数理解析研究所講究録
第 872 巻 1994 年 158-164

埋め込まれた曲面の接続可能性

東京大学 理学部　　吉田研秀 (Kensyu YOSHIDA)

はじめに

ふたつの物体を空間に埋め込んだ状態で張り合わせようとする時、物体の変形を認めても、物体のトポロジーによっては張り合わせることができないことがある。物体をホモトピーで変形することを認めるとして、物体を境界のない 2 次元多様体で表現する時はそれが向きづけ可能かどうか、という判定でこの問題を解決することができることがわかっている。

ここでは、物体に自分自身との交差を認めない、つまりイソトピーによる物体の変形までを認めた時に張り合わせることができるかどうかを判定せよ、という問題を考える。

つまり、コンパクトな、PL、2 次元多様体 M_1, M_2 について、$c_1 \subset \partial M_1, c_2 \subset \partial M_2$ が連結であって、PL 同相写像 $h: c_1 \to c_2$ による同一視で M_1, M_2 が接合 [3] してコンパクトな, PL, 2 次元多様体 M となっており、また 射影

$$\pi : M_1 \cup M_2 \to M$$

が与えられているとする。

このとき

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & M_1 \quad \to R^3, \\ f_2 : \quad & M_2 \quad \to R^3. \end{aligned}$$

なる 3 次元空間 R^3 への埋め込みに対して、$f: M \to R^3$ という埋め込みであって、M の M_i に対応する部分の埋め込みが、もとの埋め込みに R^3 の中でイソトープ:

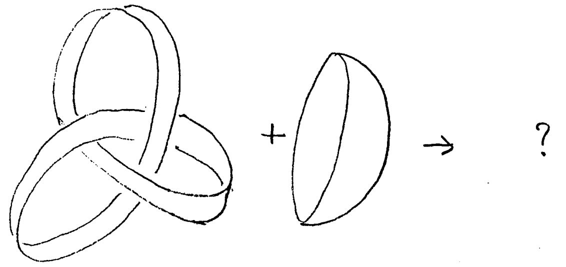
$$f(\pi(M_i)) \cong f_i(M_i).$$

となるような f が存在するか? あるいは、そのような f が存在するための、M_1, M_2, M や接合にかかる条件は何か? という問題を扱う。

たとえば R^3 への埋め込みの場合について例をあげると、

- 円板 D^2 同士は接合すると、球 S^2 になって埋め込め、S^2 の埋め込みのもともとの D^2 に対応する部分はあきらかに R^3 の中で D^2 にイソトープ。

- Trefoil knot $\times I$ の境界の片方と, D^2 の境界全体を接合し埋め込むとどちらかが R^3 で接合した多様体の部分のイソトープにできない。



- D^2, Möbius の輪ともに埋め込めるが、境界全体で接合した時に得られる射影空間 RP^2 は埋め込めない.

さて、接合される前の多様体の埋め込み f_i が与えれているので、これを利用して解析を簡単にすることを考える。埋め込まれていた様を連結後に反映させるには、

- 多様体のはめ込みと埋め込みで振る舞いが異なること

あるいは同じことだが、

- イソトピーの不変量。

- ホモトピーの不変量でない。

という条件を満たしていなければならない。

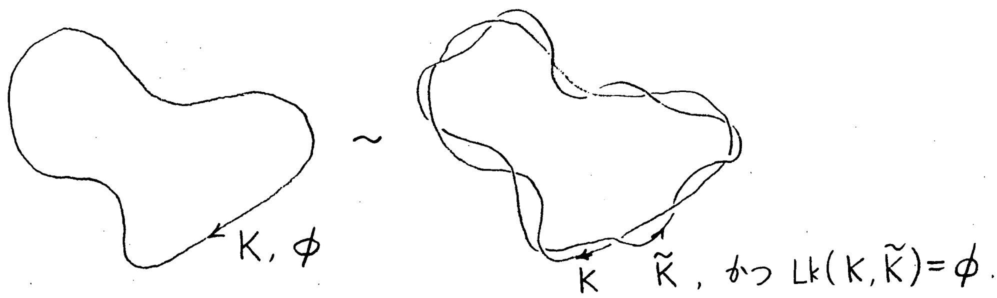
このような条件をみたすものにたとえば framed link がある。ここでは R^3 への PL, compact な 2 次元多様体同士の接合、埋め込み可能性について framed link を使って議論する。

