数理解析研究所講究録
第 873 巻 1994 年 34-44

不連続な反射波に関する存在定理と漸近展開

茨城大教育　曽我日出夫 (Hideo SOGA)

序

$\mathbb{R}^n$ 内の物体 $\mathcal{O}$ による散乱を考える場合、しばしば次のような方程式の解について詳しく分析する必要に迫られる。

$$(0.1)\quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \quad (\Omega = \mathbb{R}^n - \mathcal{O}), \\ u(t,x) = -\delta(t-\omega\cdot x) & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{if } t << 0. \end{cases}$$

ここで $\delta(t)$ は Dirac 関数であり、境界 $\partial\Omega$ は滑らかで有界であるとする。この方程式の解は、ω 方向に進行する平面波 $\delta(t-\omega\cdot x)$ の散乱波(反射波)を表している。(境界条件は Dirichlet)。また、波動方程式の基本解を考えたとき、不連続な進行波の形をしていることが多い。例えば、$\mathbb{R}^3$ においては、$t^{-1}\delta(t-|x|)$。この他様々な類似の進行波が存在する。素朴な疑問として、この種の進行波が物体にあたった場合、どのような現象が起こっているのであろうか、解の

存在は保証されるのであろうかということが考えられる。方程式(0.1)は、散乱核に関する逆問題を調べるとき登場する(例えば、Majda [2] 参照)。その際、tに関してFourier変換した方程式(reduced wave 方程式)を調べる方法もあるが、直接(0.1)を調べる方が適切であると思える。

以上のような背景があって、本稿では波動方程式に対する(あるクラスの)不連続な解の存在について考察する。さらに、上で述べたような進行波の反射波の漸近展開を求める。また、これらの結果の応用についても触れる。

§1. 主要結果

以後、(0.1)を含む一般的な弾性方程式

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - L)u(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega, \\ Bu(t,x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega \end{cases}$$

を考えることにする。ここで境界条件はDirichlet又はNeumann条件とする。今、(1.1)は通常のSobolev空間の意味でwell-posedであるとする。すなわち、次の(H.1), (H.2)を仮定する。

(H.1) 空間 $\bigcap_{i=0}^{2} C^{2-i}(\mathbb{R}_t; H^i_{loc}(\Omega_x))$ において(1.1)に対する解

の存在定理が得られる。

(H.2)　(H.1)の解に対して伝播速度が有限である。

上記の $C^k(\mathbb{R}_t; H^i_{loc}(\Omega))$ は、Sobolev空間 $H^i_{loc}(\Omega)$ に値をもつもの C^k 関数の空間を表す。(H.1), (H.2)が成立する具体的な設定については、例えば Shibata-Soga [3] で詳述している。

序で述べた不連続な進行波は、いずれも $H^{-\infty}_{loc}(\mathbb{R}_t)$ に値をもつ $H^2_{loc}(\mathbb{R}^n_x)$ の関数（$H^2_{loc}(\mathbb{R}^n_x; H^{-\infty}_{loc}(\mathbb{R}_t))$ で表す）とみなせる。例えば

$$\delta(t-\omega\cdot x) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n_x; H^{-3}_{loc}(\mathbb{R}_t)).$$

本節では、空間 $H^2_{loc}(\Omega_x; H^{-m}_{loc}(\mathbb{R}_t))$ における(1.1)の解の存在等について考察する。

<u>定理1</u>. $v(t,x)$ は $H^2_{loc}(\mathbb{R}^n_x; H^{-m+4}(I))$ に属し（$m=4,5,\cdots$, I は有限開区間）、方程式

$$(\partial_t^2 - L)v(t,x) = 0 \quad in \quad I\times\mathbb{R}^n$$

をみたすとする。さらに、すべての $t\in I$ において、$\mathrm{supp}[v(t,\cdot)] \subset \Omega$ とする。このとき、(1.1)の解 $u(t,x)$ で

$$u(t,x) = v(t,x) \quad \text{in } I \times \Omega$$

をみたすものが $H^2_{loc}(\Omega_x; H^{-m}_{loc}(\mathbb{R}_t))$ 内に存在する。

(H.2) にある有限伝播速度が v 以下であるとする。(H.2) より、(H.1) にあるような解に対しては、有限な依存領域が存在する。すなわち、任意の $(s, y) \in \mathbb{R} \times \Omega$ に対して、これを頂点とする円錐を

