

# 頂点作用素代数入門

宮本雅彦

愛媛大学理学部

## 1 頂点作用素代数

1994年9月に頂点作用素代数の研究で第一線で活躍している若手による集中講義形式の集まりを計画している。この為の第一歩として頂点作用素代数入門を行うことにする。

### 1.1 歴史

頂点作用素代数 Vertex Operator Algebra の歴史は浅く、1884年の Belavin, Polyakov and Zamolodchikov [BPZ] の論文 Infinite conformal symmetries in two dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. の中に Chiral Algebra と呼ばれるようになる原型を見つけることができる。その後 1986年に Borchers (Proc. Natl. Acad. Sci.) によって数学的に定義され、1988年には Frenkel, Lepowsky, and Meurman は Jacobi の恒等式 (リー代数の Jacobi の恒等式の拡張) を導入し、頂点作用素代数の完全な定義を与えるとともに、モンスター頂点作用素代数 (ムーンシャイン加群) を構成し、コンウェイ、ノートンのムーンシャイン予想のうちの中心問題であった (McKay の指摘した) 古典的 elliptic modular function  $J(q)$  の係数とモンスター単純群の指標に関する一致を説明した。このような次数 1 の部分空間がない頂点作用素代数は有限群の立場から見て興味ある対象となる。次数 1 の部分空間があるとそれから全体に作用する無限リー群が構成できるが、それが無い場合には自己同型群は有限となる可能性が高い。モンスター単純群が作用しているグライス代数も自然な形で次数 2 の部分空間として定義され、また、自己同型も頂点作用素代数のヴィラソロ元という言葉で説明できるものがある。

### 1.2 形式的級数 Formal Series

面倒な収束などの問題を避ける為に、すべて形式的に考える。即ち、 $V$  を vector space とし、 $z$  を形式的変数 (formal variable) として、次のような集合を考える。

$V[z] = \{\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n z^n \mid v_n \in V, 0 \text{ でないのは高々有限個}\}$   
 $V[z, z^{-1}] = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V, 0 \text{ でないのは高々有限個}\}$   
 $V[[z]] = \{\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n z^n \mid v_n \in V\}$   
 $V[z, z^{-1}] = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V\}$   
 $V\{z\} = \{\sum_{n \in \mathbb{C}} v_n z^n \mid v_n \in V\}$   
 多変数  $\{z_1, \dots, z_k\}$  に対しても同様に定義する。

記号 1.1 形式的級数  $f(z) = \sum a_n z^n$  に対して形式的留数  $\text{Res } f(z) = a_{-1}$  を定義する。

記号 1.2 (展開)  $f(z_1, \dots, z_d)$  を極を持つとすると、高々  $z_i = z_j$  か  $z_i = 0$  でのみ持つような有理関数とする。すなわち、 $f(z) = \frac{g(z)}{\prod z_j \prod (z_i - z_k)}$  ( $g(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$ ) と表示できる関数とする。この時、領域  $|z_1| > |z_2| > \dots > |z_d|$  における  $f(z_1, \dots, z_d)$  のローレンツ展開を  $l_{z_1, \dots, z_d} f(z_1, \dots, z_d)$  で表す。

例 1.3 2変数  $\{z_1 = z, z_2 = w\}$  の関数で説明すると、展開すべきところ  $f(z)$  の因子のうち  $(z-w)^{-n}$  型のものであるのでその因子を展開してみると、

$$l_{z,w}(z-w)^{-n} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{-n}{i} (-1)^i z^{-n-i} w^i \quad (1)$$

$$l_{w,z}(z-w)^{-n} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{-n}{i} (-1)^{n+i} w^{-n-i} z^i \quad (2)$$