また、以下では多様体といえば PL, コンパクトな 2 次元多様体とし、またその埋め込み、といった時の埋め込み先は特に断らない限り R^3 であるとする。

Framed link の定義

Link $L = \{K_1, K_2, \ldots\}$ と、その各成分の knot $K_i : S^1 \to R^3$ に付随する 整数 ϕ_i との組 $\{\{K_1, \phi_1\}, \{K_2, \phi_2\}, \ldots\}$ を framed link と定義する [2]。以下 K には向きがついているものとする。

また、K とそれに沿っての逆向きの結び目 $\tilde{K}$ であって、絡み数 [1] $\mathrm{Lk}(K, \tilde{K}) = \phi$ であるような $\tilde{K}$ によって $\{K, \phi\}$ を link $\{K, \tilde{K}\}$ と、いつでも同一視できるものとする。



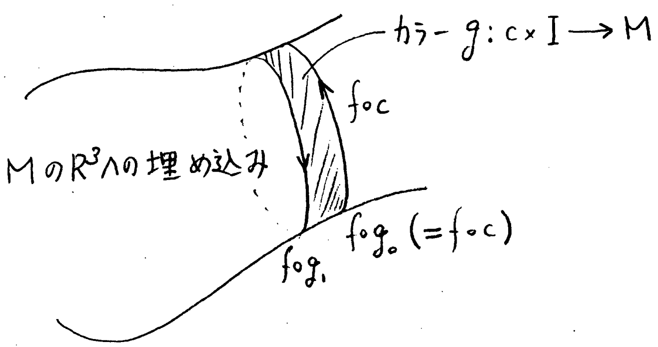
R^3 へ埋め込まれた 2 次元多様体 M の上の $c: S^1 \to M$ に由来する framed link $\{K, \phi\}$ とは、M の埋め込み $f: M \to R^3$ を使って、$K: S^1 \to R^3$ を

$$K = f \circ c.$$

とし、c のカラー近傍 $g: c \times I \to M$ の制限 $g_j: c \times \{j\} \to M: j = 0, 1$ について

$$\phi = \mathrm{Lk}(f \circ g_0, f \circ g_1).$$

となっているものを示す。なお、$f \circ g_i$ は K にイソトープなので向きを K に由来するようにいれることができ、$f \circ g_0$ は K と同じ向き、$f \circ g_1$ には K の逆の向きを入れておく。



連結和の規則

一成分の framed link が二つ $\{K_1, \phi_1\}, \{K_2, \phi_2\}$ あたえられた時、K_1, K_2 の帯連結和 (band connected sum) $K = K_1 \# K_2$ によってきまる framed link $\{K, \phi\}$ において、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \pm 2\mathrm{Lk}(K_1, K_2).$$

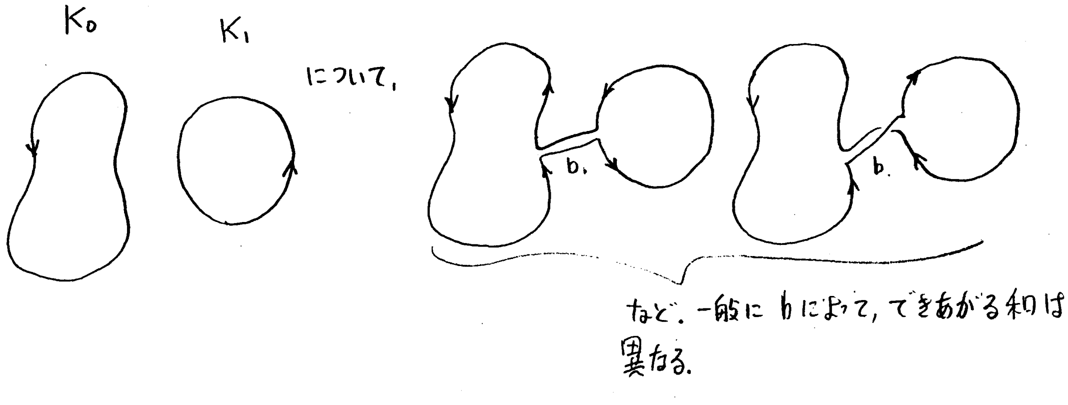
となる [2]。

ここで符号は K_1, K_2 の帯連結和の時に K_i の向きが揃うか逆になるか、ということと Lk の定義によってきまる。

なお、Knot K_0, K_1 の帯連結和とは、帯 $b: I \times I \to R^3$ という $I \times I$ の埋め込みであって $b(I \times I) \cap K_i = b(i \times I)$ ただし $i = 0, 1$ となるものを用いて、

