

Propagation of frequency sets for Schrödinger operators

阪大理 横山 耕一郎 (Keichiro Yokoyama)

§ 1

物体の運動は、古典力学においては Hamilton-Jacobi 方程式、量子力学においては Schrödinger 方程式により記述されており、例えば \mathbb{R}^n でポテンシャルが $V(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) で与えられている場における、質量 m の質点の運動を表す H-J 方程式は

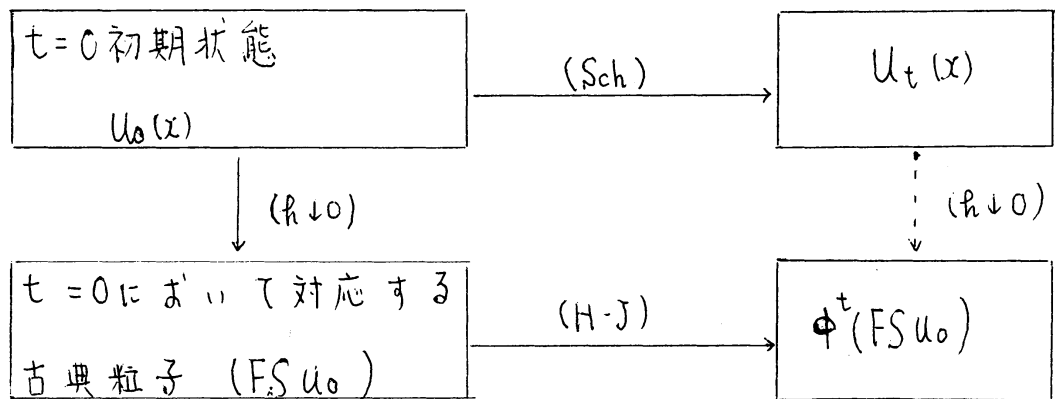
$$p(x, \xi) = 2m|\xi|^2 + V(x) \quad ((x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{と おく と}$$

$$(H-J) \begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_1^t(x, \xi) = (\partial_\xi p)(\phi_1^t(x, \xi), \phi_2^t(x, \xi)) \\ \frac{d}{dt} \phi_2^t(x, \xi) = -(\partial_x p)(\phi_1^t(x, \xi), \phi_2^t(x, \xi)) \\ \phi^0(x, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\phi^t = \begin{pmatrix} \phi_1^t \\ \phi_2^t \end{pmatrix})$$

一方、Schrödinger 方程式は、 \hbar を (プランク定数) $/2\pi$ とすると、

$$(Sch) \begin{cases} i\hbar \partial_t u(t, x) = p(x, -i\hbar \nabla_x) u(t, x) \\ u(0, x) = u_{0, \hbar}(x) \quad (\text{以下 } u_0) \end{cases}$$
$$(p(x, -i\hbar \nabla_x) = -\hbar^2 \Delta + V(x))$$

Bohrの対応原理によると、「H-J方程式の解の軌道は、 \hbar が十分小さいと考えたときのSch.方程式の解の近似」となる。
 例えば、 $V(x) = |x|^2$ 等、 \mathbb{R}^n で C^∞ かつ、ある性質を(Robert)満たすときについては、



上の図の $\phi^t(FS u_0)$ と $FS[u_t]$ が一致する。つまり時刻 t において、 $\hbar \downarrow 0$ とするときに対応する古典粒子の位置と運動量は、 u_0 において $\hbar \downarrow 0$ とする時に対応する粒子をH-J方程式に従って発展させたものと同じ、ということです。

今回の結果は、 $V(x)$ が \mathbb{R}^n 全体ではなめらかでない場合はこの関係がどう変わるのかに関することです。

§ 2.

