

超幾何型差分作用素のスペクトルについて

筑波大・数学系

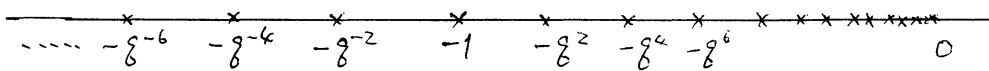
寛 知之 (Tomoyuki KAKEHI)

§0. Introduction and Notations

ここでは、ある種の差分作用素のスペクトルについて述べる。ここで扱う差分作用素は、 $ST_q(1,1)$ という non-compact 型量子群の Casimir 作用素から得られるものであり、量子群の表現論と密接に関係している。

まず、 q -analogue の理論でよく用いられる記号について説明しておく。以下において q は $0 < q < 1$ なる実数とする。

- q -interval $(-\infty, 0]_q := \{-q^{2n} : n \in \mathbb{Z}\}$



- q -difference $D = D_q$

$(-\infty, 0]_q$ 上の関数 φ に対して、その q -difference $D_q \varphi$

を

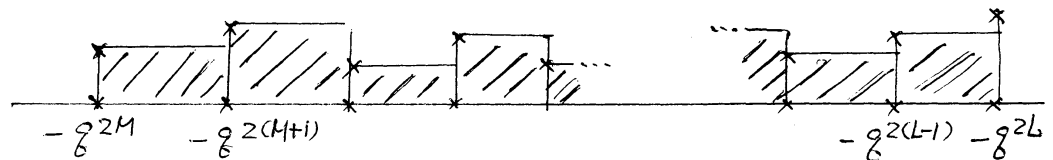
$$D_q \varphi(\zeta) := \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(q^2 \zeta)}{(1 - q^2)\zeta} \quad \zeta \in (-\infty, 0]_q$$

で定める.

- Jackson積分: $\zeta_1 = -q^{2M}$, $\zeta_2 = -q^{2L} \in (-\infty, 0]_{q^2}$
及び、 $(-\infty, 0]_{q^2}$ 上の関数 φ に対して、その Jackson積分
を次で定める.

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varphi(\zeta) d_{q^2}\zeta := \sum_{n=M}^{L-1} \varphi(-q^{2n}) q^{2n} (1-q^2)$$

(注意1) これは、次の斜線部の面積を表わしている.



(注意2) Jackson積分と q -difference とは互いに逆演算の関係になっている. 即ち.

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} D_{q^2}\varphi(\zeta) d_{q^2}\zeta = \varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)$$

更に次の記号を導入する

- $[a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ a : 実数
- $(a; q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j)$, $(a; q)_0 := 1$
- q -shift operator $T = T_{q^2} : T_{q^2}\varphi(\zeta) := \varphi(q^2\zeta)$

(注意3) $-\infty \sim 0$ の Jackson積分は、次で定める.

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(\zeta) d_{q^2}\zeta := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(-q^{2n}) q^{2n} (1-q^2)$$

§1. 差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ と、そのスペクトルについて。

まず Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ を定める。

• $\mathcal{H}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi$ は $(-\infty, 0]_{q^2}$ 上の関数であって、

$$\int_{-\infty}^0 |\varphi(\zeta)|^2 \mu_{\alpha,\beta}(\zeta) d_{q^2}\zeta < +\infty$$

ここで、 α, β は非負の整数であって、density function

$\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)$ は、 $\mu_{\alpha,\beta}(\zeta) := (-\zeta)^\alpha (q^2\zeta; q^2)_\beta$ で定める。

次に、我々が扱う差分作用素について述べる。 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ 上の差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ を次で定める。

$$C_{\alpha,\beta} \varphi(\zeta) := \frac{-q^{\alpha-\beta+1}}{\mu_{\alpha,\beta}(\zeta)} D_{q^2}^* \mu_{\alpha+1,\beta+1}(\zeta) D_{q^2} \varphi(\zeta) + \left[\frac{\alpha+\beta+1}{2} \right]_q \varphi(\zeta)$$

