数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 90-100

場の量子論と統計性の問題

名古屋女子大　　大貫 義郎 (Yoshio Ohnuki)

I

ボーズ統計では複数の同種粒子を記述する波動関数は変数の入れ換えに対して完全対称、またフェルミ統計では完全反対称であることが確立して以来、その中間の統計があってもよいのではないかということが多くの人々によって考えられてきた[1]。すなわち、n_{max} を同一状態に入り得る粒子の最大個数とするとき

$$\begin{cases} n_{max}=1 & \text{fermi statistics} \\ n_{max}=\infty & \text{bose statistics} \end{cases} \tag{1.1}$$

であることからその中間の

$$1<n_{max}<\infty \tag{1.2}$$

となるような統計を考え intemediate statistics または generalized statistics と呼んで、分配関数の計算などが行われたが、これらは同一状態を占める粒子の個数を勘定するという素朴な議論で波動関数の性質を用いていないために、果して量子力学の基本的な要請、たとえばクラスター性といったものと両立しうるかどうかを議論できるようなものではなかった。またこのような立場からは、同種粒子の定義も明確ではなかった。

他方、ボーズ統計やフェルミ統計が場の理論における生成消滅演算子の代数関係によって規定されることから、この種の統計の記述に場の量子論を用いようという試みもやや遅れて現れた。この立場では、同種粒子とは一つの場によって与えられる粒子とみなすことができる。その最初の試みは T.Okayama[2] によるもので、彼はn個まで同種粒子が同一状態に入り得る理論として、生成消滅演算子に対する次のような代数関係を与えている。

$$\sum_{\text{perm. among } \alpha,\beta,\cdots,\pi} X_\alpha X_\beta X_\gamma \cdots X_\pi = 0 \qquad \text{for all } \alpha, \beta, \cdots, \pi \ (n+1 \text{ letters}),$$

$$X_\gamma X_\alpha^* X_\beta - X_\alpha^* X_\beta X_\gamma = \delta_{\alpha\gamma} X_\beta, \qquad X_\alpha^n X_\alpha^* + n X_\alpha^* X_\alpha^n = n X_\alpha^{n-1},$$

$$\sum_{m=0}^{n} X_\alpha^{*\,m} X_\alpha^n X_\alpha^{*\,n-m} = n!. \tag{1.3}$$

記号は原論文に従ったが意味は明かであろう。Okayamaの論文は引用文献がゼロという甚だ独創的な仕事であったが、上式は少しいじると忽ち自己矛盾に逢着することが分かる[3]。どうしてそれが当時気付かれなかったのか不思議であるが、残念ながらこのパイオニア的な仕事は統計を記述し得るような理論にはなっていなかったのである。

翌年 (1953)、H.S.Green [4] はフェルミ、ボーズ交換関係の拡張として、すぐには矛盾に逢着しそうもない次のような関係式を提案した。

$$[\,a_k, [\,a_l^\dagger, a_m]_\mp\,] = 2\delta_{kl}\,a_m\,,$$
$$[\,a_k, [\,a_l^\dagger, a_m^\dagger]_\mp\,] = 2(\delta_{kl}\,a_m^\dagger \mp \delta_{km}\,a_l^\dagger\,)\,,$$
$$[\,a_k, [\,a_l, a_m]_\mp\,] = 0\,. \tag{1.4}$$

現在、これはパラ交換関係と呼ばれるもので*)、上、下の符号の場合がそれぞれフェルミ、ボーズ統計の一般化になっている。

II

(1.4) を満たす既約な $a_k, a_k{}^\dagger$ は一意的ではない。Green は p を正整数として、次のように表される解を見いだした。

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{p} a_k^{(\alpha)}\,, \tag{1.5}$$

ここで $a_k{}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, p$) はグリーン成分と呼ばれるもので

$$[\,a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\,]_\pm = 0\,, \qquad [\,a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)\dagger}\,]_\pm = \delta_{kl}\,,$$
$$[\,a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\,]_\mp = [\,a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)\dagger}\,]_\mp = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{1.6}$$

