数理解析研究所講究録
第869巻 1994年 152-161

量子群のゲージ場の理論

富山大理学部 平山 実 (Minoru Hirayama)

§1. 序

周知の如く，非可換リー群に基くYang-Millsのゲージ場理論は，素粒子論に於いて輝やかしい成功を収めました。それは，素粒子の標準理論の骨格となると共に，漸近自由性という現象の存在を我々に教えて呉れました。更に，Yang-Mills場の量子論は，BRS不変性の発見とそれに続く九後-小嶋の定式化を通じて，中西-Lautrap場の一般的存在理由を明らかにしました。一方，リー群は19世紀末に発見されて以来ほぼ1世紀を経て，その拡張を獲得しました。即ち，リー群上の関数環をホップ構造を保ちつつ非可換化できることや，リー環の包絡環をホップ構造を保ったまま非余可換化できることが近年明らかになりました。リー群SU(2)とリー環su(2)について言えば，互いに双対な関係にある2つの量子群（非可換・非余可換ホップ代数）$SU_q(2)$と$U_q(su(2))$が導かれました。興味深

いのは，量子群の代数が数理物理学に於いて思いの外多方面で現れることです．

本稿では，量子群 $SU_q(2)$ をゲージ対称性として持つような古典場の理論を考察します．つまり，Yang-Mills 理論の量子群の場合への拡張を試みるわけですが，どのような点で工夫を要するのかを考えてみましょう．問題点は2つに絞られます．その第一は，“群”という語は付されていても，量子群は群ではないことです．量子群の2つの元の通常の積からは，何の規則性も見出すことが出来ません．従って，Yang-Mills 理論で慣れ親しんで来た“繰り返しゲージ変換”をどのように定義すべきかが問題になります．以下では $SU_q(2)$ の余積の存在に由来する性質の助けを借りてゲージ変換の積を定義しますが，この点に於いて研究者によって立場が分れます．量子群的ゲージ変換やその積の定義を明確にしない人もあれば，無限小変換のみを考える人もあります．又，BRS変換のみを考える立場を取る人もいます．第二の問題点は，量子群の非可換な座標に関する微分をどのように定義すべきか，です．Woronowicz [Wo1,2] は，非可換関数環のひとつのイデアルはひとつの微分法を定義することを示しました．ところが，$SU_q(2)$ は複数個のイデアルを有しますから微分もひと通りには定まりません．量子群上の微分形式の一般的構成法の観点からは

両側共変微分法が便利なのですが，両側共変ではないのにうまく働くよりシンプルな微分法も存在するのが不思議な所です．紙数の制限もありますから，第一の点にどのように対処するかに重点を置いて述べることにして，第二の点については文献を挙げるだけにします．

§2. $SU_q(2)$ 変換とその積

$SU_q(2)$ の基本表現は

$$w = \begin{pmatrix} \alpha & -\nu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書かれます．量子群座標 $\alpha, \gamma, \alpha^*, \gamma^*$ は

$$\begin{aligned} &\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = I, \quad \alpha\alpha^* + \nu^2\gamma\gamma^* = I, \\ &\gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma, \quad \alpha\gamma = \nu\gamma\alpha, \quad \alpha\gamma^* = \nu\gamma^*\alpha, \\ &\gamma^*\alpha^* = \nu\alpha^*\gamma^*, \quad \gamma\alpha^* = \nu\alpha^*\gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

の代数に従い，I は単位演算子，ν は実パラメーターです．$\alpha, \gamma, \alpha^*, \gamma^*, I$ から生成される複素係数多項式環とその表現を区別せずに A と書くことにします．w の表現

$$w_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\nu\gamma_i^* \\ \gamma_i & \alpha_i^* \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

から通常の積

$$w_2 w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \nu\gamma_2^*\gamma_1 & -\nu(\gamma_2^*\alpha_1^* + \alpha_2\gamma_1^*) \\ \gamma_2\alpha_1 + \alpha_2^*\gamma_1 & \alpha_2^*\alpha_1^* - \nu\gamma_2\gamma_1^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