ここで、 $D_{q^2}^*$ は Jackson 積分に関する D_{q^2} の adjoint であり、

$$D_{q^2}^* = -q^{-2} T_{q^2}^{-1} D_{q^2}$$

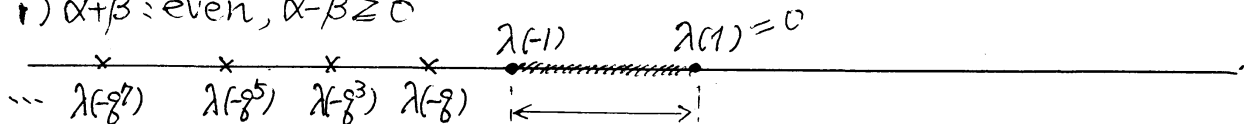
そして、 $C_{\alpha,\beta}$ の定義域 $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ を次で定める。

$\mathcal{D}_{\alpha,\beta} \ni \varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi, C_{\alpha,\beta} \varphi \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ かつ $\lim_{\zeta \rightarrow 0} |\zeta|^{\frac{\alpha+1}{2}} D_{q^2} \varphi(\zeta) = 0$

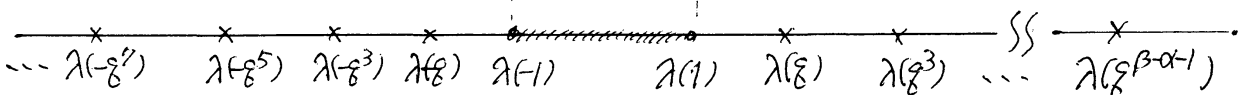
すると、 $(C_{\alpha,\beta}, \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$ は、 $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ 上の自己共役作用素となる。

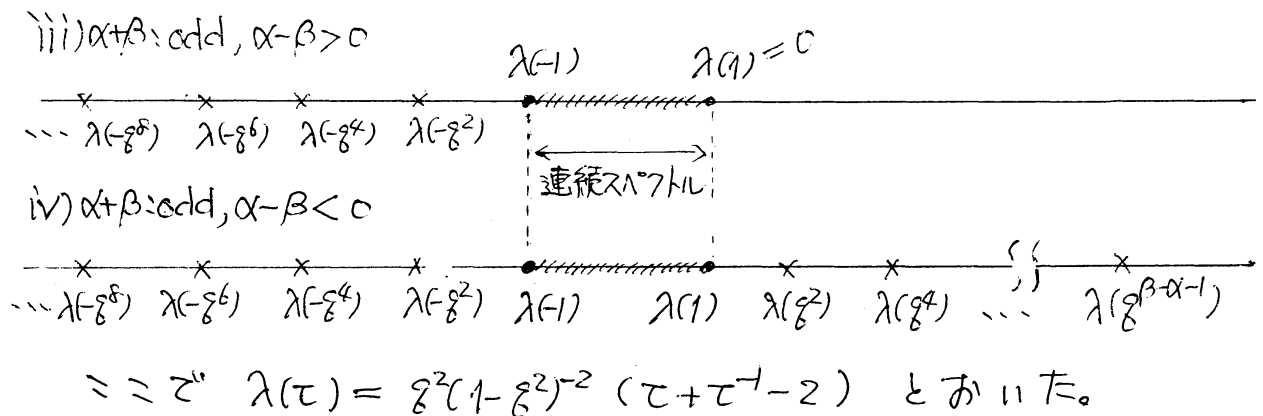
定理 1 $(C_{\alpha,\beta}; \mathcal{D}_{\alpha,\beta})$ のスペクトルは次のようになる。

i) $\alpha+\beta = \text{even}, \alpha-\beta \geq 0$



ii) $\alpha+\beta = \text{even}, \alpha-\beta < 0$





(注意1) $\lambda < 0$ の部分に現れる点スペクトルは、 $\alpha+\beta: \text{even}$ の時、 $\lambda(-q^{2n-1}), n=1,2,3,\dots$ 、 $\alpha+\beta: \text{odd}$ の時、 $\lambda(-q^{2n}), n=1,2,3,\dots$ となり、共に無限個現れる。

(注意2) 低エネルギー領域のみ、 $C_{\alpha,\beta}$ の連続スペクトルが現れ、 α, β 依らず、それは、

$$\{\lambda(e^{i\theta}); 0 \leq \theta \leq \pi\} = \left[-\frac{4q^2}{(1-q^2)^2}, 0\right]$$

なる閉区間となる。

(注意3) $\lambda > 0$ の部分には点スペクトルが現れる場合、その数は、ちょうど $\lfloor \frac{\beta-\alpha}{2} \rfloor$ 個である。