を満たすことが仮定されている。 (1.5) をグリーン展開という。ここで真空 $|\,0>$ を

$$a_k|\,0> = 0 \qquad \left(a_k^{(\alpha)}\,|\,0> = 0\right) \tag{1.7}$$

とするとき、(1.5) を用いれば

$$a_k\,a_l^\dagger\,|\,0> = p\;\delta_{kl}\,|\,0> \tag{1.8}$$

---

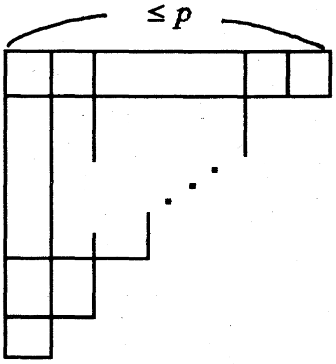
*) のち (1962) にこの関係は Green とは独立に Kamefuchi とTakahashi によっても見いだされた[5]。

が成立する。

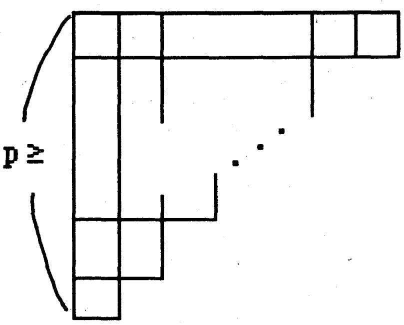
逆に、グリーン展開 (1.5) を仮定せずに、$a_k|0>=0$ に従う真空 $|0>$ の一意性の仮定から出発するならば、パラ交換関係(1.4)を満たす既約な演算子a_k, $a_k^\dagger$のセットは、任意に選ばれた正整数pによって一意的に規定され、このpに対して(1.8)の成立することが示される[6]。このとき既約なヒルベルト空間は、$|0>$に$a_k^\dagger$を次々に作用させることによって生成され、そうして(1.7)の左の式と(1.8)を用いれば、a_k(及び$a_k^\dagger$)の任意の行列要素は一意的に決定されることが分かる。

この値は(1.5)の右辺に(1.6)及び(1.7)の右のカッコ内の式を用いてa_kの行列要素を計算したものに他ならない。すなわちパラ交換関係(1.4)の任意の既約表現は、真空の一意性の仮定のもとに、グリーン展開を用いてつねに表すことができる。(1.8)およびグリーン展開に現れる正整数 pは統計のオーダーと呼ばれる。

オーダーがpで (1.4) の上（下）符号の代数によって指定される統計をオーダーpのパラフェルミ（パラボーズ）統計という。このとき対称群のもとでの可能な状態をヤング図形でかくと、行（列）の長さが下のような制限を受けたものになる。



オーダー p のパラフェルミ統計



オーダー p のパラボーズ統計

いうまでもなく上の左右の図で$p=1$が、それぞれフェルミ統計、ボーズ統計に対応する。通常はとくに $p>1$ の場合をパラ統計といっている。

パラ統計の理論はフェルミ統計やボーズ統計に比べて複雑であり、理論の基本的な構造がなかなか見通せず、そのような段階でこれまでの理論にもとづく直感的な解釈を部分的に適用し、その結果パラ統計は物理の理論として矛盾を含むのではないかという予想もなされてきた[7]。確かにパラ統計の理論では、フォック空間の構造は手が込んでいるが、しかしそれを入念に解きほぐしてみると、数学的にも美しい性質があるばかりか、フェルミ統計やボーズ統計と同程度に矛盾のない理論であることも明かになった[8]。ただしその詳細には立ち入らない。興味をもたれる方は

