数理解析研究所講究録
第 871 巻 1994 年 248-254

LA資料1994.2.2

チェス盤上の配置問題について

茨城大教養　仙波一郎（Ichiro Semba）

1．はじめに

チェス盤上で、ある条件を満たす駒の置き方をすべて求める問題（配置問題）を４種類考察する。駒はクイーン、スーパー・クイーン、ナイト、ビショップ、ルークとする。配置問題を論理関数で表現し［1,2,3］、二分決定グラフ（BDD: Binary Decision Diagram）［4,5］を構成して解を求める。

問題１： チェス盤(マス目が縦にｎ個、横にｎ個)上で駒が互いにきき筋に入らないように最大何個の駒を置けるか、またその置き方は何通りか［6］。

問題２： チェス盤上のすべてのマス目がきき筋に入るようにするには最小何個の駒でよいか、またその置き方は何通りか［7,8］。
置かれた駒同士の関係について3通りの場合が考えられる。

場合(1)：駒同士がきき筋に入っても入らなくてもよい。
場合(2)：駒同士がきき筋に入る。
場合(3)：駒同士がきき筋に入らない。

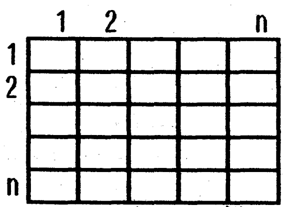
問題３： 線上無三問題
チェス盤上のどの方向にも3個の駒が線上（縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線）に並ばないように、最大何個の駒が置けるか（最大2n個は明らか）、またその置き方は何通りか［7,9］。

問題４： チェス盤上で、線上（縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線）に3個の駒が並ばないように置き、もう１つ空所に駒を置くとどこかの線上に駒が3個必ず並ぶようにするには、最小何個の駒でよいか。またその置き方は何通りか［9］。

ｎ×ｎのチェス盤上のマス目を(i,j)で表し、対応する論理変数とBDD変数をつぎのように定義する。

［論理変数］　1≦i≦n，1≦j≦n.

$x_{i,j}$ = 1，マス目(i,j)に駒が割り当てられた場合。
0，そうでない場合。



n×nのチェス盤

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

BDD変数

［BDD変数］　論理変数$x_{i,j}$に割り当てられるBDD変数を n(i-1)+j とする。

実験結果は、HITACHI workstation 3050R(80MByte)で、最大BDDノード数200万として実行した。

［駒のきき筋］

クイーン

■□□■□□■
□■□■□■□
□□■■■□□
■■■Q■■■
□□■■■□□
□■□■□■□
■□□■□□■

スーパー・クイーン

■□■□■□■□■
□■□□■□□■□
■□■■■■■□■
□□■■■■■□□
■■■■SQ■■■■
□□■■■■■□□
■□■■■■■□■
□■□□■□□■□
■□■□■□■□■

ナイト

□■□■□
■□□□■
□□K□□
■□□□■
□■□■□

ビショップ

■□□□■
□■□■□
□□B□□
□■□■□
■□□□■

ルーク

□□■□□
□□■□□
■■R■■
□□■□□
□□■□□

2. 配置問題

> 問題1：チェス盤上で駒が互いにきき筋に入らないように最大何個の駒を置けるか、またその置き方は何通りか。

［条件１］ n^2個のマス目からr個を選ぶ。

$$f_{n^2-r,r}(x_{1,1},\ldots,x_{1,n},x_{2,1},\ldots x_{2,n},\ldots,x_{n,1},\ldots,x_{n,n}) = 1$$

$f_{i,j}(y_1,y_2,\ldots,y_{i+j})$はi+j個の論理変数$y_1,y_2,\ldots,y_{i+j}$のうちj個の論理変数が値1をとるすべての組合せを表現する論理関数で、つぎの漸化式を用いて求める。

$$f_{0,j}(y_1,y_2,\ldots,y_j) = y_1y_2\ldots y_j \quad (j\geqq 1)$$

$$f_{i,0}(y_1,y_2,\ldots,y_i) = \bar{y}_1\bar{y}_2\ldots\bar{y}_i \quad (i\geqq 1)$$

$$f_{i,j}(y_1,y_2,\ldots,y_{i+j}) = f_{i,j-1}(y_1,y_2,\ldots,y_{i+j-1})y_{i+j} + f_{i-1,j}(y_1,y_2,\ldots,y_{i+j-1})\bar{y}_{i+j} \quad (i\geqq 1,\ j\geqq 1)$$