def 1 $m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$B^m = \left\{ u \mid \|u\|_{B^m}^2 = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \left[\|x^\alpha \partial_x^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right] < \infty \right\}$$

$$B^{-m} = (B^m)^* \quad (\text{dual space})$$

(C.1) $u_h \in D'(\mathbb{R}^n)$ は 十分小さい $h_0 > 0$ と, $M, l \in \mathbb{N}$
 $C > 0$ が存在して, $\|u_h\|_{B^{-M}} \leq C h^{-l}$ ($h \in (0, h_0]$) となるもの
 とする。

def 2 frequency set

(C.1) を満たす u_h に対し, $(x^0, \xi^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ が u_h の frequency set
 に属さないとは $(x^0, \xi^0) \notin \text{FS}[u_h]$

ある $\chi(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ が存在して, $\chi(x^0, \xi^0) \neq 0$, かつ

$$\|\chi(x, hD_x) u_h\|_2 = O(h^{-\infty}) \quad (h \downarrow 0) \text{ となるとき.}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } (\chi(x, hD_x) u)(x) = (2\pi h)^{-n} \iint e^{ih(x-y)\cdot\xi} \chi\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \\ \text{以降は全てこの Weyl op. を表すものとする} \end{array} \right)$$

def 3

$$m \in \mathbb{R} \text{ と } p \in [0, 1) \text{ に対し, } a(x, \xi) \in \Sigma_p^m$$

$\Leftrightarrow a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 全ての α, β について, $C_{\alpha\beta} > 0$ が存在し

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m - p(|\alpha| + |\beta|))} \quad ((x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n})$$

定理に必要な仮定をいくつか行う。

$$(A.1) \text{ i) } A(h) = M(x, hD_x) + V(x)$$

$M(x, \xi)$, $V(x)$ は実値, ある $m_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in (0, 1)$ が存在して,

$$M(x, \xi) \in \Sigma_{p_0}^{m_0}$$

- ii) ある閉集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\forall \omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \Omega)$.
 更に, ある $\lambda \in \mathbb{N}$, $C(\varepsilon) > 0$ ($0 < \varepsilon < 1$ とする ε に依る)
 が存在して, $C(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-\lambda})$ ($\varepsilon \downarrow 0$), なおかつ ε を固定
 する度 $\|V(\omega)u\|_2 \leq \varepsilon \|\Delta u\|_2 + C(\varepsilon)\|u\|_2$ が全ての
 $u \in \mathcal{A}$ に対し成立する。
- iii) ある $h_0 > 0$ が存在して, $A(h)$ は任意の $h \in (0, h_0]$ に
 対して本質的に自己共役となる。

(A.2) i) $u_0 \in \mathcal{A}$ で, $\|u_0\|_2 = O(1)$ ($h \downarrow 0$)

ii) ある $\chi_0(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ が存在し $\text{dis}((\text{supp } \chi_0), \Omega \times \mathbb{R}^n) \geq \delta_0 > 0$

かつ $u_0 = \chi_0(x, hD_x)u_0 + O_2(h^\infty)$ ($h \downarrow 0$)

iii) $a(x, \xi) = M(x, \xi) + V(x)$, 以後 $\phi^t(x, \xi)$ は a を Hamiltonian
 とする H-J 方程式の解を表すものとする。

Remark 1 (A.2) ii) は FS u_0 が $\Omega \times \mathbb{R}^n$ から距離 δ_0 以上
 あるために必要な仮定である。(Gérard)

§ 3

def 4 $t > 0$ に対して

$$\mathcal{A}_t^+ = \{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \bar{d}(x, \xi) = \inf_{\tau \in [-t, 0]} [\text{dis}(\phi^\tau(x, \xi), \Omega \times \mathbb{R}^n)] > 0 \}$$

Theorem

$$(*) \begin{cases} i\hbar \partial_t u(t, x) = A(\hbar) u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

(*)で (A.1), (A.2) が満たされているとする。このとき、

$$\inf_{0 \leq t \leq T} [\text{dis}(\phi^t(\text{FS}u_0), \Omega \times \mathbb{R}^n)] > 0 \quad \text{となる } T \text{ について、}$$

$$\text{FS}[u_t] \cap \mathcal{A}_t^+ = \phi^t(\text{FS}u_0) \quad (0 \leq t \leq T)$$