である。ただし、 $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$  であり、 $n < 0$  に対しては  $\binom{n}{i}$  は決して 0 にはならない。特に、

$$l_{z,w}(z-w)^{-1} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} \right) = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{w}{z} + \frac{w^2}{z^2} + \dots \right) \quad (3)$$

$$l_{w,z}(z-w)^{-1} = \frac{-1}{w} \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} \right) = \frac{-1}{w} \left( 1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \dots \right) \quad (4)$$

である。この2式の差

$$\begin{aligned}
 & l_{z,w}(z-w)^{-1} - l_{w,z}(z-w)^{-1} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{w}{z} + \frac{w^2}{z^2} + \dots \right) + \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \dots \right) = \frac{1}{z} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{w^i}{z^i} \right) = \frac{1}{z} \delta\left(\frac{w}{z}\right)
 \end{aligned}$$

は同一の有理関数の展開の差なのである意味で 0 であり、この為これを 0 の展開と呼ぶ。

注解 1.4 正の指数の場合 (即ち、正の指数の場合) には  $l_{z,w}$  も  $l_{w,z}$  も同じものになる。

### 1.3 頂点作用素代数の定義

頂点作用素代数の定義をする前に、少し拡張した頂点代数の定義を与える。これはモンスターリー代数を研究する上で重要となる。

定義 1.5 頂点代数とは  $\mathbb{Z}$ -次数付きのベクトル空間

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

と頂点作用素と呼ばれる線形写像

$$Y(\cdot, z) : V \rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$$

の組  $(V, Y)$  で以下の公理を満足するものを言う。  $a \in V$  に対して  $Y(a, z)$  を  $\sum_n a(n)z^{-n-1}$  で表す。(単に  $\text{End}(V)$  の無限個の元  $a(n)$  が与えられたと考えても良い。)

1. (正則) 任意の  $a, b \in V$  に対して十分大きな  $N$  をとると、  $a(n)b = 0 \quad \forall n > N$ .
2. (真空)  $V$  の中に次を満たす特別な (vacuum) 元  $1$  が有る。

$$Y(1, z) = id_V$$

3. (単射)

$$Y(a, z) = 0 \iff a = 0$$

4. (コンフォーマル元) Conformal vector (ヴィラソロ元) と呼ばれる特別な元  $\omega$  が有って それの頂点作用素 (運動量)

$$Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w(n)z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

は次の性質 (a), (b), (c) を満たす。

- (a) (ヴィラソロ代数) ある  $c \in \mathbb{C}$  があって、すべての  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n, 0}I_V$$

が成り立つ。この様な条件を満たすリー代数  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n + \mathbb{C}I_V$  をヴィラソロ代数と呼び、  $c$  を central charge と呼ぶ。

- (b) (translation generator)  $L_{-1}$  は微分的作用をする。

$$Y(L_{-1}a, z) = \frac{d}{dz}Y(a, z)$$

(c) (ウエイト)  $L_0$  は次数を定義する。

$$L_0 a = na \quad \forall a \in V_n$$

5. (Jacobi の恒等式)

$V$  の任意の  $a, b$  に対して、

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{z_1, z_2} \{Y(Y(a, z_1 - z_2)b, z_2) \iota_{z_2, z_1 - z_2}((z_1 - z_2)^m z_1^n)\} \\ &= \text{Res}_{z_1} \{Y(a, z_1)Y(b, z_2) \iota_{z_1, z_2}((z_1 - z_2)^m z_1^n)\} \\ &- \text{Res}_{z_1} \{Y(b, z_2)Y(a, z_1) \iota_{z_2, z_1}((z_1 - z_2)^m z_1^n)\} \end{aligned}$$

