数理解析研究所講究録
第 870 巻 1994 年 153-167

Predator-prey 確率モデルにおけるパラメーターの統計的推定について

嶋田　司 (Tsukasa Shimada)

金沢大学教養部　藤曲　哲郎 (Tetsurou Fujimagari)

Abstract

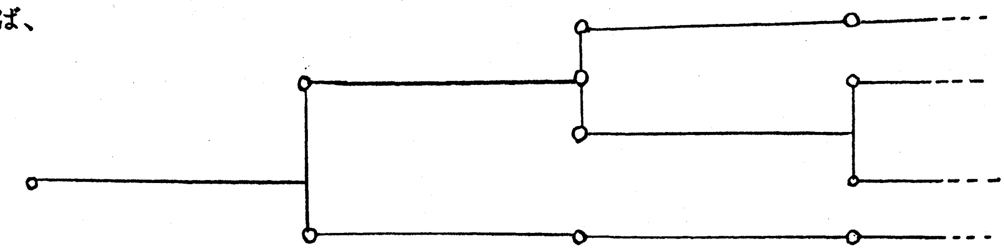
ある生物において、各個体が独立同分布に従って子孫を残すといったプロセスを考える。このようなプロセスを Galton-Watson branching process という。このプロセスにおいて、1 個体が残す子孫の数の期待値 μ が $\mu \leq 1$ ならばプロセスは確率 1 で絶滅し、$\mu > 1$ ならば、非絶滅確率は正でプロセスが絶滅しなければ指数関数的に増大することが知られている。よって、μ を推定することが重要となる。Galton-Watson branching process について、μ の推定量は既に知られており各世代数の観測によって得られる。ここでは Galton-Watson branching process を少し複雑にしたもので、2 つの異なる生物で一方 (predator) が他方 (prey) を捕食するといった、プロセスを考える（ただし、n 世代の predator は n 世代の prey しか捕食しないとする。）。このようなプロセスを predator-prey process という。このプロセスにおいて、各世代の predator の個体数、predator に捕食された後の成長した各世代の prey の個体数、predator 1 個体が捕食する prey の個体数の分布を観測したときの prey 1 個体が残す子孫数の期待値の推定量を求め、さらにその統計的性質を調べた。

0.Galton-Watson Branching Process

ある個体が独立同分布に従って子孫を残すといったプロセスを考える。このようなプロセスを (Bienayme-)Galton-Watson branching process という。ξ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$ を非負整数値をとる独立同分布 (i.i.d.) な確率変数とし、ξ_{11} の期待値 $\mathbf{E}\,\xi_{11} = \mu < \infty$ とする。このとき Galton-Watson branching process X_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は次のように定義される。

$$X_0 = x_0 \ , \ X_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{kj} & \text{if } X_{k-1} \neq 0 \\ 0 & \text{if } X_{k-1} = 0 \end{cases} .$$

つまり ξ_{ij} は $i-1$ 世代における j 番目の個体が残す子孫の数であり、X_k は k 世代の個体数となる。例えば、



$X_0 = 1$　　$X_1 = 2$　　$X_2 = 4$　　$X_3 = 5$

Galton-Watson Branching Process について、次のような結果がある。証明は Guttorp(1991) [5] を参照。ただし簡単のために、ξ_{11} の分散 $\mathbf{Var}(\xi_{11}) < \infty$ とする。

Theorem

(1)

$$\mathbf{P}(\xi_{11} = 1) \neq 1 \text{ ならば、} \mathbf{P}(X_n \longrightarrow \infty \ or \ X_n \longrightarrow 0) = 1$$

(2) $\mu \leq 1$ のとき、このプロセスは確率 1 で絶滅し、$\mu > 1$ のときプロセスが絶滅しないという条件(この確率は 0 でない。)の下で、このプロセスは指数関数的に増大する。つまり十分大きな n に対して、$X_n \sim W\mu^n$ ($W > 0$) である。

よって μ を推定することが重要な問題となってくる。μ の推定量として以下のものが知られている。

$$\bar{\mu}_n = \begin{cases} \dfrac{X_n}{X_{n-1}} & \text{if } X_{n-1} > 0 \\ 1 & \text{if } X_{n-1} = 0 \end{cases} \quad , \quad \hat{\mu}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}}.$$

これらはプロセスが絶滅しないという条件の下で、μ の一致推定量である。また $\hat{\mu}_n$ は最尤推定量でもある。

1.Predator-Prey Process

次に 2 種類の異なる生物で一方が他方を捕食するといった単純なプロセスを考える。ある n 世代の predator は n 世代の prey しか捕食しないとする。X_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を predator の n 世代の個体数、Y_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を prey の predator に捕食された後の n 世代の個体数とする。このプロセスは Coffey and Bühler によって論文 [3] で定義されている。