を作っても，行列要素 $(w_2 w_1)_{k\ell}$， $k, \ell = 1, 2$，は $(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_1^*, \gamma_1^*)$ のメンバーと $(\alpha_2, \gamma_2, \alpha_2^*, \gamma_2^*)$ のメンバーが可換でなければ(2)に対応する規則をみたしません．この意味で $SU_q(2)$ は群ではありません．そこで，別種の積 $w_2 \oplus w_1$ を

$$w_2 \oplus w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2\otimes\alpha_1 - \nu\gamma_2^*\otimes\gamma_1 & -\nu(\gamma_2^*\otimes\alpha_1^* + \alpha_2\otimes\gamma_1^*) \\ \gamma_2\otimes\alpha_1 + \alpha_2^*\otimes\gamma_1 & \alpha_2^*\otimes\alpha_1^* - \nu\gamma_2\otimes\gamma_1^* \end{pmatrix} \tag{5}$$

で定義します．但し，$\otimes$ や $*$ は $a_1, \cdots, b_n \in A$ に対して

$$\begin{aligned} &(a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n)^* = a_1^*\otimes a_2^*\otimes\cdots\otimes a_n^*, \\ &(a_1 a_2 \cdots a_n)^* = a_n^*\cdots a_2^* a_1^*, \\ &(a_i^*)^* = a_i, \\ &(a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n)(b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_n) = a_1b_1\otimes a_2b_2\otimes\cdots\otimes a_nb_n, \end{aligned} \tag{6}$$

に従うとします．複素数 c は $\otimes$ をすり抜けるものとし，c^* は c の共役複素数であるとします．すると，$w_2 \oplus w_1$ に対しては

$$\begin{aligned} &(w_2\oplus w_1)_{22} = (w_2\oplus w_1)_{11}^* \equiv \alpha'^*, \\ &(w_2\oplus w_1)_{12} = -\nu(w_2\oplus w_1)_{21}^* \equiv -\nu\gamma'^*, \\ &\alpha'^*\alpha' + \gamma'^*\gamma' = I\otimes I, \quad \alpha'\alpha'^* + \nu^2\gamma'\gamma'^* = I\otimes I, \\ &\gamma'\gamma'^* = \gamma'^*\gamma', \quad \alpha'\gamma' = \nu\gamma'\alpha', \quad \alpha'\gamma'^* = \nu\gamma'^*\alpha', \\ &\gamma'^*\alpha'^* = \nu\alpha'^*\gamma'^*, \quad \gamma'\alpha'^* = \nu\alpha'^*\gamma', \end{aligned} \tag{7}$$

のような(1)，(2)と類似の規則が成立します．より一般に，

$w_m \obot w_{m-1} \obot \cdots \obot w_1$ は (1), (2) で I を $I_m = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I$ (m 個の積) で置き換えた関係をみたすことになります.

$$(w_m \obot w_{m-1} \obot \cdots \obot w_1)^{-1}_{kl} \equiv (w_m \obot w_{m-1} \obot \cdots \obot w_1)^*_{kl} \tag{8}$$

とすれば

$$(w_m \obot \cdots \obot w_1)^{-1} (w_m \obot \cdots \obot w_1) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \tag{9}$$

が成立します. 積 $\obot$ がこのような性質を持つことを重視して, 以下では $SU_q(2)$ 変換の積とは $w_m \obot w_{m-1} \obot \cdots \obot w_1$ やその群論的表現のことであると考えることにします.