文献 [9] をみていただくことにして、ここでは主要な結果の一、二のみを記すことにする。

定理 I：（スピンと統計の関係）

パラ統計に従う相対論的な粒子のスピンが整数であるならば、その粒子はパラボーズ統計を、また半整数であるならば、パラフェルミ統計を満足する。

次の定理は簡単のために系が単一のパラ場からなるとしてあるが、 いくつかの様々なオーダーのパラ場が共存する場合にも拡張される[9]。

定理 II：

オーダーpのパラフェルミ（パラボーズ）統計に従う場からなる系は、グローバルな厳密な対称性 $U(p)$, $SU(p)$, $O(p)$ または $SO(p)$に従うフェルミ（ボーズ）場の系と等値である。ここで等値とは観測によっては全く区別ができないという意味である。

この定理をオーダー1とオーダーpの場の共存系に拡張すると、その結果として次の定理が導かれる。

定理 III：

オーダーp (>0)の統計に従う粒子をただ1個だけ外線に含み、他の外線がすべてフェルミ粒子またはボーズ粒子であるとすれば、このときのS行列の要素はゼロとなる。

光子はボーズ統計に、また電子、陽子、中性子はフェルミ統計に従うことが知られているので、これと上の定理を用いれば、殆どすべての素粒子はボーズまたはフェルミ統計に従うことが分かる。ただし ν_e と ν_μ の間に混合がなく μ 粒子数が保存するときは、上の定理からは μ と ν_μ の統計を決定することができない。しかし μ 粒子がオーダーpのパラフェルミ統計に従うとするならば、γ線によるμ粒子の対生成の断面積 σ_p は$p\sigma_1$で与えられる。ここで σ_1 はμ をフェルミ粒子としたときの対生成の断面積でいわゆるベーテ・ハイトラーの公式で与えられている。それゆえσ_pに実験値を用いてp をもとめれば、その値は極めて1に近い(p =1.00±0.05)ことが示される。すなわち μおよびν_μはフェルミ統計に従うとみなすことができる。同様にして、τ 粒子数が保存しているとするならば、τ および ν_τ の統計も 上の定理からは決められない。この場合、現在の実験データからはτやν_τがフェルミ粒子だと結論するのはまだ難しいようである。

定理IIによれば、パラ統計の場の理論はある種の厳密な内部対称性をもったボーズ粒子やフェルミ粒子の場の理論に読み替えるることができる。このことはパラ統計

においてもクラスター性が成立することを強く暗示するものであって、実際にきめの細かい吟味を遂行することによりそれを示すことができる[8] [9]。

III

大急ぎでパラ統計の議論を眺めてきたが、場の理論においてこれ以外の統計の可能性はあるのであろうか。

その話し入る前にまず、統計とは粒子のもつ性質であることに注意しよう。したがって場の理論でどのような統計が可能かの議論は粒子像が明瞭な状況において行わなければならない。たとえば有限時刻での場の従う代数と粒子像のはっきりした漸近的世界での代数とは、一般に区別して考えられなければならない。いうまでもなく統計を規定する代数は後者である。この意味で、後で触れるであろうボーズ･フェルミ転換(bose-fermi transmutation)は、ボーズ粒子がフェルミ粒子に変るわけではなく、ボーズ型の交換関係にもとづく場の量子論がフェルミ統計に従う粒子像を導くということに過ぎない。

相対論的な場の量子論においては、粒子像は漸近場によって与えられる。従って統計の議論は自由場に対して行えばよい。このときは相対論的に不変な微視的因果性が理論に課せられるために、下に述べる非相対論の場合に比して、強い制約が生じて、パラフェルミ統計、パラボーズ統計が最も一般的で、これ以外の可能性は場の量子論においては存在し得ないことを示すことができる。

それゆえ以下では、相対論ではどうかということを若干注釈しつつ、非相対論的な場の理論において、粒子の統計性を規定するために課せられるべき条件を列挙してみることにしよう。

(i) 粒子数演算子と局所性の条件：

粒子像を定義するための、$[N,a_k] = -a_k$ を満足する個数演算子N が存在するとする。（相対論的場の理論ではNの代りにしばしばエネルギー演算子が用いられる。）消滅演算子a_kはもちろん局所場 $\psi(x)$と $\psi(x) = \sum_k f_k(x) a_k$ なる関係にある。このとき個数演算子Nは、局所性の条件

$$[\rho(x), \rho(y)] = 0 \qquad \text{for } x_0 = y_0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}. \tag{3.1}$$