§2. $C_{\alpha,\beta}$ の固有関数系

$C_{\alpha,\beta}$ の固有関数系を具体的に与えるため、basic hypergeometric functionを用いる。それは、次のようなものである。

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; q; z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} z^n$$

この ${}_2\phi_1$ に対して、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau)$ を次で定める。

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau) := {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} \tau q^{\alpha+\beta+1} & \tau^{-1} q^{\alpha+\beta+1} \\ & q^{2\alpha+2} \end{matrix} ; q^2 ; q^2 \zeta \right)$$

すると、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau)$ は、 $\{-1 \leq \zeta < 0\} \cap \{-\infty, 0]_{q^2}$ において、

$$\{ C_{\alpha,\beta} - \lambda(\tau) \} \varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau) = 0$$

を満たす。そこで、上記の差分方程式の解として、 $(-\infty, 0]_{q^2}$ 全体に延長したのも、同じ $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau)$ で表わす事にする。

定理 2

- i) $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq \pi$ は、連続スペクトル $\lambda(e^{i\theta})$ に対応する、 $C_{\alpha,\beta}$ の一般化された固有関数である。
- ii) $\lambda(\tau)$ が点スペクトルであるような τ に対して、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \tau)$ は、 $C_{\alpha,\beta}$ の固有関数となっている。

§ 3 Gauss の超幾何関数との関係

$C_{\alpha,\beta}$ は、ある意味で“超幾何型”の差分作用素である。つまり、 $q \rightarrow 1$ とする事で Gauss の超幾何微分作用素とうまく対応しているのである。以下において、その対応関係を説明する。

形式的に $q \rightarrow 1$ とすると、すぐ判るように、

$$D_{q^2} \rightarrow \frac{d}{d\zeta}, \quad D_{q^2}^* \rightarrow -\frac{d}{d\zeta}, \quad \mu_{\alpha,\beta}(\zeta) \rightarrow (-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta+1}{2} \right]_q \rightarrow \frac{\alpha+\beta+1}{2} \quad \text{従って、この時、}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,\beta} &\xrightarrow{(\varrho \rightarrow 1)} \frac{1}{(-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta} \frac{d}{d\zeta} (-\zeta)^{\alpha+1} (1-\zeta)^{\beta+1} \frac{d}{d\zeta} + \left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \\
&= (-\zeta)(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \{(\alpha+\beta+2)\zeta - (\alpha+1)\} \frac{d}{d\zeta} + \left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow P_{\alpha,\beta} \text{ とおくと、} P_{\alpha,\beta} \text{ は Gauss の超幾何微分}
\end{aligned}$$

作用素となっている。そして、 $P_{\alpha,\beta} f = \sigma^2 f$ の解で、原点で正則なものは、

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \sigma \\ \alpha+1 \end{matrix} ; \zeta \right)$$

で与えられる。一方、 $C_{\alpha,\beta} \varphi = \lambda(\varrho^{2\sigma}) \varphi$ の解は、

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \varrho^{2\sigma}) \text{ で与えられ、} \varrho \rightarrow 1 \text{ とすると、} \lambda(\varrho^{2\sigma}) \rightarrow \sigma^2$$

かつ、 $\varphi_{\alpha,\beta}(\zeta; \varrho^{2\sigma}) \longrightarrow {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \sigma \\ \alpha+1 \end{matrix} ; \zeta \right)$

となり、うまく対応している事が判る。

§4. 問題の背景

何故、このような差分作用素のスペクトルを考えるのかという、それは量子群の表現論と関係があるからであるが、説明を簡単にするために、ここでは通常の Lie 群 $SU(1,1)$ に話を置き換えて説明する。以下 $G = SU(1,1)$ とおき、対応する Lie 環を \mathfrak{g} と表わすと、

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}; xy - uv = 1, \bar{x} = y, \bar{u} = v \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b \\ \bar{b} & -ia \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}$$

\mathfrak{g} の base $H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ をとり、

これを用いて、 G 上の 2 次の微分作用素 P を、

$$P = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{4}$$

と定める。

一方、 G 上の関数 f に対して、 $R_g f(x) = f(xg)$ として、右移動 R_g を定めると、 $R_g R_h = R_{gh} \quad \forall g, h \in G$, かつ

$$\|R_g f\|_{L^2(G)} = \|f\|_{L^2(G)} \quad (L^2 \text{ ノルムを不変にする})$$

を満たす。従って、 $(R_g, L^2(G))$ はユニタリー表現となっている。

実は、この R_g と上記 P の間には " $PR_g = R_g P$ " という関係がある。(この性質を持つ上記 P を Casimir 作用素という)

