数理解析研究所講究録
第 872 巻 1994 年 103-107

閉曲面上のグラフの対角変形

横浜国立大学教育学部　根上生也（Seiya NEGAMI）

● 三角形分割に関する結果

本稿で紹介する話題の起源となるものは，次の Wagner の定理 [7] である.

定理 1 (Wagner, 1936) 球面上の任意の 2 つの三角形分割は対角変形で互いに移り合える.

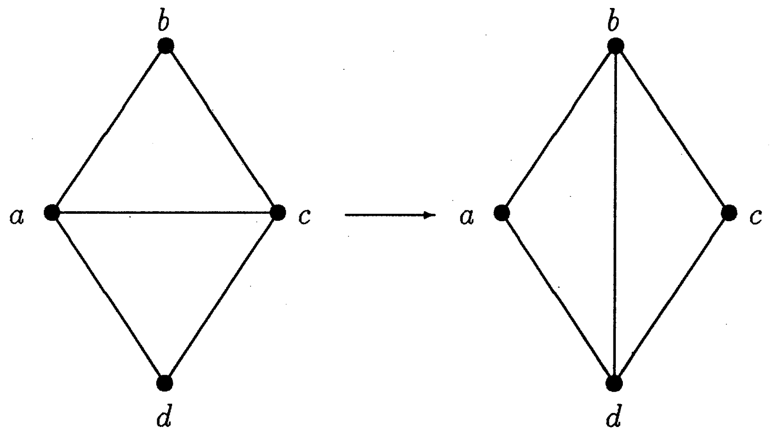

図 1: 三角形分割の対角変形

一般に，**三角形分割**とは，閉曲面にすべての領域が三角形になるように埋め込まれた単純グラフのことである. その**対角変形**とは図 1に示されているような変形である. ただし，三角形分割がすでに辺 bd を含んでいるときは，この変形はしないものとする. なぜなら，それを強行してしまうと，変形後のグラフが多重辺 bd を持ってしまうからである. 三角形分割は単純グラフであると定めたので，これではよくない. 仮に，単純グラフでなくなってもよいことにすると，以下の定理はほとんど自明なものになってしまうことに注意.

残念ながら，Wagner 自身の論文 [7] はドイツ語で書かれているので，あまり読む気にはならないが，英語で書かれた証明は [6] に記されている. その証明は実に簡単なので，ここでも紹介しておこう.

証明 球面上の三角形分割を平面上に射影して考える．すると，三角形分割全体は大きな三角形 uv_0wの内部に納まっている．そこで，uwを底辺になるように三角形分割を描き，v_0から以下の変形をしていく．まず，v_0の次数が 3 のときは，何もせずに，v_0の第 3 の隣接点 v_1に注目する．v_0の次数が 4 以上のときは，v_0の隣接点を時計回りに $u, x, y, z, \ldots, w$とおき，対角線 v_0x を uyに切り替える．もちろん，辺 uyが既存のときには，この変形はできないが，その場合には，uyが壁となって，x と zを結ぶ辺が存在しないので，対角線 v_0yを xzに切り替えられる．いずれの場合も，v_0の次数は 1 減る．この変形を繰り返して，v_0の次数を 3 まで落とした後で，第 3 の隣接点 v_1を考える．

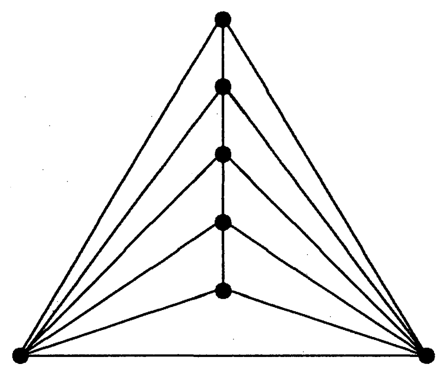

図 2: 球面上の三角形分割の標準形

uv_1wの内部の三角形分割に同じ議論を繰り返していけば，u と wの両方に隣接する頂点の列 $v_0, v_1, \ldots, v_n$を得る (図 2)．この最終的な状態を球面上の三角形分割の標準形と考えると，球面上の頂点数が等しい任意の 2 つの三角形分割は，この標準形を介して，対角変形で互いに移り合えることがわかる．■