$\{\xi_{ij} : i, j \in N\}$ 、$\{\eta_{ij} : i, j \in N\}$ 、$\{\nu_{ij} : i, j \in N\}$ $(N = 1, 2, \cdots)$ をそれぞれ独立同分布な非負整数値を取る確率変数の独立な集合とする。ξ_{ij} は $i-1$ 世代における j 番目の predator が残す子孫の個体数、η_{ij} は $i-1$ 世代における j 番目の prey が残す子孫の個体数、ν_{ij} は i 世代における j 番目の predator が食べる prey の数を表す。

$$\mathbf{E}\xi_{11} = \mu \ , \ \mathbf{E}\eta_{11} = m \ , \ \mathbf{E}\nu_{11} = \alpha.$$

$$\mathbf{Var}(\xi_{11}) = \sigma^2 \ , \ \mathbf{Var}(\eta_{11}) = \varphi^2 \ , \ \mathbf{Var}(\nu_{11}) = \beta^2.$$

としてすべて有限とする。自明な場合を避けるために $\mu, m > 1$, $\alpha > 0$ とする。predator の n 世代の個体数を表す X_n は前節の Galton-Watson branching process とし、

$$U_n = \sum_{j=1}^{X_n} \nu_{nj}$$

とする。U_n は n 世代の predator が食べる prey の総個体数。prey の n 世代の個体数を表す Y_n を次のように定義する。$\mathbf{P}(Y_0=y_0)=1$ 、$n \geq 1$ について、

$$Y_n = \left(\sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nj} - U_n\right) \vee 0.$$

Theorem(Coffey and Bühler(1991),Alsmeyer(1993))

(a) $m \leq \mu$ ならば、任意の x_0, y_0 に対して、

$$\mathbf{P}(Y_n \longrightarrow 0 \mid X_n \not\longrightarrow 0) = 1.$$

(b) $m > \mu$ ならば、各 x_0 に対して、y_0 が十分大きいとき、

$$\mathbf{P}(Y_n \not\longrightarrow 0\ ,\ X_n \not\longrightarrow 0\ ) > 0.$$

(c)

$$\frac{Y_n}{m^n} \longrightarrow W_y \quad \text{a.s.}$$

さらに、$\mathbf{P}(W_y > 0 \mid X_n \not\longrightarrow 0) = \mathbf{P}(Y_n \not\longrightarrow 0 \ \mid \ X_n \not\longrightarrow 0\ )$.

この定理の (b) (Coffey and Bühler [3] を参照。) は predator と prey が共存可能であることを示しており、(c) (Alsmeyer [1] を参照。) では prey が Galton-Watson Branching Process 同様に、絶滅しなければ、指数関数的に増大することを示している。

今、観測者が n 世代までの X_k, Y_k と predator が捕食する prey の数の分布を観測するときに、1 個体の prey が残す子孫数の期待値 m の推定量を求めたい。つまり prey が実際に生む子孫の数は観測できなくても、predator に捕食された後の成長した prey の数から m を推定することになる。

2.Consistent Estimators of m

次の Lemma は大数の法則を 2 重列の場合に一般化したものである。証明は Billingsley [2] を参考にした。

Lemma 2.1. X_{ij} を非負実数値を取る独立同分布な確率変数とし、ある $a > 0$ に対して $\mathbf{E}(\ X_{11}^{\frac{3}{2}+a}\ ) < \infty$ とする。

$$S_n = \frac{X_{n1} + \cdots + X_{nn}}{n}$$

とすれば、

$$S_n \longrightarrow \mathbf{E}\ X_{11} \quad a.s. \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Proof: $0 < a < \frac{1}{2}$ に対して $\delta = \dfrac{2a}{1-2a} > 0$ とし、

$$Y_{ij} = X_{ij} 1_{\{X_{ij} < i^{1+\delta} j^{1+\delta}\}}\ ,\ S_n^* = \sum_{k=1}^n Y_{nk}$$

とする。Y_{ij} は独立なので、

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(S_n^*) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{Var}(\ Y_{nk}\ ) \\
&\le \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\ Y_{nk}^2\ ) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_{nk}^2 1_{\{X_{nk} \le n^{1+\delta} k^{1+\delta}\}}] \\
&\le n\mathbf{E}[X_{11}^2 1_{\{X_{11} \le n^{2(1+\delta)}\}}].
\end{aligned}$$