(2) から w のユニタリ性

$$\sum_{k=1}^{2} w_{ik} w_{jk}^* = \sum_{k=1}^{2} w_{ki}^* w_{kj} = \delta_{ij} I \quad , \quad i,j=1,2, \tag{10}$$

に加えて

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^{2} (\sigma^{-1})_{kl}\, w_{ik}^* w_{jl} = (\sigma^{-1})_{ij} I \quad , \quad i,j=1,2, \\ &\sum_{k,l=1}^{2} \sigma_{kl}\, w_{ki} w_{lj}^* = \sigma_{ij} I \quad , \quad i,j=1,2, \end{aligned} \tag{11}$$

が導かれます. ここで, σ は次式で与えられます:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu^2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

$SU_q(2)$ の表現論は $SU(2)$ の表現論の q-変形として得られることが知られています. $a, b \in A$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ として, A 上の余積 $\Phi: A \to A \otimes A$ は

$$\Phi(w) = w \obot w, \tag{13}$$

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)\ , \quad \Phi(c_1 a + c_2 b) = c_1\Phi(a) + c_2\Phi(b) \tag{14}$$

で定義されます．$\mathcal{W}$ の N 次元表現 $W \in M_N(A)$ は

$$\Phi(W_{ij}) = (W \oplus W)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} W_{ik} \otimes W_{kj} \tag{15}$$

によって定義されますが，このうち特に (11) に対応する

$$\sum_{k,l=1}^{N} (\sigma^N)^{-1}_{kl}\, W^*_{ik} W_{jl} = (\sigma^N)^{-1}_{ij}\, I\ ,$$

$$\sum_{k,l=1}^{N} \sigma^N{}_{kl}\, W_{ki} W^*_{lj} = \sigma^N_{ij}\, I\ , \tag{16}$$

$$\sigma^N{}_{kl} = \nu^{2(k-1)}\, \delta_{kl}\ ,$$

をみたすものを考えます．この表現は［MMNNU］で調べられており，W_{ij} は little-q ヤコビ多項式で表されます．$\mathcal{W}$ から $\mathcal{W}_m \oplus \mathcal{W}_{m-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_1$ を作ったのと同様に W から $W_m \oplus W_{m-1} \oplus \cdots \oplus W_1$ を作り，その全体を C^N_m と書けば，$W \in C^N_m$ は (16) で I を I_m で置き換えた式をみたします．

ゲージ場理論では各時空点 x で定義された C^N_m，即ち $C^N_m(x)$ を考えることになります．従って，目標は $W(x) \in C^N_m(x)$, ${}^\forall N, {}^\forall m$, による変換のもとで不変な理論の構成ということになります．

§3. ゲージ場

［Wo 1］に従って $\alpha, \gamma, \alpha^*, \gamma^*$ 等の微分を定義し，それから時空座標 x^μ についての微分 D_μ を

$$D_\mu D_\nu\, g[x] = D_\nu D_\mu\, g[x]\,,$$
$$D_\mu\left(g[x]\,h[x]\right) = \left(D_\mu g[x]\right)h[x] + g[x]\,D_\mu h[x], \tag{17}$$

をみたすように設定することができます．ここで，$g[x]$や$h[x]$は群座標のx依存性を通じてxに依存すると共にxの陽依存性も持つ関数と想定されています．$W(x) = W_m(x) \oplus \cdots \oplus W_1(x) \in C_m^N(x)$とし，ゲージ$W$での$SU_q(2)$ゲージ場$A_\mu^W(x)$を

$$A_\mu^W(x) = W(x)\{I_{m-1} \otimes a_\mu^{W_1}(x)\}W(x)^{-1} - (ig)^{-1}(D_\mu W(x))\,W(x)^{-1},$$
$$a_\mu^{W_1}(x) = \sum_{k=0}^{2} \chi_k(W_1)\, a_{k,\mu}(x), \tag{18}$$

によって導入します．$a_{k,\mu}(x)$はゲージに依存しない成分場ですが，それのみたすべき代数や$\chi_k(W_1) \in M_N(\mathbb{C})$の性質については[H]を参照して下さい．$A_\mu^W(x)$の$W'(x) \in C_n^N(x)$によるゲージ変換$(A_\mu^W(x))^{W'}$を

$$\begin{aligned}(A_\mu^W(x))^{W'} = {} & (W'(x) \otimes I_m)(I_n \otimes A_\mu^W(x))(W'(x)^{-1} \otimes I_m) \\ & - (ig)^{-1}(D_\mu W'(x))\,W'(x)^{-1} \otimes I_m\end{aligned} \tag{19}$$