が成り立つ。

これから順にこのヤコビの恒等式をばらばらにしたものを説明していくので、この定義は暫く無視してよい。

この頂点代数を  $(V, Y, 1, \omega)$  または簡単に  $(V, Y)$  で表す。

頂点作用素代数の定義は上の定義に次の2点を加えるだけである。

定義 1.6 頂点作用素代数とは頂点代数  $(V, Y)$  であって、

1. 十分小さい  $n$  に対して  $V_n = 0$
2.  $V_m$  はすべて有限次元である。

頂点作用素代数が正値ラティス、頂点代数がローレンティアンラティスを含む一般的なラティスの様な関係になる。

少し説明を加える。

## 1.4 ヴィラソロ代数

定義 1.7 (ヴィラソロ代数)  $Vir$  を基底  $\{I, L_i : i \in \mathbb{Z}\}$  を持つリー代数とする。もし、 $I$  が  $Vir$  の中心に入り、ある定数  $c \in \mathbb{C}$  があって、

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m+n, 0} \frac{(m^3 - m)}{12} cI$$

が任意の  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して成り立つとき、*central charge*  $c$  を持つ *Virasoro Algebra* ヴィラソロ代数と呼ぶ。

例 1.8 ヴィラソロ代数の例として、 $V = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$  に対して、 $L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}$  と置くと、これらは *central charge* 0 のヴィラソロ代数となる。特に、微分  $\frac{d}{dz}$  が  $-L_{-1}$  である。

一般的なヴィラソロ代数は上の例の中心拡大となっており、頂点作用素代数にとって重要な役割を果たす。

### 1.5 頂点代数の基本的性質

いろいろな性質を導く上で役に立つのが次の式である。

定理 1.9 (Borcherds の定義) *Jacobi* の恒等式を成分表示してみると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 0} \binom{k}{i} (a_{h+i}b)_{k+n-i}c \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{h}{i} (a_{h+k-i}(b_{n+i}c) \\ & \quad - (-1)^h b_{h+n-i}(a_{k+i}c)) \end{aligned} \quad (6)$$

が  $\forall a, b, c \in V, h, k, n \in \mathbb{Z}$  に対して成り立つ。

性質をリストアップしよう。

$$L_{-1}\mathbf{1} = 0 \quad (7)$$

$$Y(e^{xL_{-1}}a, z) = Y(a, x+z) \quad (8)$$

$$[a_k, Y(b, z)] = \sum_{i \geq 0} \binom{k}{i} Y(a_i b, z) z^{k-i} \quad (9)$$

を得る。

これを成分表示すると、("Commutator formula 交換子形式")

$$[a_k, b_n] = \sum_{i \geq 0} \binom{k}{i} (a_i b)_{k+n-i} \quad (10)$$

を得る。

例 1.10

$$[a_0, Y(b, z)] = Y(a_0 b, z) \quad (11)$$

$$[a_1, Y(b, z)] = Y(a_0 b, z)z + Y(a_1 b, z) \quad (12)$$

$$[a_2, Y(b, z)] = Y(a_0 b, z)z^2 + 2Y(a_1 b, z)z + Y(a_2 b, z) \quad (13)$$

特に、コンフォーマル元に対して、

$$[L_n, Y(b, z)] = \sum_{i \geq -1} \binom{n+1}{i+1} Y(L_i b, z) z^{n-i} \quad (14)$$

が成り立つ。

(5) (Translation property)

$$e^{yL-1}Y(b, z)e^{-yL-1} = Y(b, z + y) \quad (15)$$

(6) (Scaling property)  $y \in z\mathbb{C}[[z]]$  に対して、

$$e^{yL_0}Y(b, z)e^{-yL_0} = e^{y\Delta_b}Y(b, e^y z) \quad (16)$$

最初の成分表示で  $k = 0$  と置くと、("Associativity formula 結合形式")

(7)

$$(a_h b)_n = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{h}{i} (a_{h-i} b_{n+i} - (-1)^h b_{h+n-i} a_i) \quad (17)$$

特に、上の commutator formula と associativity formula は重要な性質ですので、最初の用語を使って表すと。

定理 1.11 次の2つが成り立つ。

(1) [Locality = commutativity]