Remark 2

$t < 0$ のときも $\mathcal{A}_t^- = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \inf_{\tau \in [0, -t]} [\text{dis}(\phi^\tau(x, \xi), \Omega \times \mathbb{R}^n)] > 0\}$ におくと、同様の結果が得られる。 \mathcal{A}_t^+ は時刻 $-t$ から 0 まで $\Omega \times \mathbb{R}^n$ から出て来たものの集合のようなものであり、 $\text{FS}[u_t]$ のうち時刻 0 から t までの位置、運動量のはっきりしているものは、 $\text{FS}u_0$ を H-J に従って発展させたものに一致する、というのが定理の主張である。

例として、 $A_1(\hbar) = -\hbar^2 \Delta + \frac{C}{|x|}$ $A_2(\hbar) = (-i\hbar \nabla_x - B_0 \times x)^2 + \frac{C}{|x|}$ ($x, B_0 \in \mathbb{R}^3$) は (A.1), (A.2) を満たしており、特に $C > 0$ のときは、

$$\mathcal{A}_t^+ = \{0\} \times \mathbb{R}^3 \text{ であるから } \text{FS}[u_t] \cap \{x \neq 0\} = \phi^t(\text{FS}u_0)$$

def 5

$A(\hbar)$ が \hbar -admissible であるとは、ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$N \geq N_0 \text{ となる全ての } N \text{ について } A(\hbar) = \sum_{j=0}^N a_j(x, \hbar D_x) + \hbar^{N+1} R_{N+1}(\hbar)$$

$$a_j \in \Sigma_F^m \quad (\exists m \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]) \quad \sup_{\hbar \in (0, \hbar_0]} \|R_{N+1}(\hbar)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L})} < \infty$$

特に a_0 を $A(\hbar)$ の主要部 (P.S.) と呼ぶ。

証明の方針は $(x^0, \xi^0) \notin \text{FS}[U_\hbar] \Leftrightarrow \exists \hbar\text{-ad. op. } P(\hbar)$ が存在して
 $P.S. \neq 0$ at (x^0, ξ^0) かつ $\|P(\hbar)u_\hbar\|_2 = O(\hbar^\infty)$ (Robert) を用いて。

この $P(\hbar)$ を具体的に構成することによる。

$(x^0, \xi^0) \in \mathcal{A}_t^+ - \Phi^t(\text{FS}u_0)$ とすると, $\Phi^t(x^0, \xi^0) \notin \text{FS}u_0$ より, $\exists b(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$
 が存在して $b(\Phi^t(x^0, \xi^0)) \neq 0$, $\|b(x, \hbar D_x)u_0\|_2 = O(\hbar^\infty)$

$U_t(\hbar) = e^{-it\hbar^{-1}A(\hbar)}$, $P(\hbar) = U_t(\hbar)(b(x, \hbar D_x))U_{-t}(\hbar)$ とおくと $P(\hbar)$ は
 $\hbar\text{-ad.}$ かつ $P.S. = b \circ \Phi^t (\neq 0 \text{ at } (x^0, \xi^0))$ となり,

$$\|P(\hbar)u_t\|_2 = \|b(x, \hbar D_x)u_0\|_2 = O(\hbar^\infty)$$

$$(x^0, \xi^0) \in \mathcal{A}_t^+ - \text{FS}[U_t]$$

$$(\mathcal{A}_t^+)^c \cup \text{FS}[U_t] \subset (\mathcal{A}_t^+)^c \cup \Phi^t(\text{FS}u_0)$$

$$\mathcal{A}_t^+ \cap \text{FS}[U_t] \subset \mathcal{A}_t^+ \cap \Phi^t(\text{FS}u_0)$$

$$\therefore \mathcal{A}_t^+ \cap \text{FS}[U_t] \subset \Phi^t(\text{FS}u_0)$$

逆向きもほぼ同様に示される。

References

- [1] Gérard, C and Knäuf, A. : Collisions for the Quantum Coulomb Hamiltonian. *Comm. in Mathematical Physics* 143 (1991) p17-26
- [2] Robert, D : *Autour de l'Approximation semiclassique.* Birkhäuser (1983)