$\alpha > 1$ に対して $u_n = [\alpha^n]$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して Chebyshev の不等式により、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}[|\ \frac{S_{u_n}^* - \mathbf{E}S_{u_n}^*}{u_n}\ | > \epsilon] &\le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\epsilon^2 u_n^2} \mathbf{Var}(\ S_{u_n}^*\ ) \\
&\le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\epsilon^2 u_n^2} u_n \mathbf{E}[X_{11}^2 1_{\{X_{11} \le u_n^{2(1+\delta)}\}}] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{E}[X_{11}^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{u_n} 1_{\{X_{11} \le u_n^{2(1+\delta)}\}}].
\end{aligned}$$

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}\ \ ,\ \ N = \min\{n\ :\ x \le u_n^{2(1+\delta)}\}$$

とする。$y \ge 1$ に対して $y \le 2[y]$ より、

$$\sum_{u_n^{2(1+\delta)} \ge x} \frac{1}{u_n} \le 2 \sum_{n \ge N} \alpha^{-n} = K\alpha^{-N} \le K x^{-\frac{1}{2(1+\delta)}}.$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{E}[X_{11}^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{u_n} 1_{\{X_{11} \le u_n^{2(1+\delta)}\}}] &\le \frac{K}{\epsilon^2} \mathbf{E}[X_{11}^{2-\frac{1}{2(1+\delta)}}] \\
&\le \frac{K}{\epsilon^2} \mathbf{E}[X_{11}^{\frac{3}{2}+a}] < \infty.
\end{aligned}$$

よって Borel-Cantelli lemma により、

$$\frac{S_{u_n}^* - \mathbf{E}S_{u_n}^*}{u_n} \longrightarrow 0\ \ a.s.$$

$$\begin{aligned}
|\ \mathbf{E}\ X_{11} - \mathbf{E}\ Y_{nk}\ | &= \mathbf{E}\ X_{nk} 1_{\{X_{nk} > n^{1+\delta} k^{1+\delta}\}} \\
&\le \mathbf{E}\ X_{nk} 1_{\{X_{nk} > n^{1+\delta}\}} \\
&= \mathbf{E}\ X_{n1} 1_{\{X_{n1} > n^{1+\delta}\}} \quad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, Y_{nk} = \mathbf{E}\, X_{11}$$

が k について一様収束なので、

$$\frac{\mathbf{E}\, S^*_{u_n}}{u_n} \longrightarrow \mathbf{E}\, X_{11} \quad (n \longrightarrow \infty).$$

以上より、

$$\frac{S^*_{u_n}}{u_n} \longrightarrow \mathbf{E}\, X_{11} \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

次に、$\mathbf{P}(X_{nk} \neq Y_{nk} \quad \text{i.o.}(n,k)) = 0$ を示す (i.o.= infinitely often)。

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k)} \mathbf{P}(X_{nk} \neq Y_{nk}) &= \sum_{(n,k)} \mathbf{P}(X_{nk} \geq n^{1+\delta}k^{1+\delta}) \\
&\leq \sum_{(n,k)} \frac{1}{n^{1+\delta}k^{1+\delta}} \mathbf{E}\, X_{11} \\
&\leq \mathbf{E}\, X_{11} \sum_{n\geq 0} n^{-(1+\delta)} \sum_{k\geq 0} k^{-(1+\delta)} < \infty.
\end{aligned}$$

よって Borel-Cantelli lemma により、

$$\mathbf{P}(X_{nk} \neq Y_{nk} \text{ i.o. } (n,k)) = 0.$$

以上より、

$$\left| \frac{S^*_n - S_n}{n} \right| \leq \frac{\sum_{1\leq k\leq n} | X_{nk} - Y_{nk} |}{n} \longrightarrow 0 \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

よって、

$$\frac{S_{u_n}}{u_n} \longrightarrow \mathbf{E}\, X_{11} \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

$u_n \leq k \leq u_{n+1}$ とすれば $X_{ij} \geq 0$ より、

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \frac{S_{u_n}}{u_n} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{S_{u_{n+1}}}{u_{n+1}} \text{ a.s.}$$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$ より、

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}\, X_{11} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{S_k}{k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{k} \leq \alpha \mathbf{E}\, X_{11} \text{ a.s.}$$

ここで $\alpha \to 1$ とすれば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}\, X_{11}.$$

Q.E.D.