$v \in V^*, a, b, u \in V$  に対して

$$\langle v | Y(a, z_1) Y(b, z_2) | u \rangle \quad (I)$$

$$\langle v | Y(b, z_2) Y(a, z_1) | u \rangle \quad (II)$$

は高々有限の  $z_2$  ((II) は  $z_1$ ) の負の巾と  $z_1$  ((II) は  $z_2$ ) の正の巾を持ち、

$$f(z_1, z_2) = \frac{g(z_1, z_2)}{z_1^r z_2^s (z_1 - z_2)^t} \quad (18)$$

で  $g(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$  となるような  $f(z_1, z_2)$  の  $\iota_{z_1, z_2}$  ((II) は  $\iota_{z_2, z_1}$ ) の像にそれぞれなっている。即ち、

$$\langle v | Y(a, z_1) Y(b, z_2) | u \rangle = \iota_{z_1, z_2} f(z_1, z_2) \quad (19)$$

$$\langle v | Y(b, z_2) Y(a, z_1) | u \rangle = \iota_{z_2, z_1} f(z_1, z_2) \quad (20)$$

である。即ち、作用素を値とする有理関数と考えると、 $Y(a, z_1) Y(b, z_2)$  が  $Y(b, z_2) Y(a, z_1)$  とが一致している。

(2) [Duality = associativity]

$v \in V^*, a, b, u \in V$  に対して

$$\langle v | Y(Y(a, 0_1) b, z_2) | u \rangle$$

は高々有限の  $z_0$  の負の巾と  $z_2$  の正の巾を持ち、上の  $f(z_1, z_2)$  の  $\iota_{z_2, z_0}$  の像

$$\langle v|Y(Y(a, 0_1)b, z_2)|u \rangle = \iota_{z_2, z_0} f(z_0 + z_2, z_2) \quad (21)$$

となっている。特に、右辺は [Locality] より、

$$\langle v|Y(a, z_0 + z_2)Y(b, z_2)|u \rangle = \iota_{z_0, z_2} f(z_0 + z_2, z_2) \quad (22)$$

となり、作用素を値とする有理関数と考えると、 $Y(a, z_1)Y(b, z_2)$  が  $Y(Y(a, z_1 - z_2)b, z_2)$  とが一致している。

[FLM] の中で これら2つを合わせると、Jacobi の恒等式がでてくることを証明している。

もう一つ重要な性質として

[Skew - symmetry]

$$Y(a, z)b = e^{zL-1}Y(b, -z)a \quad (23)$$

が成り立つ。

これを成分表示すると、

$$\begin{aligned} a_n b &= -(-1)^n b_n a + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} (-1)^{i+n+1} (L_{-1})^i (b_{n+i} a) \end{aligned} \quad (24)$$

特に、次の結果をモンスターリー代数の定義に使う。

系 1.12  $a_0 b \equiv -b_0 a \pmod{L_{-1}V}$

$a_0(L_{-1}v) = L_{-1}(a_0v)$  より、括弧積

$$[a, b] = a_0 b$$

を剰余空間  $V/L_{-1}V$  の上に定義出来る。

最後に ヤコビの恒等式に  $h = k = n = 0$  を代入すると、

$$a_0(b_0c) - b_0(a_0c) = (a_0b)_0c \quad (25)$$

となり、これを括弧積  $[a, b] = a_0b$  を使って表示すると、

$$[a, [b, c]] - [b, [a, c]] = [[a, b], c]$$

となり、通常のヤコビの恒等式である。これらを合わせると、

定理 1.13  $a, b \in V/L_{-1}V$  に対して、 $[a, b] = a_0b \pmod{L_{-1}V}$  と置くと、 $V/L_{-1}V$  はリー代数となる。

1.6  $L_{-1}$ 

$Y(a, z) = \sum a(n)z^{-n-1}$  と置くと、上の性質より、 $[L_{-1}, Y(a, z)] = (\frac{d}{dz})Y(a, z)$  なので、

$$[L_{-1}, \sum a(n)z^{-n-1}] = \sum [L_{-1}, a(n)]z^{-n-1} = \sum (-n-1)a(n)z^{-n-2} \quad (26)$$