に従う密度演算子$\rho(x)$の空間積分として与えられる。ここで$\rho(x)$は$\psi(x)$および$\psi^\dagger(x)$（および一般にはその有限階微分）の関数である。

(ii) 表示独立性[10] ：

Uを任意のユニタリー演算子として波動関数の$f_k(x)\rightarrow f_\kappa'(x)=\sum_k U_{\kappa k} f_k(x)$ に書き換えれば、これに対応してa_k は

$$a_k \rightarrow a_\kappa' = \sum_k U_{\kappa k}^* a_k . \tag{3.2}$$

なる変換を受けるが、このときこの変換のもとで、1)個数演算子Nは不変、また2)生成、消滅の演算子$a_k^\dagger$, a_kの従う基本代数は共変的なかたちに表される。すなわち統計は表示のとり方に無関係に定義できなければならない。

(iii) クラスター性 ：
全系SをS_I, S_{II}の２つの部分系に分割して考えるとき、これらの部分系が空間的に相互に十分隔たっているならば、われわれは一方の系の記述を他方の系の物理的状況を全く顧慮することなしに行うことができる。

この他にも、もちろん自明の要求として、(iv)真空の一意性、(v)物理的な状態ベクトルのノルムの正定値性、(vi)エネルギー固有値の下限の存在、などがあげられる。（さらに相対論的な場の量子論では、漸近場に対して微視的な因果率や相対論での共変的な記述が要求されなければならない。）

さきに相対論的な場の理論ではパラ統計（p=1を含む）以外に新しい統計の可能性はないといったが、非相対論的場の理論でも証明はないが、パラ統計以外の具体例は知られていない*）。しかし筆者がかつて調べたところでは、

$$\rho(x) = -2\psi(x)\,\psi^\dagger(x) \tag{3.3}$$

の場合

$$N_{kl} \equiv -2a_l a_k^\dagger \tag{3.4}$$

としたときに次式によって規定される理論はすぐには排除できなかった[12]。

$$\begin{cases} [N_{kl}, a_m^\dagger] = \delta_{ml} a_k^\dagger , \\ a_k|0> = 0, \qquad a_k a_l^\dagger |0> = \delta_{kl}|0> . \end{cases} \tag{3.5}$$

この場合フォックの空間は、|0＞ に $a_k^\dagger$をつぎつぎ作用させたものを重ねあわせて

---

*) GreenbergとMohapatra [11] はかつて２個までは同一状態を占め得るが、パラ統計とは異なりむしろフェルミ統計に近いようなモデルを提案して、このときの粒子をオーダー２のparonと呼んだことがる。しかし、簡単な計算で３体以上のある種のconfugurationに負のノルムの生じることが示される[12]。従ってこのモデルは許されない。

生成することができる。しかも6体までであったか7体までであったか忘れたが、ともかく低いconfogiration においては、筆者の調べた限りにおいて負のノルムは現れない。もちろん一般のconfogiration でこれが証明されたわけではないし、またクラスター性の証明はもっと難しいので、今の所この量子化が無矛盾であるとはとても言えないが、非相対論的場の量子化のこれが残された唯一の可能性である。

ついでに、エニオンのいわゆる分数統計について述べておこう。この統計は場の代数的な関形式によっては定義できない。理由は、この統計を特徴付ける粒子の入れ換えのいわゆるBraid群の操作が、x-空間(configuration space)でのみ定義されていて、これを同じ形での、例えば、k-空間での表現に移行できないことによる。つまり分数統計の定義は、表示独立性を破っているのである。もう一つ、分数統計の特徴はそれがエニオン間の長距離相関によって生み出されていることである。この相関はエニオン同士をいかに引き離しても切ることはできない。このことは、エニオンの系には漸近状態が存在せず、従って通常のように漸近的な世界で統計を定義することができないのみならず、クラスター性をも破っている可能性をも示唆している。