X_n は Galton-Watson Branching Process なので、

$$\mathbf{P}(X_n \longrightarrow \infty \quad or \quad 0) = 1$$

であった。次の Lemma では Y_n についてこれと同様の議論を行う。今後、A_1 を predator と prey が共に絶滅しない集合とする。つまり、

$$A_1 = \{Y_n \not\rightarrow 0 \ , \ X_n \not\rightarrow 0\} .$$

また、

$$A_2 = \{Y_n \not\rightarrow 0 \ , \ X_n \longrightarrow 0\}$$

とする。

Lemma 2.2. $\mathbf{P}(Y_n \longrightarrow \infty \quad or \quad 0) = 1.$

Proof:

$$\{Y_n \not\rightarrow 0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{Y_n > 0\}.$$

ここで、$n \geq 1$ のとき

$$Y_n = \sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nj} - U_n = \sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nj} - \sum_{j=1}^{X_n} \nu_{nj} > 0.$$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n, Y_0, \cdots, Y_{n-1})$ とすれば、$\{Y_n \not\rightarrow 0\}$ 上では、

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(\sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nj} - \sum_{j=1}^{X_n} \nu_{nj} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= Y_{n-1}\mathbf{E}\eta_{11} - X_n \mathbf{E}\nu_{11} \\ &= mY_{n-1} - \alpha X_n. \end{aligned}$$

これより、$n \geq 1$ のとき $\{Y_n \not\rightarrow 0\}$ 上で、

$$X_n < \frac{m}{\alpha} Y_{n-1}.$$

また、Theorem 1.1.(1) より $\{X_n \not\rightarrow 0\} = \{X_n \longrightarrow \infty\}$ なので、$Y_n \longrightarrow \infty$. 以上より、

$$A_1 \subset \{Y_n \longrightarrow \infty\}.$$

また A_2上では $X_N = 0$ なる N が存在して、$k \geq N+1$ に対して Y_k は Galton-Watson branching process であるから 、A_2 上で $Y_n \longrightarrow \infty$. よって、

$$\{Y_n \not\rightarrow 0\} = A_1 \cup A_2 \subset \{Y_n \longrightarrow \infty\}.$$

逆は明らかなので、$\{Y_n \not\rightarrow 0\} = \{Y_n \longrightarrow \infty\}$. **Q.E.D.**

以下の Theorem 2.1. と Theorem 2.2. で m についての推定量:

$$\bar{m}_n = \frac{Y_n + \alpha X_n}{Y_{n-1}} \quad , \quad \tilde{m}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + \alpha X_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}$$

が共に一致推定量であることを示す。

Theorem 2.1. $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$上では、 $\bar{m}_n \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$.

Proof: $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上では、

$$Y_n = \sum_{i=1}^{Y_{n-1}} \eta_{ni} - U_n$$

より、

$$\bar{m}_n = \frac{Y_n + \alpha X_n}{Y_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{Y_{n-1}} \eta_{ni} - U_n + \alpha X_n}{Y_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{Y_{n-1}} \eta_{ni}}{Y_{n-1}} + \frac{\alpha X_n - \sum_{i=1}^{X_n} \nu_{ni}}{Y_{n-1}}.$$

第一項について Lemma 2.2. より $\{Y_n \not\longrightarrow 0\} = \{Y_n \longrightarrow \infty\}$ なので Lemma 2.1. より、

$$\frac{\sum_{i=1}^{Y_{n-1}} \eta_{ni}}{Y_{n-1}} \longrightarrow m \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty)$$

第二項について A_1 上と A_2 上で分けて証明する。A_2 上では、

$$\left| \frac{\alpha X_n - U_n}{Y_{n-1}} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}(n \longrightarrow \infty)$$

は明らか。A_2 上では Lemma 2.2. の証明より、

$$X_n < \frac{m}{\alpha} Y_{n-1}.$$

また Lemma 2.1. より、

$$\frac{\sum_{i=1}^{X_n} \nu_{ni}}{X_n} \longrightarrow \alpha \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty)$$

であるから、

$$\left| \frac{\alpha X_n - U_n}{Y_{n-1}} \right| = \left| \frac{\alpha X_n - \sum_{i=1}^{X_n} \nu_{ni}}{X_n} \right| \frac{X_n}{Y_{n-1}} \leq \left| \alpha - \frac{\sum_{i=1}^{X_n} \nu_{ni}}{X_n} \right| \frac{m}{\alpha} \longrightarrow 0 \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty)$$

以上より、$\tilde{m}_n = \dfrac{Y_n + \alpha X_n}{Y_{n-1}} \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$. **Q.E.D.**

Theorem 2.2. $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上では、 $\tilde{m}_n \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$.