［条件２］ マス目(i,j)に駒が存在すると、そのきき筋に入るマス目(u,v)は空である。マス目(i,j)のきき筋に入るマス目(u,v)で、u＞iを満たすものの集合をP(i,j)とする。ただし、ｸｲｰﾝ,ｽｰﾊﾟｰ・ｸｲｰﾝ,ﾙｰｸについては、マス目(i,j),1≦j≦nに駒が1個存在する条件を付加する。

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\bar{x}_{i,j} + \prod_{(u,v)\in P(i,j)}\bar{x}_{u,v}\right)\right) = 1$$

$a+b_1b_2\cdots b_k=(a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_k)$を利用して、上式をa+bの形の積に変形する。論理変数a,bに対応するBDD変数をbdd(a),bdd(b)とする。a+bの積を計算していく順序はmin(bdd(a),bdd(b))の降順に行う。
このようにすると、BDDを構成するための時間はかかるが、途中のBDDサイズの変化は小さくなることが多い。したがって、BDDのノードを有効に利用でき、より大きいnに対する解が得られる。

［すべての置き方］

［条件１］・［条件２］＝１を満たす解で、rが最大のもの。

［実験結果］ 駒の最大個数と置き方の数（かっこ内）。BDD構成中にノード数が200万を越えた場合、****と書く。

n	クイーン	スーパークイーン	ナイト	ビショップ	ルーク
1	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	4(1)	2(4)	2(2)
3	2(8)	1(9)	5(2)	4(8)	3(6)
4	4(2)	2(20)	8(6)	6(16)	4(24)
5	5(10)	3(24)	13(1)	8(32)	5(120)
6	6(4)	4(44)	18(2)	10(64)	6(720)
7	7(40)	5(54)	25(1)	12(128)	7(5040)
8	8(92)	6(80)	32(2)	14(256)	8(40320)
9	9(352)	8(16)	41(1)	****	9(362880)
10	10(724)	10(4)	****		10(10!)
11	11(2680)	11(44)			11(11!)
12	****	12(6)			12(12!)
13		13(78)			13(13!)
14		14(8)			14(14!)

n	クイーン	スーパークイーン	ナイト	ビショップ	ルーク
15 16 17		15(　16) 16(　18) ****			15(　15!) ****

［新しい結果］ スーパークイーンの最大個数とその置き方。

> **問題２：** チェス盤上のすべてのマス目がきき筋に入るようにするには最小何個の駒でよいか、またその置き方は何通りか。置かれた駒同士の関係について3通りの場合が考えられる。
>
> 場合(1)：駒同士がきき筋に入っても入らなくてもよい。
> 場合(2)：駒同士がきき筋に入る。
> 場合(3)：駒同士がきき筋に入らない。

［条件１］ n^2個のマス目からr個を選ぶ。

$$f_{n^2-r,r}(x_{1,1},\dots,x_{1,n},x_{2,1},\dots x_{2,n},\dots,x_{n,1},\dots,x_{n,n}) = 1$$

［条件２］マス目(i, j)をきき筋とするマス目の集合をQ(i, j)とする。
ただし、マス目(i, j)は除く。

場合(1)：マス目(i, j)と、集合Q(i, j)のマス目全体の中に少なくとも１つ駒が存在する。

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(x_{i,j}+\sum_{(u,v)\in Q(i,j)} x_{u,v}\right)\right)=1$$

上式において、BDDを構成していくときに、取り上げるマス目(i, j)の順序はチェス盤の周辺から中心へとする。
具体的に、n=5の場合を示す。
数字は取り上げる順を意味する。

10	8	6	4	2
16	22	20	18	15
14	24	25	23	13
12	21	19	17	11
9	7	5	3	1

$a(b_1+b_2+\cdots+b_k)=ab_1+ab_2+\cdots+ab_k$を利用して、$a$と$b_1+b_2+\cdots+b_k$の論理積を計算する代わりに、$ab_i$の論理和を順次計算していく。このようにすると、BDDを構成するための所要時間はかかるが、途中のBDDサイズの変化は小さくなることが多い。したがって、BDDのノードを有効に利用でき、より大きいnに対する解が得られる。

場合(2)： 集合Q(i, j)のマス目全体の中に少なくとも１つ駒が存在する。

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{(u,v)\in Q(i,j)} x_{u,v}\right)\right) = 1$$

場合(3)：マス目(i, j)と、集合Q(i, j)のマス目全体の中に少なくとも１つ駒が存在する。追加条件として、マス目(i, j)に駒が存在するとき、集合Q(i, j)のマス目の中に他の駒が存在してはならない。

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(x_{i,j} + \sum_{(u,v)\in Q(i,j)} x_{u,v}\right)\right) = 1$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\bar{x}_{i,j} + \prod_{(u,v)\in Q(i,j)} \bar{x}_{u,v}\right)\right) = 1$$