エニオンの統計の記述に強引に場の理論を当てはめようとするとどうなるかは簡単なモデルで見ることができる。これは周知の演習問題かも知れないが、念のためAppendixとして付け加えることにする。またここでは特定のパラメーターのもとでは漸近場が存在し、場の理論としてボーズ・フェルミ転換の導かれることが示される。

最後に、相対論的な(2+1)次元の時空ではそこでのポアンカレ群の表現から分数スピンをもつ既約な自由粒子の相対論的波動方程式を導くことができることを付記しておこう[13]。このとき共変的な場は必然的に無限成分になることが示されるが、しかしながらこれに対して因果的な交換関係を設定することは不可能である[14]。

* * *

われわれは、場の量子化という観点から同士粒子の統計性について述べてきた。この立場に立つ限り、パラ統計以外の可能性はないと言ってよい。

Appendix

2次元空間におけるN体系の波動関数を$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N)$とし、変数の入れ換えに対して完全対称すなわち

$$\varphi(x_1,\cdot\cdot,x_a,\cdot\cdot,x_b,\cdot\cdot,x_N) = \varphi(x_1,\cdot\cdot,x_b,\cdot\cdot,x_a,\cdot\cdot,x_N) \quad (a,b = 1, 2, \cdots,N) \tag{A.1}$$

とする。またエニオンの系のハミルトニアンとしてはよく知られた

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{a=1}^{N} (\boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{A}_a)^2 + V, \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{A}_a = \frac{\theta}{\pi}\sum_{b(\neq a)} \nabla_a \lambda(x_a,x_b) \tag{A.3}$$

を用いることにする。ただし、時間変数はあらわに書かないが、以下の関係式はすべて同時刻におけるものである。なお上式のθは実定数、$\lambda(x,y)$は図に示す角度であるが定義によりmod 2πの不定性がある。またこのとき

$$\lambda(x,y) = \lambda(y,x) + \pi \qquad \mathrm{mod}\ 2\pi \qquad \mathrm{for}\quad x \neq y. \tag{A.4}$$

$\lambda(x,y)$ の$x = y$における特異性を避けるために、ポテンシャルVは、$V=\Sigma_{a>b}v(|x_a-x_b|)$で2粒子間に短距離の強い斥力を与えるものとし、その結果、波動関数は$x_a=x_b$のときゼロになるものと仮定しよう。この仮定を以下ではハードコア条件と呼ぶことにする。すなわち次式がなりたつとする。この仮定は以下の議論では極めて本質的である。

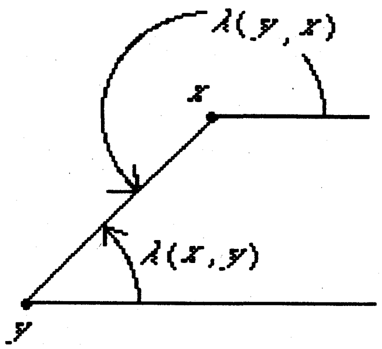


図 A.1

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N) = 0 \qquad \mathrm{for}\quad x_a = x_b \qquad (a,\ b = 1,2,\cdots,N;\quad a \neq b). \tag{A.5}$$

以上の量子力学の系を第2量子化のことばで書き換えるためには、(A.1)に対応してボーズ交換関係および真空条件

$$[\psi(x),\ \psi^\dagger(y)] = \delta^2(x-y), \qquad [\psi(x),\ \psi(y)] = 0, \qquad \psi(x)\,|\,0> = 0 \tag{A.6}$$

を満たす場$\psi(x)$を導入すればよい。場の状態 | >とこれに対応する波動関数は

$$\begin{cases} \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N) = <x_1,x_2,\cdots,x_N|\ >, \\ |\ > = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int d^2x\ \ \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N)\ |x_1,x_2,\cdots,x_N> \end{cases} \tag{A.7}$$