によって定義すると

$$(A_\mu^W(x))^{W'} = A_\mu^{W' \oplus W}(x) \tag{20}$$

が成立します．(20)が前節で述べた観点を実現していることになります．$a_{k,\mu}(x)$や$D_\mu W_i(x)$の属する空間をΓ^xと書くと，$A_\mu^W \in M_N((\Gamma^x)^{\otimes m})$であるのに対し$(A_\mu^W)^{W'} \in M_N((\Gamma)^{\otimes(m+n)})$となっていますから，理論全体としては$\bigoplus_{m=0}^{\infty} M_N((\Gamma^x)^{\otimes m})$上で構成されていることになります．

ゲージWに於ける場の強さ $F_{\mu\nu}^{W}(x)$ を

$$F_{\mu\nu}^{W}(x) = [\, \nabla_\mu^{W},\ \nabla_\nu^{W}\,],\quad \nabla_\mu^{W} = D_\mu + ig A_\mu^{W}(x), \tag{21}$$

とすれば，$F_{\mu\nu}^{W}(x)$ は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{W}(x) &= W(x)\,\{ I_{m-1} \otimes f_{\mu\nu}^{W_1}(x) \}\, W(x)^{-1}, \\ f_{\mu\nu}^{W_1}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \chi_k(W_1)\, f_{k,\mu\nu}(x), \\ f_{k,\mu\nu}(x) &= D_\mu a_{k,\nu}(x) - D_\nu a_{k,\mu}(x) + ig \sum_{p,q=0}^{2} d_{kpq}\, a_{p,\mu}(x)\, a_{q,\nu}(x), \end{aligned} \tag{22}$$

と与えられます．ここで d_{kpq} は $U_q(su(2))$ の構造定数です．

これらの定義から $F_{\mu\nu}^{W}(x)$ の $W'(x)$ によるゲージ変換は

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu}^{W}(x))^{W'} &= (W'(x) \otimes I_m)(I_n \otimes F_{\mu\nu}^{W}(x))(W'(x)^{-1} \otimes I_m) \\ &= F_{\mu\nu}^{W' \textcircled{\perp} W}(x) \end{aligned} \tag{23}$$

となることが導かれます．更に，ゲージ変換のもとで不変に留まる条件式として

$$\begin{aligned} &(A_\mu^{W}(x))^{\dagger} = A_\mu^{W}(x),\quad (F_{\mu\nu}^{W}(x))^{\dagger} = F_{\mu\nu}^{W}(x), \\ &\mathrm{Tr}(\sigma^N A_\mu^{W}(x)) = \mathrm{Tr}(\sigma^N F_{\mu\nu}^{W}(x)) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

を課すことが出来ることが分ります．但し，† は（転置）⊗ * を意味します．

§4. ラグランジアン

次に，前節で定義されたゲージ変換のもとで不変なラグランジアンを求めます．$\mathrm{Tr}(\chi_k(W_1)\chi_\ell(W_1))$ や $\mathrm{Tr}(\sigma^N \chi_k(W_1)\chi_\ell(W_1))$ 等

に比べて $\mathcal{S}^W_{k\ell} = \mathrm{Tr}\left(\rho^N \chi_k(W)(\rho^N)^2 \chi_\ell(W)\right)$, $\rho^N = (\sigma^N)^{-1}$, $W \in C^N_1$, $k, \ell = 0, 1, 2$, は，それから作った

$$\mathcal{J}_{k\ell} = \kappa^W \mathcal{S}^W_{k\ell}, \quad \kappa^W = -\nu\left(\mathcal{S}^W_{20}\right)^{-1}/8 \tag{25}$$