［すべての置き方］

［条件１］・［条件２］＝１を満たす解で、rが最小のもの。

［実験結果］ 駒の最小個数と置き方の数（かっこ内）。

クイーン

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	1(4)
3	1(1)	1(1)	1(1)
4	2(12)	2(12)	3(16)
5	3(186)	3(70)	3(16)
6	3(4)	4(960)	4(120)
7	4(86)	4(22)	4(8)
8	5(4860)	5(352)	5(728)
9	5(114)	5(10)	5(92)
10	5(8)	****	5(8)
11	5(2)		5(2)
12	6(8)		****
13	****		

スーパー・クイーン

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	1(4)
3	1(9)	1(9)	1(9)
4	1(4)	1(4)	1(4)
5	1(1)	1(1)	1(1)
6	2(8)	2(4)	2(4)
7	3(678)	3(234)	3(72)
8	3(48)	3(24)	4(978)
9	3(4)	3(4)	4(288)
10	4(515)	4(171)	4(40)
11	4(4)	4(4)	5(536)
12	4(1)	4(1)	****
13	****	****	

ナイト

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	4(1)	0(0)	4(1)
3	4(8)	0(0)	4(8)
4	4(9)	6(36)	4(9)
5	5(47)	7(480)	5(7)
6	8(127)	8(36)	8(3)
7	10(10)	10(10)	13(688)
8	12(2)	14(16)	14(16)
9	14(2)	18(84)	14(2)
10	16(4)	22(2704)	16(4)
11	21(800)	****	****
12	****		

ビショップ

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	2(4)	4(1)	2(4)
3	3(6)	4(16)	3(2)
4	4(25)	4(1)	4(16)
5	5(104)	6(8)	5(44)
6	6(484)	8(3721)	6(256)
7	7(2136)	8(108)	7(768)
8	8(11664)	10(10816)	8(5184)
9	9(71136)	****	9(25344)
10	10(451584)		****
11	****		

ルーク

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	2(6)	2(4)	2(2)
3	3(48)	3(6)	3(6)
4	4(488)	4(80)	4(24)
5	5(6130)	5(410)	5(120)
6	6(92592)	6(5112)	6(720)
7	7(1642046)	7(48818)	7(5040)
8	8(33514112)	8(695424)	8(40320)
9		9(9589266)	9(362880)
10		****	****

［新しい結果］ ３つの場合について、各駒の最小個数とその置き方。

問題３（線上無三問題）：チェス盤上のどの方向にも3個の駒が線上（縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線）に並ばないように最大何個の駒が置けるか（最大2n個は明らか）。

［条件１］ n^2個のマス目から2n個を選ぶ。

$$f_{n^2-2n,2n}(x_{1,1},\ldots,x_{1,n},x_{2,1},\ldots x_{2,n},\ldots,x_{n,1},\ldots,x_{n,n}) = 1$$

［条件２］ 線上にある3個のマス目の組$[(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)]$の集合をR(n)とする。線上に並ぶ3個のマス目のうち、たかだか2個に駒が存在する。

$$\prod_{[(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)]\in R(n)} (\bar{x}_{i_1,j_1}+\bar{x}_{i_2,j_2}+\bar{x}_{i_3,j_3}) = 1$$

論理変数$x_{i_1,j_1},x_{i_2,j_2},x_{i_3,j_3}$に対応するBDD変数のうち、小さい値を$\min(x_{i_1,j_1},x_{i_2,j_2},x_{i_3,j_3})$とし、$\min(x_{i_1,j_1},x_{i_2,j_2},x_{i_3,j_3})$の降順にBDDを構成していく。このようにすると、BDDを構成するための時間はかかるが、途中のBDDサイズは急激に変化しないのでBDDノードを有効に利用して大きいｎに対する解が得られる。

置き方に対称性（点対称、対角対称）を導入する。

［条件３．１］ （点対称）チェス盤の中心に対して対称の位置にあるマス目（(i,j)と(n+1-i,n+1-j)）には同時に駒が存在するかまたは存在しない。

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\overline{x_{i,j}\oplus x_{n+1-i,n+1-j}}\right)\right) = 1$$

論理変数$x_{i,j},x_{n+1-i,n+1-j}$に対応するBDD変数のうち、小さい値を$\min(x_{i,j},x_{n+1-i,n+1-j})$とし、$\min(x_{i,j},x_{n+1-i,n+1-j})$の降順にBDDを構成する。

［条件３．２］ （対角対称）チェス盤の２つの対角線に対して対称の位置にあるマス目（(i,j)と(j,i)）には同時に駒が存在するかまたは存在しない。

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\overline{x_{i,j} \oplus x_{j,i}} \right) \right) = 1$$