そこで、 $V_\lambda \subset L^2(G)$ を、固有値 λ に対する P の固有空間

とすると、上記の性質より、 $f \in V_\lambda \Rightarrow R_g f \in V_\lambda$ という事が

導ける。即ち、固有空間 V_λ は、 $(R_g, L^2(G))$ の部分表現に

なっている事が判る。従って、ユニタリー表現 $(R_g, L^2(G))$

が既約表現の直和と、どのように分解するか、を調べるに

は、微分作用素 P のスペクトル分解を調べれば良いのである。

実際、このやり方で、補系列と呼ばれる表現の系列を除く、

$G = SU(1,1)$ の既約ユニタリー表現を全て取り出す事ができる。

そして、Casimir作用素 P のスペクトルを調べる過程で、 \mathfrak{g} で述べた超幾何型微分作用素 $P_{\alpha,\beta}$ が現れるのである。以下において、その事を大雑把に説明する。

まず、Cartan分解と呼ばれる G の元の分解を考える。

$$(*) \quad G \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\zeta} & \sqrt{-\zeta} \\ \sqrt{-\zeta} & \sqrt{-\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta'} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta'} \end{pmatrix}$$

$\zeta = -|u|^2$ とおいた。ここで $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$, $-\infty < \zeta < 0$

上記のCartan分解(*)より、次を得る。

$$(**) \quad \begin{cases} x = e^{i(\theta+\theta')} \sqrt{-\zeta} & u = e^{i(\theta-\theta')} \sqrt{-\zeta} \\ v = e^{-i(\theta-\theta')} \sqrt{-\zeta} & y = e^{-i(\theta+\theta')} \sqrt{-\zeta} \end{cases}$$

(注意) 上記の分解(*)は、一意ではなく、 $(\theta, \theta') \rightarrow (\theta+\pi, \theta'+\pi)$ と、とり替えるだけの任意性がある。また、 $\zeta = 0$ では、(*)は well-defined ではない。

さて、 G 上の関数を、 $(\theta, \zeta, \theta') \in [0, 2\pi) \times (-\infty, 0) \times [0, 2\pi)$ の3変数の関数と考え、 (θ, θ') に関して、Fourier級数展開しておく。更に、 $e^{i(k\theta+l\theta')}$ の形の項を、(**)を用いて、 x, u, v, y 、及び ζ を表現し、次の展開式を得る。

$f \in L^2(G)$ に対して、

$$(\#) \quad f(g) = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} f_{mn}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m < 0, n \geq 0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} u^n \\ + \sum_{m \geq 0, n < 0} f_{mn}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m < 0, n < 0} f_{mn}(\zeta) y^{-m} v^{-n}$$

展開式(井)において、各 (m, n) に対応する $L^2(G)$ の部分空間を $H_{m, n}$ とおくと、 $L^2(G) = \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} H_{m, n}$ (直交分解) となり、しかも、“ $PR_g = R_g P \quad \forall g \in G$ ” を用いると、

$$f \in H_{m, n}, Pf \in L^2(G) \Rightarrow Pf \in H_{m, n}$$

が言える。そこで、 m, n が ≥ 0 か、 < 0 か、に応じて、

$e_{m, n}$ は $x^m u^n, x^m v^{-n}, y^{-m} u^n, y^{-m} v^{-n}$ のどれかを表わすとすると、 $f(\zeta) e_{m, n} \in H_{m, n}$ に対して、

$$P(f(\zeta) e_{m, n}) = \{P_{\alpha, \beta} f(\zeta)\} e_{m, n}$$

となっているのである。そこで $\alpha = |n|, \beta = |m|$ とおいた。

また、分解(*)において、 $dg = d\theta d\zeta d\theta'$ が G の不変測度、(Haar 測度) となる事が判る。そこで(**) を用いると、例えば、 $f(\zeta) x^m u^n$ に対しては、

$$\begin{aligned} \|f(\zeta) x^m u^n\|_{L^2(G)}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 |x^{2m}| |u^{2n}| d\theta d\theta' d\zeta \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^0 |f(\zeta)|^2 (-\zeta)^{|n|} (1-\zeta)^{|m|} d\zeta \end{aligned}$$

これより、何故、 $(-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^\beta$ なる density function が現れるのか、が判る。

以上より、 P のスペクトルを調べる問題が、 $P_{\alpha, \beta}$ のスペクトルを調べる問題に帰着された。 $SU_{\mathbb{C}}(1, 1)$ という量子群に対して、上記と同様の考察を行なって、出て来たのが、 $C_{\alpha, \beta}$ という差分作用素である。

§5. 量子群 $SU_q(1,1)$ について.