で結ばれる。ここで$|x_1,x_2,\cdots,x_N>= \psi^\dagger(x_1)\psi^\dagger(x_2)\ \cdots\ \psi^\dagger(x_N)|\,0>$であるが、ハードコア条件により状態ベクトル$|x_1,x_2,\cdots,x_N>$内の変数$x_1,x_2,\cdots,x_N$はすべて異なると考えてよい。いうまでもなく場の理論におけるハミルトニアンは

$$H=\int d^2x\,\frac{1}{2m}\,\psi^\dagger(x)\left(\frac{1}{i}\nabla-\boldsymbol{A}(x)\right)^2\psi(x)+V \tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\theta}{\pi}\int d^2y\ \boldsymbol{\nabla}_x\lambda(x,y)\rho(y), \quad V=\frac{1}{2}\int d^2xd^2y\ \psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)v(|x-y|)\psi(y)\,\psi(x)$$

で与えられる。ただし$\rho(x)=\psi^\dagger(x)\psi(x)$である。

いうまでもなく分数統計の効果は、波動関数$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N)$や交換関係(A.6)の中には反映しておらず、むしろそれは粒子間の長距離相関の中に内在している。通常量子力学ではsingularなゲージ変換を行ってハミルトニアンからこの部分を消去しその効果を波動関数に繰り入れることが行われる。すなわち

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \exp[\, i\frac{\theta}{\pi}\sum_{a>b}\lambda(x_a x_b)\,] \qquad (x_1,x_2,\cdots,x_N;\ \text{all different}) \tag{A.9}$$

としてハミルトニアンおよび波動関数を次のように変換する。

$$\begin{cases} H \to H' = U^\dagger H U = \dfrac{1}{2m}\displaystyle\sum_{a=1}^{N} \nabla_a^2 + V, \\ \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N) \to \varphi'(x_1,x_2,\cdots,x_N) = U^\dagger \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_N)\,. \end{cases} \tag{A.10}$$

Uはその定義から(1) $\theta=2n\pi$ (n; integer)のときは$x_1,x_2,\cdots,x_N$の任意の置換に対して完全対称、(2) $\theta=(2n+1)\pi$ のときは$x_1,x_2,\cdots x_N$の任意の奇置換に対して反対称の1値関数で、後者の場合φ'フェルミ統計を記述する。さらに(3)$\theta\neq n\pi$ の場合には、U 従ってφ'は多価関数となっていわゆるエニオンの分数統計を記述する*)。

場の理論でこれのアナロジーを形式的に辿れば

$$\chi(x) = U^\dagger(x)\,\psi(x) \qquad \text{with} \quad U(x) = exp[\; i\frac{\theta}{\pi}\int d^2y\,\lambda(x,y)\rho(y)\,] \tag{A.11}$$

なる$\chi(x)$を導入することによりハミルトニアンからは長距離相関が落ちて

$$H = \int d^2x\,\frac{1}{2m}\nabla\chi^\dagger(x)\cdot\nabla\chi(x) + V \qquad \text{with} \quad V = \frac{1}{2}\int d^2x\, d^2y\ \chi^\dagger(x)\chi^\dagger(y)v(|x-y|)\,\chi(y)\chi(x) \tag{A.12}$$

を得る。しかしだからといって$\chi(x)$を、$\theta\neq n\pi$ の場合に、時空点xにおいてエニオンの消滅を記述する場の演算子とみなすことはできない。まず$U(x)$は角度$\lambda(x,y)$の多価性のためにxの1価関数にはなっていない。実際、$\lambda(x,y)\to\lambda(x,y)+2n\pi$ の変換で演算子$U(x)$は$U(x)\to\exp[2i\theta N]\cdot U(x)$ なる変換を受ける。ただしNはエニオンの個数演算子$\int d^2x\rho(x)$ である。そのような$\chi(x)$の性質をさらによく見るために $[\psi(x),\rho(y)]=\delta^2(x-y)\psi(y)$から形式的な操作で導かれる次式