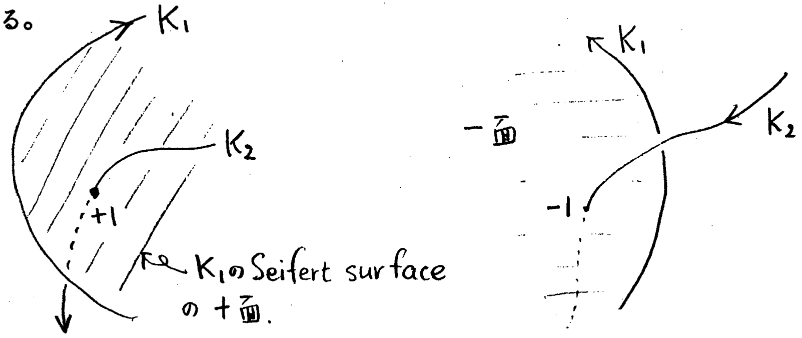
$$K_0 \# K_1 = (K_0 \cup K_1 - b(\partial I \times I)) \cup (I \times \partial I).$$

と定義される [2]。



また、絡み数 $\mathrm{Lk}(K_1, K_2)$ を以下のように定義しておく [1]：

Knot K_1 の射影表示から Seifert surface をもとめた時、knot K_1 の進行方向向かって右側に曲面があるときは曲面の上側を $+$, 下側を $-$ とし、その逆は下側を $+$ とし、上側を $-$ とする。このとき、K_2 が Seifert surface の $+$ から $-$ へつき抜けている時は $+1$ し, $-$ から $+$ へつき抜けている時は -1 するものとして K_2 を一周した時の総和を $\mathrm{Lk}(K_1, K_2)$ と定義する。



この Lk のもとでは、K_1 に K_2 を連結する時に K_1 と K_2 の向きにならうようにたどる帯 b でつないでいる時は

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 - 2\mathrm{Lk}(K_1, K_2).$$

K_1 の向きにたどると K_2 で K_2 の向きの逆にたどるような帯 b でつないでいる時は、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + 2\mathrm{Lk}(K_1, K_2).$$

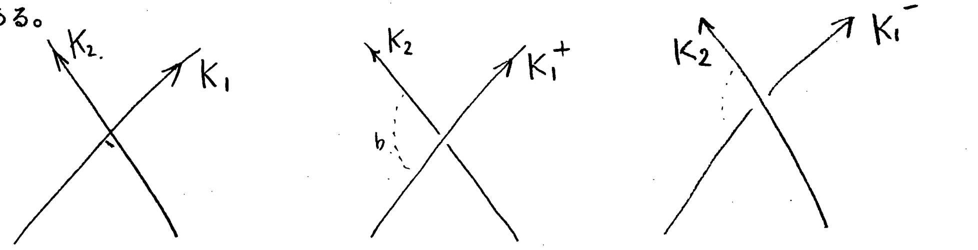
となる。

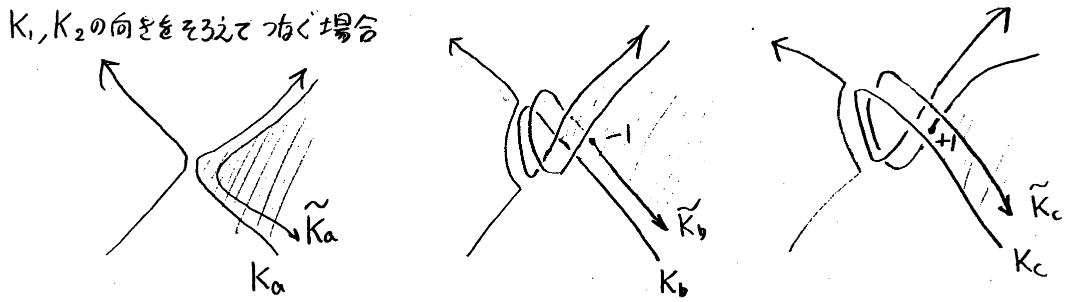
また、2 次元多様体の埋め込みの上の framed link の連結を考える時、先の連結の以外に M 上で一回交差してしまっている場合にも、その交点で連結することが考えられて、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \pm (\mathrm{Lk}(K_1^+, K_2) + \mathrm{Lk}(K_1^-, K_2)).$$