ここでは、量子群 $SU_q(1,1)$ について、簡単な説明を与え、 $SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素のスペクトルがどうなっているかを述べる。

古典 Lie 群 $SU(1,1)$ との比較により、説明する。

$$SU(1,1) \ni g = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \text{ に対して } \begin{array}{ll} g \mapsto x & g \mapsto u \\ g \mapsto v & g \mapsto y \end{array}$$

を、それぞれ、 $SU(1,1)$ 上の関数と考えると、これらの関数は、 $xy - uv = 1$, $\bar{x} = y$, $\bar{u} = v$ なる関係式を満たしている。そして、 $SU(1,1)$ 上の関数空間は、このような関係式を持つ生成元 x, u, v, y で生成されているのである。

量子群 $SU_q(1,1)$ とは、(正確には、 $SU_q(1,1)$ の座標環 $A(SU_q(1,1))$ とは)、次の関係式を持つ4つの生成元 x, u, v, y で生成された algebra の事である。

$$(1) \quad qxu = ux, \quad qxv = vx, \quad qvy = yv, \quad quy = yu \\ uv = vu, \quad xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1$$

$$(2) \quad x^* = y, \quad u^* = q^{-1}v, \quad v^* = qu, \quad y^* = x$$

(注意) (1) で $q \rightarrow 1$ とすると、関係式 $xy - uv = 1$ だけが生き残る。また、(2) で $*$ と書いたのは、作用素の adjoint の意味である。実際、このような algebra は、ある種の数列空間上の operator algebra として実現されるのである。

(注意2) $SU(1,1)$ 上の関数の全体は、(掛け算作用素と見て) 可換な operator algebra を成す。そして、 $SU_q(1,1)$ の座標環は形式的に $q \rightarrow 1$ とした時、この可換な operator algebra に“収束”する。この時、(2) は、 $\bar{x} = y, \bar{u} = v$ なる関係式に“収束”する。

(注意3) $A(SU_q(1,1))$ と呼ばれるこの algebra は、更に Hopf algebra の構造を持つが、それについては説明を省く。

量子群 $SU_q(1,1)$ の場合にも、 L^2 空間 $L^2(SU_q(1,1))$ が構成できるが、その元は、 $\S 4$ 、(井) と同様に、次の形に展開できる。 $f \in L^2(SU_q(1,1))$ に対して、

$$f = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) x^m u^n + \sum_{m < 0, n \geq 0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} u^n \\ (\#\#) + \sum_{m \geq 0, n < 0} f_{m,n}(\zeta) x^m v^{-n} + \sum_{m < 0, n < 0} f_{m,n}(\zeta) y^{-m} v^{-n}$$

ここで、 $\zeta = -q^{-1}uv$ 、とあった。前述のように、 x, u, v, y, ζ は、ある数列空間上の作用素であり、 $f_{m,n}(\zeta)$ もそうであるが、ある種の考察により、 $\zeta, f_{m,n}(\zeta)$ は、(掛け算作用素として) $(-\infty, 0]_q$ 上の関数と同一視できる。

(井井)において、各 (m,n) に対応する $L^2(SU_q(1,1))$ の部分空間を $H_{m,n}$ とし、又、 $\S 4$ と同様に $e_{m,n}$ を定めるとする。