*) このときのφ'を波動関数と呼ぶのは厳密な意味では正しくない。多価のφ'は正準交換関係の表現空間に属していないからである。またDiracの変換論をこれに適用することもできない。

$$U^{\dagger}(x)\psi(x)U(x) = \exp[\,i\frac{\theta}{\pi}\lambda(x,y)]\,\psi(x), \qquad U(x)\psi(x)U^{\dagger}(x) = \exp[-i\frac{\theta}{\pi}\lambda(x,y)]\,\psi(x), \tag{A.13}$$

を用いて(A.6)を書き換えれば、

$$\chi(x)\chi(y) - e^{i\frac{\theta}{\pi}\Delta(x,y)}\chi(y)\chi(x) = 0, \quad \chi(x)\chi^{\dagger}(y) - e^{i\frac{\theta}{\pi}\Delta(x,y)}\chi^{\dagger}(y)\chi(x) = \delta^{2}(x-y) \tag{A.14}$$

を得る。ただし $\Delta(x,y) = \lambda(x,y) - \lambda(y,x)$ である。場の理論においては演算子$\chi(x)$のすべての性質は交換関係(A.14)によって規定されなければならない。しかし$\Delta(x,y)$ は

$$\Delta(x,y) = \begin{cases} \pi & \mathrm{mod}\ 2\pi \quad \text{for} \quad x \neq y, \\ 0 & \qquad\qquad \text{for} \quad x = y. \end{cases} \tag{A.15}$$

なる多価関数であって、1価関数としての場$\chi(x)$を定義することはできない。しかも$\chi(x)$の多価性は甚だ異様であって、(A.14)に見られるようにこれと積をつくる他のχ'sの変数と関連する。従って$\chi(x)$をxの完全直交関数系で展開することができない。これは表示独立性の破れに他ならない。このような理由から$\theta \neq n\pi$の場合には、$\chi(x)$に対し、点xにおける場の演算子としての意味をもたせることは不可能である。

最後に$\theta=(2n+1)\pi$ の場合、$\chi(x)$は確かにフェルミ型の交換関係を満たすことを示しておこう。まず場χ同士（あるいは$\chi^{\dagger}$同士）の交換関係はハードコア条件により場の変数が異なる場合を考えれば十分である。すなわち(A.14)の第1式で$x \neq y$とすれば(A.15)よりただちに$\{\chi(x), \chi(y)\}=0$を得る[15]。しかし(A.14)の第2式で$x \neq y$とおくことはできない。χと$\chi^{\dagger}$の間にはハードコア条件が存在しないからである。実際(A.14)、(A.15)を如何にひねってみてもこれからフェルミ型交換関係

$$\{\chi(x), \chi^{\dagger}(y)\} = \delta^{2}(x-y) \tag{A.16}$$

を導くことはできない。ところで交換関係(A.14)の第2式は、状態ベクトルの内積の計算、あるいはもっと単的には$\chi(x)\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\cdots\chi^{\dagger}(x_N)|0\rangle$において$\chi(x)$を右に移動させ$\chi(x)|0\rangle=0$を用いてこれを消去する際の計算に使われる。そこで簡単のために$N=3$として(A.14)の第2式を用いてこの計算を行ってみよう。

$$\chi(x)\,\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\chi^{\dagger}(x_3)\,|\,0\rangle$$

$$= [\,\delta^{2}(x-x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\chi^{\dagger}(x_3) + \delta^{2}(x-x_2)\,e^{i\Delta(x,x_1)}\,\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_3)$$

$$+ \delta^{2}(x-x_3)\,e^{i\Delta(x,x_1)}e^{i\Delta(x,x_2)}\,\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\,]\,|\,0\rangle \tag{A.17}$$

$$= [\,\delta^{2}(x-x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\chi^{\dagger}(x_3) - \delta^{2}(x-x_2)\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_3) + \delta^{2}(x-x_3)\chi^{\dagger}(x_1)\chi^{\dagger}(x_2)\,]\,|\,0\rangle$$