であり、

$$[L_{-1}, a(n)] = -na(n-1) \quad (27)$$

を得る。特に、

$$a(-2) = [L_{-1}, a(-1)], \quad (28)$$

$$a(-3) = \frac{1}{2}[L_{-1}, a(-2)] = \frac{1}{2}[L_{-1}, [L_{-1}, a(-1)]] \quad (29)$$

であり、一般に次を得る。

$$a(-n) = \frac{1}{(n-1)!} (\text{ad } L_{-1})^{n-1} a(-1) \quad \text{for } n > 1 \quad (30)$$

特に、 $\sum a(n)z^{-n-1}$  の  $n < 0$  の部分は

$$e^{\text{ad } L_{-1}z} a(-1)$$

と書ける。

**例 1.14 (Borcherds の例)**  $A$  を単位元を持つ可換結合代数とし、 $\text{ad } L_{-1}$  を  $A$  の微分とする。この時、

$$Y(a, z)b = (e^{\text{ad } L_{-1}z} a)b \quad \forall a, b \in A$$

と定義すると、頂点代数となる。

次に正の次数を見るために、次の定義をする。

**定義 1.15**  $L_1v = 0, L_0v = hv$  となる  $v$  を  $sl(2, \mathbb{C})$  の最低ウエイトベクトルと呼ぶ。

**注解 1.16**  $v$  が最低ウエイトベクトルの場合には正の次数の方も一元  $v(2h)$  から決定できる。

重要なので、ヴィラソロ元  $\omega$  への  $L_n = \omega(n-1)$  の作用もここで求めて置こう。

$$\omega_n \omega = \omega_n \omega_{-1} \mathbf{1} = [\omega_n, \omega_{-1}] \mathbf{1} + \omega_{-1}(\omega_n \mathbf{1}) = (n+1)\omega_{n-2} \mathbf{1} + \frac{\epsilon}{2} \delta_{n,3} \mathbf{1} + \omega_{-1}(\omega_n \mathbf{1})$$

より、

$$\begin{aligned} L_0 \omega &= \omega_1 \omega &= 2\omega \\ L_1 \omega &= \omega_2 \omega &= 0 \\ L_2 \omega &= \omega_3 \omega &= \frac{\epsilon}{2} \\ L_{n-1} \omega &= \omega_n \omega &= 0 \quad \forall n > 3 \end{aligned}$$



## 1.7 正規積

$V$  に作用する頂点作用素が2つ  $Y(a, z), Y(b, z)$  が与えられた時、それらの積  $Y(a, z)Y(b, z)$  は一般に作用素として定義できないので、意味を持たない。これを解消するために  $[FLM]$  のように、一般には正規順序と呼ばれるものが定義されるが、それよりもこちらの正規積が頂点作用素代数にとって重要な概念である。

記号 1.17  $Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)z^{-n-1}$  に対して次を定義する。

$$Y(a, z)^+ = \sum_{n \geq 0} a(n)z^{-n-1} \quad (31)$$

$$Y(a, z)^- = \sum_{n < 0} a(n)z^{-n-1} \quad (32)$$

定義 1.18 2つの頂点作用素  $Y(a, z), Y(b, w)$  に対して、正規順序積  $\cdot$  を

$$Y(a, z) \cdot Y(b, w) = Y(a, z)^- Y(b, w) + Y(b, w) Y(a, z)^+ \quad (33)$$

として定義する。

補題 1.19 次がなりたつ。

$$Y(a, z)Y(b, w) = \sum_{i \geq 0} Y(a(i)b, w) \iota_{z, w}(z-w)^{-i-1} + Y(a, z) \cdot Y(b, w) \quad (34)$$

$$Y(a(-i-1)b, z) = \frac{1}{i!} \left( \left( \frac{d}{dz} \right)^i Y(a, z) \right) \cdot Y(b, z) \quad (35)$$