Proof:

$$
\begin{aligned}
\tilde{m}_n &= \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j + U_j) + \sum_{j=1}^n (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j + U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} + \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^{Y_{j-1}} \eta_{jk})}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} + \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}}.
\end{aligned}
$$

第一項について、

$$
\frac{\sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^{Y_{j-1}} \eta_{jk})}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \sum_{j=1}^n Y_{j-1} \frac{\sum_{k=1}^{Y_{j-1}} \eta_{jk}}{Y_{j-1}}.
$$

また Lemma 2.2. より $\{Y_n \not\longrightarrow 0\} = \{Y_n \longrightarrow \infty\}$ よって Lemma 2.1. より、

$$
\frac{\sum_{k=1}^{Y_{j-1}} \eta_{jk}}{Y_{j-1}} \longrightarrow m \text{ a.s.} \quad (j \longrightarrow \infty)
$$

よって Toeplitz Lemma より、

$$
\frac{1}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \sum_{j=1}^n Y_{j-1} \frac{\sum_{k=1}^{Y_{j-1}} \eta_{jk}}{Y_{j-1}} \longrightarrow m \text{ a.s.}
$$

第二項について Theorem 2.1. の証明と同様に A_1 上と A_2 上で分けて証明する。

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \right| &\leq \frac{\sum_{j=1}^n \left| \alpha X_j - \sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \right|}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n X_j \left| \alpha - \frac{1}{X_j} \sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \right|}{\sum_{j=1}^n X_j} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}}.
\end{aligned}
$$

A_2 上では、

$$
\left| \frac{\alpha X_n - U_n}{Y_{n-1}} \right| \longrightarrow 0.
$$

よって Toeplitz Lemma から、

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\sum_{j=1}^n (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \right| &\leq \frac{\sum_{j=1}^n \left| \alpha X_j - U_j \right|}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^n Y_{j-1}} \sum_{j=1}^n Y_{j-1} \left| \frac{\alpha X_j - U_j}{Y_{j-1}} \right| \longrightarrow 0 \text{ a.s.}
\end{aligned}
$$

A_1 上では Lemma 2.2. の証明より、

$$X_j < \frac{m}{\alpha} Y_{j-1}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mid \alpha - \frac{1}{X_j}\sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \mid}{\sum_{j=1}^{n} X_j} \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}} &\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mid \alpha - \frac{1}{X_j}\sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \mid}{\sum_{j=1}^{n} X_j} \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{m}{\alpha} Y_{j-1}}{\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mid \alpha - \frac{1}{X_j}\sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \mid}{\sum_{j=1}^{n} X_j} \frac{m}{\alpha}.
\end{aligned}$$

$X_n \longrightarrow \infty \ (n \longrightarrow \infty)$ より、Lemma 2.1. から、

$$\alpha - \frac{1}{X_j}\sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk} \longrightarrow 0 \text{ a.s. } (j \longrightarrow \infty).$$

また Toeplitz lemma より、

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j(\alpha - \frac{1}{X_j}\sum_{k=1}^{X_j} \nu_{jk})}{\sum_{j=1}^{n} X_j} \frac{m}{\alpha} \longrightarrow 0 \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

よって、

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^{n} (\alpha X_j - U_j)}{\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}} \right| \longrightarrow 0 \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

以上より $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上で、$\tilde{m}_n \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$ **Q.E.D.**

3. Maximum Likelihood Estimators(mle) of m

この節では n 世代までの X_k, Y_k の family tree 全体を観測したときの m の最尤推定量 (mle) について考える。

$$\begin{aligned}
H_k(n) &= \sharp\{\xi_{ij} = k \ , \ i \leq n \ , \ j \leq X_{i-1}\}, \\
I_k(n) &= \sharp\{\eta_{ij} = k \ , \ i \leq n \ , \ j \leq Y_{i-1}\}, \\
J_k(n) &= \sharp\{\nu_{ij} = k \ , \ i \leq n \ , \ j \leq X_i\}
\end{aligned}$$

として、$\mathbf{p} = (\ p_0, p_1, \cdots), \mathbf{q} = (\ q_0, q_1, \cdots), \mathbf{r} = (\ r_0, r_1, \cdots)$ をパラメーターにもつ尤度関数を $L(\ \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\ )$ とする。つまり、

$$L(\ \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\ ) = \prod_{k \geq 0} p_k^{I_k(n)} \prod_{k \geq 0} q_k^{J_k(n)} \prod_{k \geq 0} r_k^{H_k(n)}$$

とする。また、

$$\hat{m}_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j + \hat{\alpha}_n X_j)}{\sum_{j=1}^{n} Y_{j-1}}, \qquad \hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

とする。

Theorem 3.1. $\hat{m}_n$ は $\{Y_n \longrightarrow \infty\}$ 上で m の mle である。ここで $\hat{\alpha}_n$ は α の mle 。

Proof: $\mathbf{r}$ を固定して、

$$l(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \log L(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$$