と計算することができる。符号は K_2 を K_1 と同じ向きにたどる時 $-$, 逆向きにたどる時は $+$ とします。また、K_1^+ は R^3 のなかに上下方向を適当に定めた時、連絡予定の交点で K_1 の線を K_2 の上を通すように変形した knot であり、K_1^- は逆に下を通した knot のことである。

証明





K_1, K_2 が交差する場合と、交差しない K_1^+, K_2, K_1^-, K_2 について、まず、$K_1^{\pm}$ から K_2 へ向きを揃える帯 b でつなぐことを考える。Seifert surface を構築するとき[1]、斜線を引いた部分に + が上になるような surface を置いて一般性を失わない。右上から右下へ走る $\tilde{K}$ がこの交差の付近での surface の貫きかたを見ると、左から 0, −1, +1 となっている。左上から左下へ走る $\tilde{K}$ は surface を貫かないし、図に示した部分以外では貫き方はみな等しい。

よって、

$$\mathrm{Lk}(K_a, \tilde{K_a}) = \frac{\mathrm{Lk}(K_b, \tilde{K_b}) + \mathrm{Lk}(K_c, \tilde{K_c})}{2}.$$

なので、

$$\begin{aligned} \phi &= \mathrm{Lk}(K_a, \tilde{K_a}) \\ &= \phi_1 + \phi_2 \pm (\mathrm{Lk}(K_1^+, K_2) + \mathrm{Lk}(K_1^-, K_2)). \end{aligned}$$

となる。b が K_2 の向きを逆にする場合も同様。

また、framed link の連結和は、link の成分が複数ある場合には成分について以上のような計算を行なうものとする。

系

1. 多様体 M の埋め込み上の framed link $\{K, \phi\}$ において、knot K が多様体 M 上で可縮なら M のどんな埋め込み $f : M \to R^3$ でも $\phi = 0$ である。

   証明

   R^3 の中で可縮だから、

   - M の上の どんな knot と絡んでも絡み数は 0.
   - どんな framed link $\{K', \phi'\}$ へ連結しても $\{K', \phi'\}$ のまま。

   よって、$\phi' = \phi + \phi' \pm \mathrm{Lk}(K, K') = \phi + \phi'$ から $\phi = 0$.

2. M の埋め込みを固定したとき、M の上の $\{K_1, \phi_1\}$, $\{K_2, \phi_2\}$ について、K_1, K_2 が M 上でおなじホモトピー型をもつなら $\phi_1 = \phi_2$.

   証明

   おなじホモトピー型をもつので $K_2 = K_1 \# K_3$ なる可縮な knot K_3 がある。K_3 は連結しても ϕ をかえないので、$\phi_1 = \phi_2$.

局所的な接続可能性

接続できるためには、境界を knot とみなしたときに同型であることが必要なことはあきらか。これ以外についての条件を検討する。

まず、張り合わせ境界の近くで埋め込みのままにできるかどうかを考える。

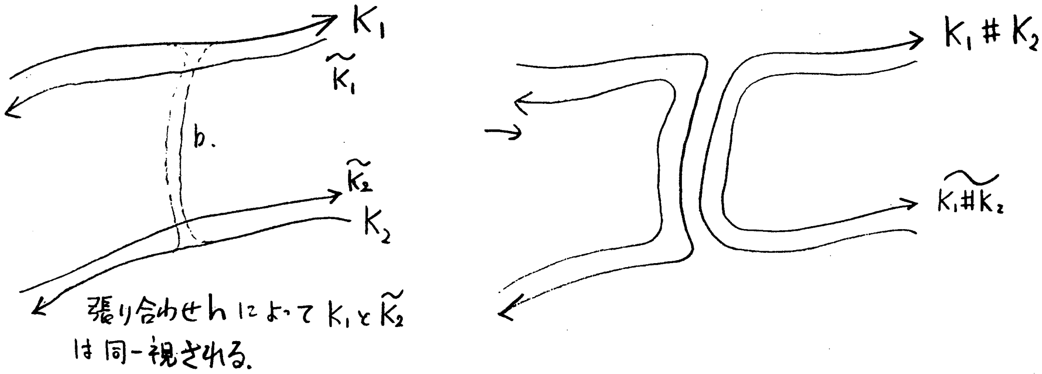
$c_i \subset \partial M_i$ が連結なら S^1 とみなせ、したがって c_i の埋め込みは knot K_i になる. このとき、張り合わせ後に $\{K_1, \phi_1\} = \{K_2, \phi_2\}$ である $\Longleftrightarrow$ その境界 c_i にそっての張り合わせ後、境界 c_i のカラー近傍が R^3 への埋め込みにできる。