が W に依存しないという特徴を持っています．$W(x) \in C^N_m(x)$ とし，$F^W_{\mu\nu}(x)$ の 2 次関数 $\mathcal{L}^W(x)$ を

$$\mathcal{L}^W(x) = \kappa^W \,\mathrm{Tr}\left(\sigma^N G^W_{\mu\nu}(x)\, G^{W,\mu\nu}(x)\right),$$

$$G^W_{\mu\nu}(x) = \tau(W)\, F^W_{\mu\nu}(x)\, \tau(W)^\dagger, \tag{26}$$

$$\tau(W) = \left(W_m(x) \oplus \cdots \oplus W_2(x) \oplus \rho^N I\right) W(x)^{-1},$$

で定義すると，$\mathcal{L}^W(x)$ は

$$\mathcal{L}^W(x) = I_{m-1} \otimes \mathcal{L}(x), \tag{27}$$

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k,\ell=0}^{2} \mathcal{J}_{k\ell}\, f_{k,\mu\nu}(x)\, f_\ell^{\mu\nu}(x), \tag{28}$$

のように，自然数 m を通じてのみ $W(x)$ に依存します．そこで，同値関係

$$I \otimes a \sim a, \quad a \in A \tag{29}$$

を導入すれば

$$\mathcal{L}^W(x) \sim \mathcal{L}(x) \tag{30}$$

となります．同値関係 (30) を $\mathcal{L}^W(x)$ の $SU_q(2)$ 不変性と解釈することにします．この解釈は $SU_q(2)$ 変換を ⊕ 積を用いて定義して来たことに由来します．

(25) の $\mathcal{J}_{k\ell}$ や (22) の d_{kpq} を具体的に求めることにより $\mathcal{L}(x)$ は下のように表されます：

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{8}\left\{f_{0,\mu\nu}(x)^* f_0^{\mu\nu}(x)+(1+\nu^2)f_{1,\mu\nu}(x)^* f_1^{\mu\nu}(x)+f_{2,\mu\nu}(x)^* f_2^{\mu\nu}(x)\right\},$$

$$\begin{aligned}
f_{0,\mu\nu} &= D_\mu a_{0,\nu}-D_\nu a_{0,\mu}+ig(1+\nu^2)\{\nu^{-2}a_{1,\mu}a_{0,\nu}-\nu^2 a_{0,\mu}a_{1,\nu}\},\\
f_{1,\mu\nu} &= D_\mu a_{1,\nu}-D_\nu a_{1,\mu}+ig\{\nu^{-1}a_{2,\mu}a_{0,\nu}-\nu a_{0,\mu}a_{2,\nu}\},\\
f_{2,\mu\nu} &= D_\mu a_{2,\nu}-D_\nu a_{2,\mu}+ig(1+\nu^2)\{\nu^{-2}a_{2,\mu}a_{1,\nu}-\nu^2 a_{1,\mu}a_{2,\nu}\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

$\nu=1$ の時 (31) の $\mathcal{L}(x)$ が Yang-Mills のラグランジアンに一致することは云うまでもありません.

以上⊥積によって定義されたゲージ変換と [Wo1] の微分法に基いて議論しましたが, [BM], [C], [Wa] 等では, 異なった観点から [Wo2] に基いた定式化が展開されています.

財団法人鹿島学術振興財団の研究助成に感謝致します.

[BM] T. Brzeziński and S. Majid, Phys. Lett. B298, 339-343, 1993.

[C] L. Castellani, Phys. Lett. B292, 93-98, 1992.

[H] M. Hirayama, Prog. Theor. Phys. 88, 111-127, 1992.

[MMNNU] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and K. Ueno, J. Funct. Anal. 99, 357-386, 1991.

[Wa] S. Watamura, Tohoku Univ. preprint TU-411, 1992.

[Wo1] S. L. Woronowicz, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 23, 117-181, 1987.

[Wo2] S. L. Woronowicz, Commun. Math. Phys. 122, 125-170, 1989.