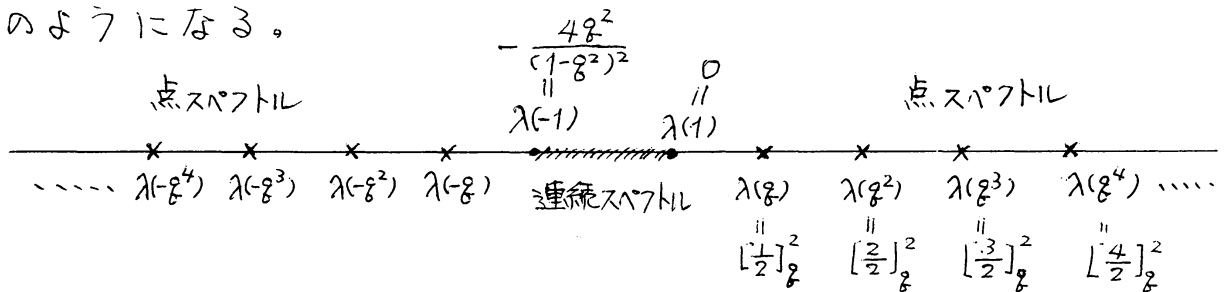
さて、 $SU(1,1)$ と同様、 $SU_q(1,1)$ 上にも Casimir 作用素が定義される。それを C と表わすと、 $\S 4$ と同じ事が成り立つ。

即ち、 $f(\zeta)e_{m,n} \in H_{m,n}$ に対して $C(f(\zeta)e_{m,n}) = \{C_{\alpha,\beta} f(\zeta)\} e_{m,n}$

ここで、 $|n| = \alpha$, $|m| = \beta$ とおいた。

従って、量子群 $SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素 C のスペクトル解析は、一変数の超幾何型差分作用素 $C_{\alpha,\beta}$ のスペクトル解析へと帰着される。この時、与えられた定理 1 からの帰結として、次の定理が成り立つ。

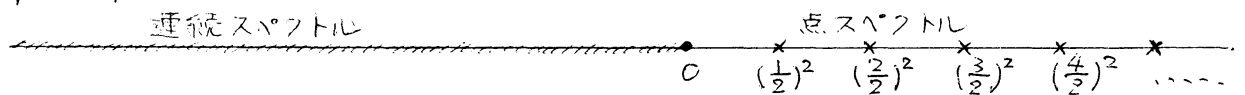
定理 3 $SU_q(1,1)$ の Casimir 作用素 C のスペクトルは、次のようになる。



(注意 1) 各点スペクトルの重複度は、 ∞ である。

(注意 2) $\lambda > 0$ の部分の点スペクトル, 連続スペクトル, そして、 $\lambda < 0$ の部分の点スペクトル. それぞれの固有空間の系列は、discrete series, principal continuous series, strange series. と呼ばれている。そして、この strange series という系列は、 $SU(1,1)$ の場合には存在しない系列であり、量子群と古典群の差異を表わしている。

(注意 3) 形式的に $q \rightarrow 1$ とすると、strange series は消滅し principal continuous series が無限に伸びて、次のようになる。



これは、 $SU(1,1)$ の Casimir 作用素のスペクトルと一致する。

REFERENCES

- [1] Bargman Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. Math.*, 48 (1947) 568-640
- [2] Exton q -Hypergeometric Functions and Applications, John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Chichester Toronto 1983
- [3] Jimbo. M., A q -difference analogue of $U_q(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.*, 10 (1985), 63-69
- [4] Takeuchi T, Masuda T, and Ueno K, Spectral analysis of a q -difference operator which arises from the quantum $SU(1,1)$ group, preprint
- [5] Takeuchi T, Masuda T, and Ueno K, Spectrum of an operator appears in the quantum $SU(1,1)$ group *Quantum and Non-Commutative Analysis* (H. Araki et al. eds.) 253-261 (1993) Kluwer Academic Publishers
- [6] Masuda T, Mimachi K, Nakagami Y, Noumi M, Saburi Y, and Ueno K, Unitary representations of the quantum group $SU_q(1,1)$ I, II *Lett. Math. Phys* 19 (1990) 187-194, 195-204

- [7] Ueno, K., Spectral analysis of the Casimir operator on the quantum group $SU_q(1,1)$, Proc. Japan Acad., 66 (1990), 42-44
- [8] Vaksman L. L. and Korodskii L. I., Spherical functions on the quantum group $SU_q(1,1)$ and q -analogue of Fok - Mehler's formula, Funkts. Anal. Prilozhen (in Russian)
- [9] Woronowicz S. L., Twisted $SU(2)$ group. An example of non-commutative differential calculus, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ, 23 (1987) 117-181
- [10] Woronowicz S. L. Differential calculus on compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 122 (1989) 125-170