(1.2) $\qquad C = \{(t,x) : |x-y| < v(s-t)\}$

とおくと、すべての data が $C \cap [(t_0, s) \times \Omega]$ で 0 ならば、同じ所で解も 0 となる。定理1でいう解はもはや $t = t_0$ での値が定義されないが、ここで述べた通常の解 ((H.1) の解) に対するものと類似の結果が得られる。

<u>定理2</u>. C を (1.2) にある円錐とする。$u(t,x) \in H^2_{loc}(\Omega; H^{-m}_{loc}(\mathbb{R}))$ が方程式

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - L)u(t,x) = 0 & \text{in } C \cap (t_0, s) \times \Omega, \\ Bu(t,x) = 0 & \text{on } C \cap (t_0, s) \times \partial\Omega, \\ u(t,x) = \partial_t u(t,x) = 0 & \text{on } C \cap (t_0, t_1) \times \Omega \end{cases}$$

$(t_0 < t_1 < s)$ をみたすならば、次の式が成立する。

$$u(t,x) = 0 \quad \text{in } C \cap (t_0, s) \times \Omega .$$

上記の定理1,2は，結局通常のSobolev空間の結果((H.1)と(H.2))に帰着できる。そのキーポイントになるのは次の補題である。

補題1. ある整数kに対して

$$(1+t^2)^{-k/2} u(t,x) \in H^2_{loc}(\Omega_x ; H^{-m}(\mathbb{R}_t))$$

ならば次のことが成立する。

$$(D_t \mp i)^{-m-3} u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}_t ; H^2_{loc}(\Omega_x)).$$

さらに，$\mathrm{supp}\,[u(\cdot\,, x)] \subset {[a, \infty) \atop (-\infty, a]}$ より，$\mathrm{supp}[(D_t \mp i)^{-m-3} u(\cdot\,, x)] \subset {[a, \infty) \atop (-\infty, a]}$ が従う(複号同順)。

この補題は，$(D_t - i)^{-1}$ ($(D_t + i)^{-1}$) の symbol $(\sigma - i)^{-1}$ ($(\sigma + i)^{-1}$) が σ の複素平面の上(下)半平面に解析接続できることから，容易に確め得る。

$u(t,x) \in H^2_{loc}(\Omega ; H^{-m+3}(\mathbb{R}))$ が (1.1)をみたすならば，補題1より，$w(t,x) \equiv (D_t - i)^{-m} u(t,x) \in C^2(\mathbb{R} ; H^2_{loc}(\Omega))$であって，$w$はやはり(1.1)をみたす。さらに $t < t_0$のとき$u(t,x)$

$=0$ ならば、$t<t_0$ のとき $w(t,x)=0$ となる。したがって、$w(t,x)$ に対しては (H.1), (H.2) が適用できることになる。$u(t,x)=(D_t-i)^m w(t,x)$ であるが、微分作用素 $(D_t-i)^m$ を作用させても support は増えない。以上のことが定理1, 2の証明の基本的なアイデアである。詳しくは Soga [6] を見よ。

§2. 不連続な反射波の進行波展開

(1.1) にある L は定係数で次のような形をしているとする。

$$L(\partial_x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}.$$

$n\times n$ 行列 a_{ij} の (p,q) 成分を a_{ipjq} で表す。$\{a_{ij}\}$ が以下の (A.1), (A.2) をみたすならば、§1 の (H.1), (H.2) が保証されることが分かっている。(Shibata-Soga [3] をみよ)。

(A.1) $\quad a_{ipjq}=a_{pijq}=a_{jqip}, \quad i,j,p,q=1,2,\cdots,n,$

(A.2) すべての対称行列 (ε_{ip}) に対して次の式が成立する。

$$\sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ipjq}\,\varepsilon_{ip}\,\overline{\varepsilon_{jq}} \geqq \delta \sum_{i,p=1}^{n} |\varepsilon_{ip}|^2.$$