とする。
λ, φ を Lagrange 未定乗数として次の尤度方程式を解く。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}\{ l(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda(\sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1) + \varphi(\sum_{j=0}^{\infty} q_j - 1)\} &= \frac{I_k(n)}{p_k} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \lambda}\{ l(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda(\sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1) + \varphi(\sum_{j=0}^{\infty} q_j - 1)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial q_k}\{ l(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda(\sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1) + \varphi(\sum_{j=0}^{\infty} q_j - 1)\} &= \frac{J_k(n)}{q_k} + \varphi = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \varphi}\{ l(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda(\sum_{i=0}^{\infty} p_i - 1) + \varphi(\sum_{j=0}^{\infty} q_j - 1)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} q_i - 1 = 0
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= -\sum_{k=1}^{\infty} I_k(n) = -\sum_{k=1}^{n-1} Y_k, \\
\hat{p}_k &= \frac{I_k(n)}{\sum_{l=1}^{n} Y_{l-1}}, \\
\hat{\varphi} &= -\sum_{k=1}^{\infty} J_k(n) = -\sum_{k=1}^{n} X_k, \\
\hat{q}_k &= \frac{J_k(n)}{\sum_{l=1}^{n} X_l}.
\end{aligned}$$

よって、

$$\hat{m}_n = \sum_{k=0}^{\infty} k\hat{p}_k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} kI_k(n)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}.$$

また $\{Y_n \longrightarrow \infty\}$ 上では、

$$\sum_{j=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nj} = Y_n + U_n$$

であるから、

$$\sum_{k=0}^{\infty} kI_k(n) = \sum_{k=1}^{n}(Y_k + U_k).$$

よって、

$$\hat{m}_n = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + U_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}.$$

U_n について考える。

$$\hat{\alpha}_n = \sum_{k=1}^{\infty} k\hat{q}_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} kJ_k(n)}{\sum_{k=1}^{n} X_k}.$$

これより、

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} kJ_k(n) = \hat{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

以上より、

$$\begin{aligned}\hat{m}_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + U_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}\\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + \hat{\alpha}_n X_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}.\end{aligned}$$

Q.E.D.

次の Theorem は $\hat{m}_n$ が $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上で一致推定量である事を証明している。

Theorem 3.2. $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上で、$\hat{m}_n \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$.

Proof: $\{Y_n \not\longrightarrow 0\}$ 上では、

$$Y_n + U_n = \sum_{k=1}^{Y_{n-1}} \eta_{nk}.$$

Lemma 2.2. より、$\{Y_n \not\longrightarrow 0\} = \{Y_n \longrightarrow \infty\}$ なので、Lemma 2.1. より、

$$\frac{Y_k + U_k}{Y_{k-1}} = \frac{\sum_{j=1}^{Y_{k-1}} \eta_{kj}}{Y_{k-1}} \longrightarrow m \quad \text{a.s.} \quad (n \longrightarrow \infty).$$

よって、Toeplitz Lemma から、

$$\begin{aligned}\hat{m}_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + \hat{\alpha}_n X_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}\\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k + U_k)}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}}\\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}} \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}\frac{Y_k + U_k}{Y_{k-1}} \longrightarrow m \quad \text{a.s.} \quad (n \longrightarrow \infty).\end{aligned}$$

以上より、$\hat{m}_n \longrightarrow m$ a.s. $(n \longrightarrow \infty)$. Q.E.D.

4.Concluding Remarks with Examples

Example (a)

下は predator-prey process についての 50 世代までのシミュレーション結果である。それぞれの offspring distribution (p_k は predator 1 個体が k 個体生む確率、q_k は prey 1 個体が k 個体生む確率) と ν_{11} の分布 (r_k は predator 1 個体が k 個体の prey を捕食する確率) は次のようにした。

$$
\begin{array}{llll}
p_0 = \frac{1}{5} & p_1 = \frac{1}{2} & p_2 = \frac{1}{5} & p_3 = \frac{1}{10} \\
q_0 = \frac{1}{5} & q_1 = \frac{2}{5} & q_2 \doteq \frac{3}{10} & q_3 = \frac{1}{10} \\
r_1 = \frac{1}{3} & r_2 = \frac{1}{3} & r_3 = \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

この場合 $\mu = 1.2$ 、$m = 1.3$ 、$\alpha = 2$ である。又、初期値は $x_0 = 10$ 、$y_0 = 200$ とした。