BDDの構成の方法は条件3.1と同様。

［すべての置き方］

解：［条件１］・［条件２］ ＝１を満たすもの。
点対称解：［条件１］・［条件２］・［条件３．１］ ＝１を満たすもの。
対角対称解：［条件１］・［条件２］・［条件３．２］ ＝１を満たすもの。

［実験結果］ 置き方の数。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
解	1	1	2	11	32	50	132	320	****
点対称解	1	1	2	7	0	18	40	36	28
対角対称解	1	1	2	3	4	4	2	10	6

n	10	11	12
解			
点対称解	****		
対角対称解	9	12	****

［新しい結果］ 対角対称解。

問題４： チェス盤上で、線上（縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線）に3個の駒が並ばないように置き、もう１つ空所に駒を置くとどこかの線上に駒が3個必ず並ぶようにするには、最小何個の駒でよいか。またその置き方は何通りか。

［条件１］ n^2個のマス目からr個を選ぶ。

$$f_{n^2-r,\,r}(x_{1,1},\ldots,x_{1,n},x_{2,1},\ldots x_{2,n},\ldots,x_{n,1},\ldots,x_{n,n}) = 1$$

［条件２］ 線上に並ぶ3個のマス目のうち、たかだか2個に駒が存在する。

$$\prod_{[(i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)] \in R(n)} \left(\bar{x}_{i_1,j_1} + \bar{x}_{i_2,j_2} + \bar{x}_{i_3,j_3} \right) = 1$$

［条件３］ マス目(i,j)を含み、線上に並ぶ3個のマス目のうち、マス目(i,j)を除く他の2個のマス目に駒が存在するものがある。

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(x_{i,j} + \sum_{[(i,j),(i_2,j_2),(i_3,j_3)] \in R(n)} \bar{x}_{i,j} \cdot x_{i_2,j_2} \cdot x_{i_3,j_3} \right) \right) = 1$$

マス目(i,j)に割り当てられたBDD変数の降順にBDDを構成していく。

[すべての置き方]

[条件１]・[条件２]・[条件３] = 1 を満たす解で、rが最小のもの。

[実験結果] 置き方の数。

n	1	2	3	4	5	6
解	1(1)	4(1)	4(5)	4(2)	6(152)	6(8)

n	7	8	9	10	11
解	8(****)	8(****)	8(****)	10(****)	*(****)

[新しい結果] なし。

３．結論

チェス盤上で駒を配置する4種類の配置問題に対して、論理関数による解法を示した。BDDを利用して結果を得たが、問題を表現するBDDをどのような順序で構成していくかによって、BDDサイズが変わってくる。ここでは、所要時間はかかるがBDDサイズの変化が小さくなることが多い方法を示した。従来の結果と比較していくつかの問題で、新しい結果を得た。

謝辞

ＢＤＤパッケージの利用を許可して頂いた平石裕実教授、湊氏、越智氏に感謝いたします。有益な御助言を頂く矢島脩三教授に感謝いたします。

参考文献

[1] 仙波一郎,矢島脩三：組合せ問題の論理関数による解法について、数理解析研究所講究録833,計算機構とアルゴリズム,pp204-213,1993
[2] I.Semba,S.Yajima: "Combinatorial Algorithms by Boolean Processing I",情報処理学会研究報告,Vol.93,No.24,pp25-32,1993.
[3] I.Semba,S.Yajima: "Combinatorial Algorithms by Boolean Processing II",情報処理学会研究報告,Vol.93,No.24,pp33-40,1993.
[4] S.Minato, N.Ishiura and S.Yajima: "Shared Binary Decision Diagram with Attributed Edges for Efficient Boolean Function Manipulation", Proc. 27th ACM/IEEE DAC, pp.52-57, (June 1990).
[5] H.Ochi, K.Yasuoka and S.Yajima: "A Breadth-First Algorithm for Efficient Manipulation of Shared Binary Decision Diagrams in the Secondary Memory", The 45th General Convention of IPSJ, 6-137, (Oct. 1992).
[6] J.S.Madachy: "MADACHY'S MATHEMATICAL RECREATIONS",1979. みやた よしゆき訳：数学レクリエーション,pp23-45,啓学出版,1987.
[7] R.K.Guy: "Unsolved Problems in Number Theory",Springer-Verlag,1981. 一松 信監訳：数論における未解決問題集,pp.114-116,191-193,1982.
[8] M.Gardner: "MATHEMATICAL MAGIC SHOW",1977. 一松 信訳：続々数学魔法館,pp1-20,東京図書,1979.
[9] M.Gardner: "Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers",Freeman,1989. 一松 信訳：ペンローズ・タイルと数学パズル,丸善,1992.