これを繰り返すと、重要な関係式を得る。

定理 1.20  $a_1, \dots, a_n \in V$  と非負な整数  $i_1, \dots, i_n$  に対して、

$$Y(a_1(-i_1-1) \cdots a_n(-i_n-1)b, z) \quad (36)$$

$$= \left( \frac{1}{i_1!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{i_1} a_1(z) \right) \cdots \left( \frac{1}{i_n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{i_n} a_n(z) \right) \cdot b(z) \quad (37)$$

を得る。

即ち、 $b$  上  $a_1, \dots, a_n$  で生成された元の頂点作用素の成分は  $b, a_1, \dots, a_n$  の成分で表示できる。この定理により、 $V$  の部分集合  $S$  によって張られる頂点作用素部分代数の定義が出来る。例えば、 $\{a(n) | a \in S, n \in \mathbb{Z}\}$  によって1上張られる空間は頂点作用素に関して閉じている。

## 1.8 グライス代数

ムーンシャイン加群のように  $V_1 = 0$  となる頂点作用素代数があるとき、これから自然にグライス代数が定義できることを示そう。このグライス代数は有限群にとって重要である。

**定義 1.21**  $V_2$  の中に積  $\times$  を定義する。

$$a, b \in V_2 \text{ に対して、 } a \times b = a_1 b \in V_2$$

**補題 1.22**  $\times$  は対称

[証明] Skew-symmetry  $Y(a, z)b = e^{zL-1}Y(b, -z)a$  の成分表示

$$a_n b = -(-1)^n b_n a + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} (-1)^{i+n+1} (L_{-1})^i b_{n+i} a \quad (38)$$

で  $n=1$  と置くと、 $a_1 b = b_1 a + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} (-1)^i (L_{-1})^i b_{1+i} a$  となる。仮定より  $V_1 = 0$  なので、 $b_2 a = 0, L_{-1} b_3 a = 0$  となり、可換

$$a_1 b = b_1 a$$

を得る。

また、 $(\frac{1}{2}w) \times b = \frac{1}{2}L_0 b = b$  より、 $\frac{1}{2}w$  は単位元である。

$V_0$  は一次元なので

**定理 1.23**  $\langle a, b \rangle = a_3 b \in V_0 = \mathbb{C}1$  は  $V_2$  上の対称二次形式を定義する。

しかも上の積に関して不変である。即ち、 $\forall a, b, c \in V_2$  に対して、

$$\langle a, b \times c \rangle = \langle a \times b, c \rangle$$

が成り立つ。

ムーンシャイン加群の場合にはこれらの積と二次形式をもつ代数が丁度 196884 次元のグライス代数と一致している。この代数の全自己同型群がモンスター単純群と一致することの証明は Tits によるが、非常に難しい。この代数はグライスがモンスター単純群の表現とコンウェイ群の表現だけから構成したものであり、非常に技巧的だと考えられていたが、このように、頂点作用素代数の自然な性質の一つとして出てくることが分かる。

**定理 1.24** ムーンシャイン加群の全自己同型群はモンスター単純群と一致する。

**定理 1.25**  $(V, Y, 1, w)$  を  $V_1 = 0, \dim V_0 = 1$  となる頂点作用素代数とする。このとき、 $V_2$  は結合二次形式  $\langle a, b \rangle = a_3 b$  を持つ非結合可換代数  $\times$  である。

[最後に]

ヴィラソロ代数から構成される頂点作用素代数にはこの様に  $V_1$  の部分がないものが存在する。この様な頂点作用素代数の構造や、その拡大は有限群論にとって興味あるものになると思われる。特に、central charge  $1/2$  のヴィラソロ元と自己同型との間には面白い関係がある。これに関しては次の機会に述べたいと思う。