証明：

右辺から左辺へ。系の 2 から明らか。

左辺から右辺へ。

境界に沿っての framed link $\{K_i, \phi_i\}$ を link $\{K_i, \tilde{K_i}\}$ へ置き換えると、図のようになり、



$$\phi_1 = \mathrm{Lk}(K_1, \tilde{K_1}) = \mathrm{Lk}(K_1, K_2) = \mathrm{Lk}(K_2, \tilde{K_2}) = \phi_2.$$

に注意すれば、$K_1 \# K_2$ の framed link $\{K_1 \# K_2, \phi_{K_1 \# K_2})$ について、

$$\begin{aligned} \phi_{K_1 \# K_2} &= \mathrm{Lk}(K_1, \tilde{K_1}) + \mathrm{Lk}(K_2, \tilde{K_2}) - 2 \times \mathrm{Lk}(K_1, K_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

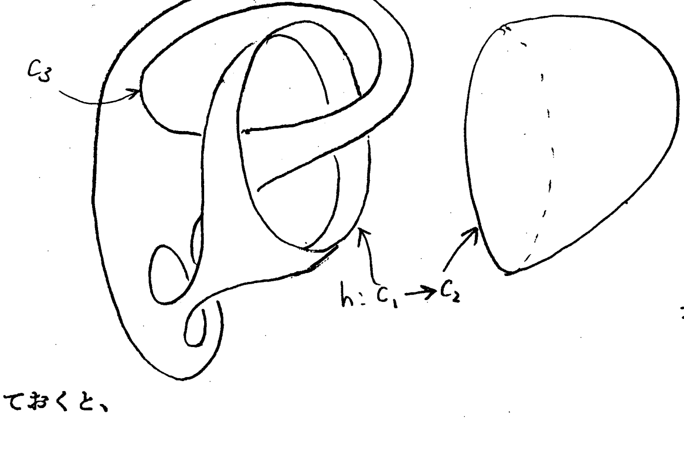
がえられる。$K_1 \# K_2$ は可縮であることとあわせて、K のまわりで埋め込みにできることがわかる。また、K_2 が接合時に K_1 とは逆に走っている場合も同様。

大局的な接続可能性

境界のそばについては埋め込むための条件が定まった。また、境界の両側それぞれについても埋め込めることは前提条件なのであとは全体をまとめて埋め込むような f があるかどうかが問題である。

M を埋め込みにするような $f : M \to R^3$ が存在するかどうかは境界の同一視をとおして M_1, M_2 上の framed link の演算に矛盾が現れるかどうか、で判定するものとします。

たとえば、図のような場合は接続できない。境界を同一視する時、あきらかに矛盾が生じる。



$C_3 \# C_1 \neq C_3$ だが,
C_2は可縮なので
$C_3 \# C_2 = C_3$.
今, hによってC_1とC_2を
同一視した. すると,
$C_3 \# C_1$と$C_3 \# C_2$の間が
矛盾する.

こうしておくと、

1. Framed link のもつ演算関係が矛盾する → 大局的に接続不可能

2. Framed link のもつ演算関係が矛盾しない → 大局的接続可能

となる。しかし容易に検出できる矛盾については接続不可能であることがすぐにわかるが、矛盾しないことを実際に示すことは簡単ではない。

Open problems

Framed link によって与えられる構造はまだ良くわかっていない。以下のような問題が残っている。

1. その結び目成分が M のホモトピー生成元になっているような framed link が与えられている時、他に何を定めれば M の埋め込みの イソトピー型を定めることになるか?

2. 与えられた framed link を満たすような、多様体とその埋め込みの組 $\{M, f\}$ を導くアルゴリズムを求めよ。そのとき、framed link の成分の knot K_i をホモロジー群 $H_1(M)$ の元と見なす時に K_i が $H_1(M)$ を生成するような M にできるのはどういう時か？

3. 大局的には接続できない時、どれくらいの framed link 間について検査すれば良いか。とくに、$\phi = 0$ であるような framed link 間だけの検査で十分か？

4. M の上で 2 回以上交差しているような knot 同士の帯連結和が well-define に定まるか?

以上のようなことを解決しておく必要がある。

References

[1] D.Rolfsen, *Knots and Links,* Publish or Perish, Inc 1976, 1990.

[2] R. Kirby, A Calculus for Framed Links in S^3, *Inventiones math.* **45**, pp35–56,1978.

[3] 田村一郎 微分位相幾何学 岩波書店 1992.