ここではこれに加えて次の (A.3) を仮定する。

(A.3) $L(\xi)$ は重複度一定の特性根 $\{\lambda_i(\xi)\}$ $(\lambda_1<\cdots<\lambda_d)$ をもつ。

これらの条件の下では、通常の漸近解が構成できることが分かっている。(Soga [4])。

容易に分かるように、v_0 を $\lambda_\ell(\omega)$ の固有ベクトルとすると、平面波

$$v(t,x) = \delta(t - \lambda_\ell(\omega)^{-1/2}\omega\cdot x)v_0 \qquad (\omega \in S^{n-1})$$

は $(\partial_t^2 - L)v = 0$ をみたす。これが境界 $\partial\Omega$ にぶつかるのは、

$$t = \lambda_\ell(\omega)^{-1/2}\gamma(\omega) \qquad (\gamma(\omega) = \min_{x\in\partial\Omega} \omega\cdot x)$$

のときである。定理1より $v(t,x)$ に対する反射波が存在することは保証されている。これから t が $\lambda_\ell(\omega)^{-1/2}\gamma(\omega)$ に近い所で、反射波の漸近展開を求めることにする。

$$\rho_0(t) = \delta(t), \qquad \rho_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\ (t \geqq 0),\ 0\ (t<0)$$

とおく。このとき、$\rho_k'(t) = \rho_{k-1}(t)$ となることに注意しよう。さらに、$\varphi^i(x)$ を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} \lambda_i(\partial_x\varphi^i(x)) = 1 & \text{in } \Omega\cap U_\varepsilon, \\ \varphi^i(x) = \lambda_\ell(\omega)^{-1/2}\omega\cdot x & \text{on } \partial\Omega\cap U_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial\nu}(x) < 0 & \text{on } \partial\Omega\cap U_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで、$U_\varepsilon = \{x :\ \omega\cdot x < \gamma(\omega) + \varepsilon\}$，$\varepsilon$ は十分小さい正数である。$\rho_k(t - \varphi^i(\omega))$ は λ_i モードの進行波であり、C^{k-2}

($k \geqq 2$) に属する。反射波はこれらの進行波の和に展開される。

定理3. $\Omega \cap U_\varepsilon$ で定義された, 次の性質をみたす C^∞ 関数 $\{u_k^i(x)\}$ が存在する。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - L)\Big[\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{m} \rho_k(t-\varphi^i(x))u_k^i(x)\Big] \equiv 0 \mod C^{m-2}((-\infty, t_0)\times\overline{\Omega}), \\ B\Big[\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{m} \rho_k(t-\varphi^i(x))u_k^i(x)\Big] \equiv B[v(t,x)] \mod C^{m-2}((-\infty, t_0)\times\partial\Omega), \\ \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{m} \rho_k(t-\varphi^i(x))u_k^i(x) = 0 \quad \text{if } t < \lambda_\ell(\omega)^{-1/2}\gamma(\omega). \end{cases}$$

定理3の証明は, Soga [6] にあるが, そのアイデアは本質的には Soga [4] で議論されている通常の漸近解の構成のときと同じである。

§3. 散乱問題への応用

本節では, §1, 2の結果を使って, (1.1)に対する散乱核の漸近展開を求めることにする。以後, 空間は奇数次元 ($\dim \Omega$ が奇数) とする。(1.1)に対する Lax-Phillips 型の散乱論が得られることが分かっている (Shibata-Soga [3] 参照)。Shibata-

Soga [3] で定義されている散乱核を $S(s, \theta, \omega)$ とする。Majda [2] 型の $S(s, \theta, \omega)$ の表現式も、Soga [5] によって得られている。すなわち、

$$(3.1)\quad S(s, \theta, \omega) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(\theta)^{-n/4} \int_{\partial\Omega} \{ P_i(\theta)(\partial_t^{n-2} N v_j)(\lambda_i(\theta)^{-1/2}\theta\cdot x - s, x; \omega) - \lambda_i(\theta)^{-1/2} P_i(\theta)({}^tN\theta\cdot x)(\partial_t^{n-1} v_j)(\lambda_i(\theta)^{-1/2}\theta\cdot x - s, x; \omega)\} dS_x \qquad (\theta \neq \omega).$$