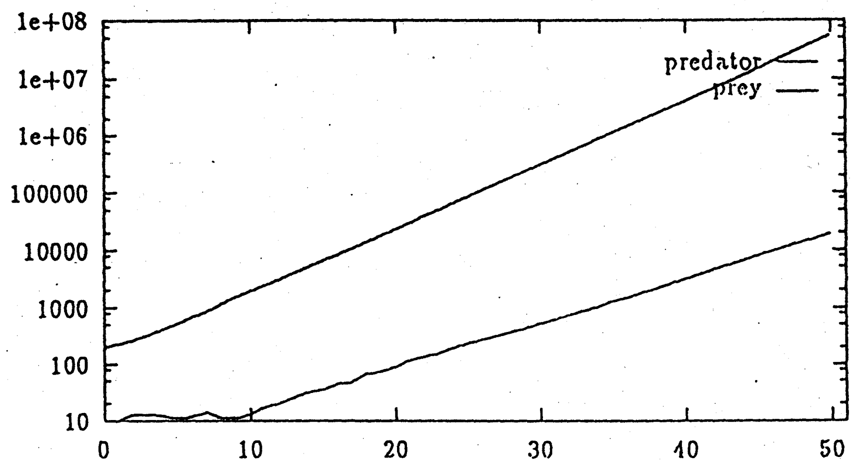


図 1.

X_n については絶滅しなければ指数関数的に増大することは知られている。さらに Alsmeyer(1993) の結果より、Y_n についても絶滅しなければ指数関数的に増大している。つまり、十分大きな n に対して $Y_n \sim W_y m^n$ ($W_y > 0$) となっている (図 1. 参照)。以上の結果の下で各 $\bar{m}_n$ 、$\tilde{m}_n$ を計算したものが次である。

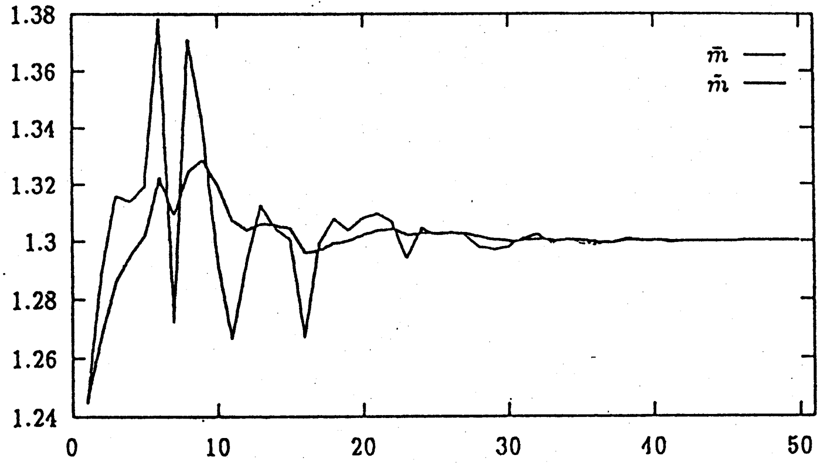


図 2.

$\bar{m}_n$ 、$\tilde{m}_n$ どちらともいい結果が得られているが、他の結果からも $\tilde{m}_n$ の方が収束は速そうである (図 2. 参照)。ただ応用上は 2 世代の観測だけで得られる $\bar{m}_n$ の方が利用しやすい。

α の推定量として次の $\bar{\alpha}_n$ 、$\tilde{\alpha}_n$ を計算してみた。

$$\bar{\alpha}_n = \frac{mY_{n-1} - Y_n}{X_n}, \tilde{\alpha}_n = \frac{m(Y_0 + \cdots + Y_{n-1}) - (Y_1 + \cdots + Y_n)}{X_1 + \cdots + X_n}$$

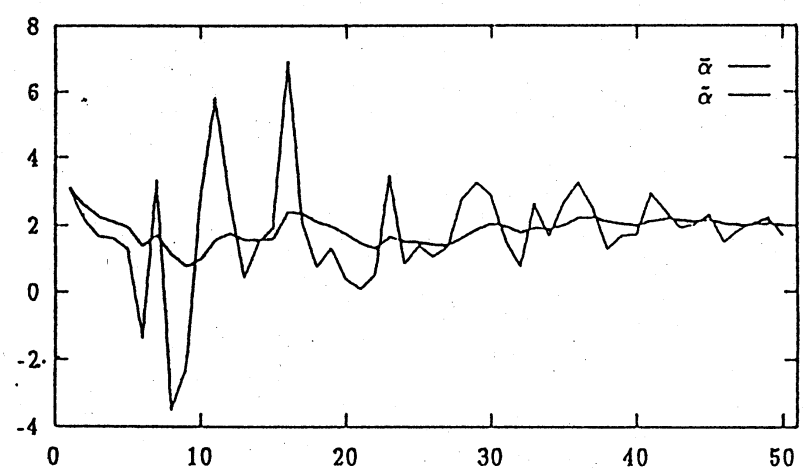


図 3.