ここで中間の式は左辺に(A.14)の第２式と真空の条件$\chi(x)|0>=0$を用いて$\chi(x)$を消去したもの、最下段の式は$\Delta(x,x_i)$のxを$x_j(\neq x_i)$で置き換えこれに(A.15)　を使った結果である。すなわちハードコア条件に従う状態ベクトル$\chi^\dagger(x_1)\chi^\dagger(x_2)\chi^\dagger(x_3)|0>$の上では、(A.14)の第２式とフェルミ交換関係(A.16)とは完全に等価であって前者の代りに後者を用いることができる。この結果を一般の$\chi^\dagger(x_1)\chi^\dagger(x_2)\cdots\chi^\dagger(x_N)|0>$の上の議論に拡張できることは言うまでのない。このようにして、このモデルでのボーズ・フェルミ転換はハードコア条件、すなわち上の状態ベクトルで、$x_1, x_2, \cdots, x_N$ がすべて異なるというダイナミカルな条件が本質的な役割を演じている。

なおついでに付言すると、$\chi(x)$で書かれたハミルトニアンには長距離相関がないので、$\theta=(2n+1)\pi$ の場合、上記の条件のもとに弱局限をとって漸近場$\chi^{in}(x)$を導入すると、非相対論的場の理論の漸近場の交換関係を与えるよく知られたテクニックにより[16]、２次元空間の任意のx,yに対して次式の成立することが導かれる。

$$\{\chi^{in}(x), \chi^{in}(y)\} = 0, \qquad \{\chi^{in}(x), \chi^{in\dagger}(y)\} = \delta^2(x-y). \qquad \text{(A.18)}$$

References

[1] G.Gentile; Nuo.Cim. **17** (1940) 493. A.Sommerfeld; Ber. Dtsch. Chem. Ges. **75** (1942) 1988. H.Wergeland; K. Norske.Vidensk. Selsk. Forhandl. **17** (1944) 51. G.Schubert; Z.Naturforsch.**1** (1946) 113. H.Müller; Ann.Phys.(German) **7** (1950) 420. D.ter Haar; Physica **18** (1952) 199. P.T.Landsberg; Molecular Phys. **6** (1963) 517.

[2] T.Okayama; Prog. Theor. Phys. **7** (1952) 517.

[3] S.Kamefuchi; Nuov. Cim. **45B** (1966) 276.

[4] H.S. Green; Phys. Rev. **90** (1953) 270.

[5] S.Kamefuchi and Y.Takahashi; Nucl. Phys. **36** (1962) 177.

[6] A.M.L.Messiah and O.W.Greenberg; Phys. Rev. **136B** (1964) 248.

[7] O.Steinmann; Nuov. Cim. **44A** (1966) 755. G.Lüders; Z. Phys. **192** (1966) 449. S. Okubo; Prog. TRheor. Phys. Suppl. Nos. **37** & **38** (1966) 114.

[8] Y.Ohnuki and S.Kamefuchi; Prog. Theor. Phys. **50** (1973) 258.

[9] Y.Ohnuki and S.Kamefuchi; "*Quantum Field Theory and Parastatistics*", Univ. of Tokyo Press / Spriger Verlag (1982).

[10] I.Bialynicki-Birla, Nucl. Phys. **49** (1963) 605.

[11] O.W.Grennberg and R.N.Mohapatra; Phys Rev. Lett. **59** (1987) 2507.

[12] Y. Ohnuki; (1988) unpublished.

[13] R.Jackiw and V.P.Nair, Phys. Rev. **D43** (1991) 1933. V.P.Nair; Int. Nat. J. Mod. Phys. **B5** (1991) 1685. Y.Ohnuki; *Proc.2nd Int. Winter School in Math. Phys.–1991–Soraksan Korea* , Word Scientific (1992, ed by Y.M.Cho) 144.

[14] Y.Ohnuki; see Ref.[13].

[15] T.Mastuyama; Phys. Lett. **B228** (1989) 99.

[16] R.J.Redmond and J.L.Uretsky; Ann. Phys. (N.Y.) **9** (1960) 106.