ここで、N は外向き法線微分、$P_i(\theta)$ は固有値 $\lambda_i(\theta)$ に対応する projection, $v_j(t, x; \omega)$ は次の方程式の解である。

$$(3.2)\quad \begin{cases} (\partial_t^2 - L)v = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega, \\ Bv = -2^{-1}(-2\pi i)^{1-n}\lambda_j(\omega)^{-n/4} B[\delta(t - \lambda_j(\omega)^{-1/2}\omega\cdot x) P_j(\omega)] & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega \\ v = 0 & \text{if } t < \lambda_j(\omega)^{-1/2} r(\omega). \end{cases}$$

Soga [5] で示されているように、

$$\operatorname{supp}[P_i(-\omega) S(\cdot, -\omega, \omega) P_j(\omega)] \subset (-\infty, -(\lambda_i(\omega)^{-1/2} + \lambda_j(\omega)^{-1/2}) r(\omega)]$$

となる。(3.2) は §2 で扱った方程式である。定理 3 を使うと (3.1) より、$s = -(\lambda_i(\omega)^{-1/2} + \lambda_j(\omega)^{-1/2}) r(\omega)$ の近傍で有効な

$P_i(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_j(\omega)$の漸近展開が得られる。

定理4. $\partial\Omega$のGauss曲率が$\{x: \omega\cdot x = r(\omega)\}\cap\partial\Omega$において0でないとする。$\{x: \omega\cdot x = r(\omega)\}\cap\partial\Omega = \{a_k\}_{k=1,\cdots,N}$とする。このとき，$s=-r_{jj}(\omega)=-(\lambda_j(\omega)^{-1/2}+\lambda_j(\omega)^{-1/2})r(\omega)$における漸近展開

$$P_j(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_j(\omega)$$
$$\sim c\left(\sum_{k=1}^{N}K(a_k)^{-\frac{1}{2}}\right)\delta^{(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}(s+r_{jj}(\omega))P_j(\omega)+\cdots$$

を得る。ここでcは0でない($\partial\Omega$によらない)定数，$K(a_k)$はa_kにおける$\partial\Omega$のGauss曲率である。

$i\neq j$のとき，$P_i(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_j(\omega)$の$s=-r_{ij}(\omega)=-(\lambda_i(\omega)^{-1/2}+\lambda_j(\omega)^{-1/2})r(\omega)$における特異性は極めてデリケートな問題になる。詳しくはKawashita-Soga [1]を参照。

定理5. $L(\partial_x)$は等方的であるとする（このとき$\{\lambda_k\}=\{\lambda_1,\lambda_2\}$である）。$\partial\Omega$のGauss曲率に関して定理4と同じ仮定がみたされているとする。ωに垂直なベクトルθに対して，$\partial_\theta M>0$（又は<0）（Mは$\partial\Omega$の主曲率）が$\{x: \omega\cdot x = r(\omega)\}\cap\partial\Omega$上で成立しているならば，$s=-r_{12}(\omega)$にける漸近展開

$${}^t\theta P_1(\omega)S(s,-\omega,\omega)P_2(\omega)\omega$$

$$\sim C\left(\sum_{k=1}^{N} K(a_k)^{-1/2}\,\partial_\theta M(a_k)\right) H^{(\frac{n}{2}-\frac{3}{2})}(s+r_{12}(\omega))+\cdots$$

が得られる。Cは$\partial\Omega$によらない0でない定数である。$H(s)$はHeaviside関数である。

定理4，5の証明は．Soga [6]に詳しくされている。

文　献

[1] M. Kawashita - H. Soga: Mode-conversion of the scattering kernel for the elastic wave equation, J. Math. Soc. Japan 42 (1990), 691-712.

[2] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies, Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 165-194.

[3] Y. Shibata-H. Soga: Scattering theory for the elastic wave equation, Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 (1989), 861-887.

[4] H. Soga: Asymptotic solutions of the elastic wave equation and reflected waves near boundaries, Comm. Math. Phys. 133 (1990), 37-52.

[5] H. Soga: Representaion of the sattering kenel for the elastic wave equation and singularities of the back-scattering, Osaka J. Math. 29 (1992), 809-836.

[6] H. Soga: Non-smooth solutions of the elastic wave equation and singularities of the scattering kernel, to appear.