他のシミュレーション結果からも $\bar{\alpha}_n$ については一致性は期待できそうであるが、$\bar{\alpha}_n$ についてこの例では、いい結果は得られていない (図 3. 参照)。ただし証明が完全ではないが $1 < \mu < m < \mu^2$ のとき、$\bar{\alpha}_n$ も $\bar{\alpha}_n$ も一致推定量であることが分る。(Example (b) 参照。)

Example (b)

$$p_0 = 0.00 \quad p_1 = 0.00 \quad p_2 = 0.30 \quad p_3 = 0.40 \quad p_4 = 0.30$$
$$q_0 = 0.00 \quad q_1 = 0.00 \quad q_2 = 0.00 \quad q_3 = 0.05 \quad p_4 = 0.95$$
$$r_1 = 0.00 \quad r_2 = 0.30 \quad r_3 = 0.30 \quad r_4 \text{ ‘ } 0.00$$

$$\mu = 3.00, \quad m = 3.95, \quad \alpha = 2.00$$

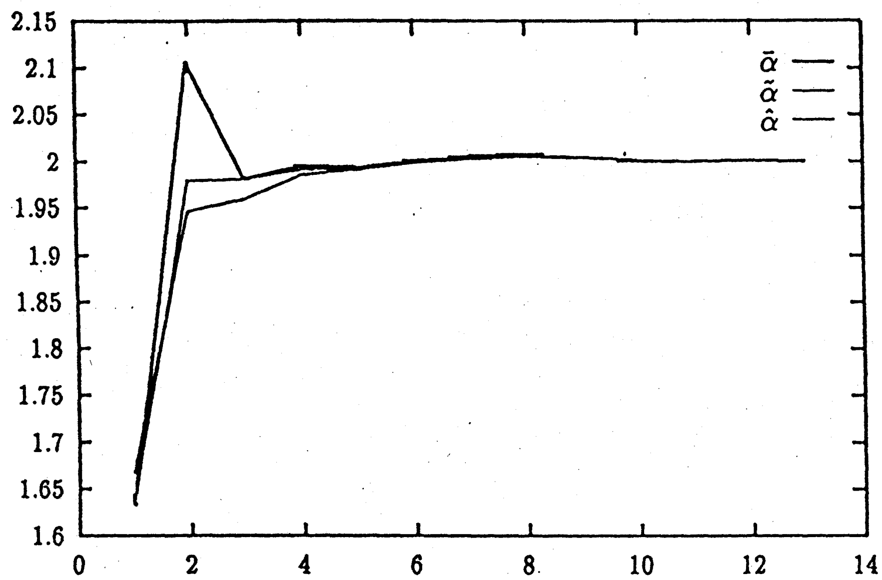


図 4.

Appendix

Chebyshev の不等式 $a^2 P(\mid X \mid \geq a\ ) \leq E\ X^2$

Borel-Cantelli Lemma $\sum_{i=1}^{\infty} P(\ A_n\ ) < \infty$ ならば、

$$P(\ A_n \text{ i.o. }) = 0.$$

ただし、i.o. は infinity often の略である。

The Martingale Convergence Theorem $X_n \geq 0$ が supermartingale ならば、

$$X_n \longrightarrow X \text{ a.s. } (n \longrightarrow \infty).$$

また、$E\ X \leq E\ X_0$.

以上の証明は Durrett [4] を参照。

Teoplitz Lemma a_k を実数値の数列とする。$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $b_n \longrightarrow \infty$, $x_n \longrightarrow x(n \longrightarrow \infty)$ ならば、

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \longrightarrow x \ \ (\ n \longrightarrow \infty\ ).$$

この証明は Loéve [6] を参照。

参考文献

[1] Alsmeyer,G.(1993) On the Galton-Watson predator-prey process.*Ann.Appl.Prob.***3(1)**,198-211.

[2] Billingsley,P.(1986) *Probability and Measure. 2nd edition.* Willey,New York.

[3] Coffey,J. and Bühler,W.J.(1991): The Galton-Watson predator-prey process. *J. Appl. Prob.* **28**,9-16.

[4] Durrett,R.(1991) *Probability Theorey and Examples.* Wadsworth Brooks/Cole,California.

[5] Guttorp,P.(1991) *Statistical Inference for Branching Processes.* Wiley,New York.

[6] Loéve,M.(1963) *Probability Theory. 3rd edition.* Van Nostrand,New York.