この定理を受けて，Dewdney [1] と根上-渡辺 [4] はトーラス，射影平面，クラインの壺に対して，同様の結果を証明している．

定理 2 (Dewdney, 1973) トーラス上の任意の 2 つの三角形分割は対角変形で互いに移り合える．

定理 3 (根上-渡辺, 1990) 射影平面上の任意の 2 つの三角形分割は対角変形で互いに移り合える．

定理 4 (根上-渡辺, 1990) クラインの壺上の任意の 2 つの三角形分割は対角変形で互いに移り合える．

彼らの証明の本質は，対角変形によって次数 3 の頂点を生み出すことができない三角形分割 ([4], [5] では**擬極小三角形分割**と呼ばれている) を分類することにある．つまり，それが各曲面の三角形分割に対する標準形の役目を果たす．

その分類の手法は，個々の閉曲面に依存しているので，そのままでは，一般の閉曲面に対する定理の証明に発展させることは困難である．また，任意の閉曲面に対して同様の定理が成立することは，完全グラフの埋め込みの一意性と関連して，望み薄だと思われていた．ところが，根上は対角変形と辺の縮約とを見事にリンクして，次の一般的な定理を証明した．

定理 5 (根上, 1992) 任意の閉曲面 F^2に対して，次の条件を満たす正整数 $N = N(F^2)$ が存在する：F^2上の２つの三角形分割 G_1, G_2が $|V(G_1)| = |V(G_2)| \geq N$を満たすならば，$G_1$と G_2は対角変形で互いに移り合える．

例えば，定理１，２，３，４によれば，球面，トーラス，射影平面，クラインの壺に対する定理にある正整数 $N(F^2)$ は，順に４，７，６，８である．この値は，いずれも各閉曲面の最小の三角形分割の頂点数である．他の閉曲面に対する値が最小の三角形分割の頂点数に一致するかいなかは，決着が付いていない．もし三角形分割を与える完全グラフの埋め込みが一意的でないことが示されれば，この事実は成り立たない．

● 四角形分割に関する結果

三角形分割と同様に，閉曲面上にすべての領域が四角形になるように埋め込まれた単純グラフを**四角形分割**と呼ぶ．四角形分割の対しては，図 3の２種類の対角変形 (**対角スライド** (左) と次数２の頂点のまわりの**対角回転** (右)) を考える．もちろん，変更後にグラフの単純性が壊れてしまう変形は実行しないものとする．

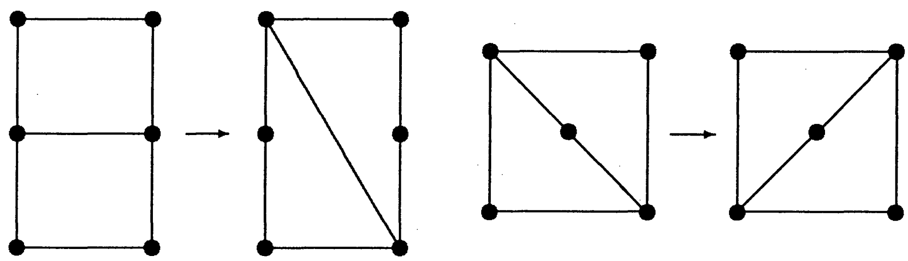

図 3: 四角形分割の対角変形

四角形分割の対角変形の研究を始めた当初は，辺の縮約を領域の縮約に置き換えて，定理５の証明と同様の議論を行えば，同様の定理が証明できるだろうともくろんでいた．ところが，研究が進むにつれて，四角形分割固有の現象があることが明らかになり，中本 [2] によって次の定理が証明された．

