる。

定理 2

(1) $\displaystyle\frac{a(S_m \wr S_n,d)}{n!}\sim\frac{\tau_1^n}{\sqrt{2\pi dn}}\exp(\sum_{k|d}\frac{a(S_m,d/k)(m!)^{k-1}}{k\tau_1^k}) \qquad (n\to\infty)$

ここで、

$$\tau_1=\tau_1(d,n)=(m!n)^{-1/d}\{m!+\frac{1}{dn}\sum_{\substack{k|d\\ k<d}}(m!n)^{k/d}a(S_m,d/k)+\varepsilon_{d,n}\}$$

$$\varepsilon_{d,n}=\begin{cases}\frac{1}{2d^2m!n}, & d\text{: 偶数},\\ 0, & d\text{: 奇数}.\end{cases}$$

(2) $\displaystyle\frac{a(Z_m \wr S_n,d)}{n!}\sim\frac{\tau_2^n}{\sqrt{2\pi dn}}\exp(\sum_{k|d}\frac{a(Z_m,d/k)m^{k-1}}{k\tau^k}) \qquad (n\to\infty)$

ここで、

$$\tau_2=\tau_2(d,n)=(mn)^{-1/d}\{m+\frac{1}{dn}\sum_{\substack{k|d\\ k<d}}(mn)^{k/d}+\varepsilon'_{d,n}\}$$

$$\varepsilon'_{d,n}=\begin{cases}\frac{1}{2d^2mn}, & d\text{: 偶数},\\ 0, & d\text{: 奇数}.\end{cases}$$

この定理についても、$m = 1$ とすれば Wilf の評価式が得られ、$m = 2$ とすれば $W(B_n)$ の評価式が得られる。

最近、任意の有限群 G に対して、$G \wr S_n$ について定理 1 の類似の式が成り立つことが証明できた [1]。これは、Chowla-Herstein-Scott の定理はもちろん、定理 1 の (2),(3) のはるか一般化になっている。Wilf のような漸近評価（定理 2）についても一般化できる。

参考文献

[1] N. Chigira, *The solutions of* $x^d = 1$ *in finite groups*, in preparation.

[2] S. Chowla, I. N. Herstein and W. R. Scott, *The solutions of* $x^d = 1$ *in symmetric groups*, Norske Vid. Selsk. 25 (1952) 29–31.

[3] A. Lubotzky, "Subgroup Growth", Lectures at the University of Chicago 92/93.

[4] L. Moser and M. Wyman, *Asymptotic expansion*, Canad. J. Math. (1956) 225–233.

[5] H. S. Wilf, *The asymptotics of* $e^{P(z)}$ *and the number of elements of each order in* S_n, Bull. Amer. Math. Soc. 15 (1986) 228–232.

[6] K. Wohlfarlt, *Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe*, Arch. Math. 29 (1977) 455–457.

[7] T. Yoshida, シローおよびフロベニウスの定理を結ぶゼータ関数, 代数的組合せ論, 数理科学講究録 768, 1991.