定理 6 (中本, 1993) 任意の閉曲面 F^2に対して，次の条件を満たす正整数 $M = M(F^2)$ が存在する：２部グラフによる F^2上の２つの四角形分割 G_1, G_2が $|V(G_1)| = |V(G_2)| \geq M$を満たすならば，$G_1$と G_2は対角変形で互いに移り合える．

まず，四角形分割用の２つの対角変形が，どちらも“２部グラフである”という性質を保存することが重要である．したがって，２部グラフの四角形分割とそうでないものとは，対角変形だけでは絶対に移り合わない．特に，対角スライドは２部グラフの部集合の大きさを変化させない．つまり，２部グラフを黒と白で彩色したとき，対角スライドを行っても，その彩色が保存される．一方，対角回転は，その中心の頂点の色を変化させる（黒↔白）効果がある．したがって，２部グラフどうしでも，部集合の大きさが異なるときには，対角回転を用いないと移り合わない．

逆に，部集合の大きさが等しいときは，対角回転を用いずに移り合うことが期待させる．実際，中本 [2] はその期待に答えて，次の定理を証明した．ただし，２部グラフ G は黒と白で彩色されているものとし，$V_B(G)$ と $V_W(G)$ をそれぞれ黒と白の頂点の集合とする．この定理は定理６を精密化したもののように思われるが，その系として定理６が導かれるわけではない．

定理 7 (中本, 1993) 任意の閉曲面 F^2 に対して，次の条件を満たす正整数 $B = B(F^2)$, $W = W(F^2)$ の組が存在する：２部グラフによる F^2 上の２つの四角形分割 G_1, G_2 が $|V_B(G_1)| = |V_B(G_2)| \geq B$, $|V_W(G_1)| = |V_W(G_2)| \geq W$ を満たすならば，G_1 と G_2 は対角変形で移り合える．

現在では，射影平面やトーラスに対して，より具体的な結論が得られている．三角形分割の場合と異なり，ほとんどの閉曲面に対して，$M(F^2)$ の値は最小の四角形分割の頂点数には一致しない．例えば，同型でない完全２部グラフで同じ閉曲面の四角形分割を与えるものがあるからである．完全２部グラフのどの辺も対角変形で切り替えることができないことに注意すれば，頂点数，部集合の大きさが等しくても，対角変形で移り合えない四角形分割の例を構成することができる．

● 詳細について

本稿では定理の紹介にとどめるが，この話題に関するより詳細を知りたければ，[5] を参照するとよい．ここでは，三角形分割や四角形分割が“移り合う”とはどういうことなのかを厳密には定義しなかったが，位相幾何学的観点から，上で述べた定理ごとに“移り合う”の意味は多少異なっている．また，[5] では，代数的位相幾何学の手法を用いて，四角形分割の対角変形で保存される *cycle parity* という不変量が定義されている．つまり，それが異なる四角形分割は対角変形では移り合わないことが結論できる．この事実をたよりに，２部グラフでない四角形分割に対する定理を考えるのが，今後の課題である．

参考文献

[1] A.K. Dewdney, Wagner's theorem for torus graphs, *Discrete Math.* **4** (1973), 139–149.

[2] A. Nakamoto, "Diagonal transformations in quadrangulations of surfaces", Master Thesis, Yokohama National University, 1993.

[3] S. Negami, Diagonal flips in triangulations of surfaces, to appear in *Discrete Math.*

[4] S. Negami and S. Watanabe, Diagonal transformations of triangulations on surfaces. *Tsukuba J. Math.* **14** (1990), 155–166.

[5] S. Negami and A. Nakamoto, Diagonal transformations of graphs on closed surfaces, to appear in *Sci. Rep.Yokohama Nat. Univ., Sec. I.*

[6] O. Ore, "The four-color problem", Academic Press, New York, 1967.

[7] K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *J. der Deut. Math.* Ver. 46, Abt. 1, (1936), 26–32.