数理解析研究所講究録
第 873 巻 1994 年 97-101

Resolvent compactness and eigenvalue asymptotics for magnetic Schrödinger operators with exploding potentials

茨城大理　田村英男 (Hideo Tamura)
京都大理　岩塚明 (Akira Iwatsuka)

1 問題

ある平面 α 上に束縛されて運動する電子の，α に垂直な磁場の影響下での運動を記述する Schrödinger 作用素は

$$L=\sum_{j=1}^{2}(D_j-a_j(x))^2+V(x)$$

と表される ($D_j\equiv -i\partial/\partial x_j, j=1,2$)．ここで $a_j(x)$ $(j=1,2)$, $V(x)$ は $\boldsymbol{R}^2$ 上の実数値関数で，$a(x)=(a_1(x),a_2(x))$ は（磁場を与える）ベクトル・ポテンシャル，$V(x)$ は（電場を与える）スカラー・ポテンシャルと呼ばれる．磁場 $\vec{B}(x)$ は，方向は一様に α に垂直な方向を向いており，

$$B(x)=\operatorname{curl}a(x)=\frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}(x)$$

で与えられるスカラー関数がその各点でのその強さを与える．以下の話では次を仮定する．

(B1) $B(x)\to\infty\quad(|x|\to\infty)$.

この仮定の下では，$V\equiv 0$ の場合には $L_0\equiv L|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^2)}$ は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$において本質的自己共役であり L_0 の自己共役拡張 H は離散スペクトルをもつ (i.e. compact resolvent をもつ) ことが知られている ([2, 5])．今 $V(x)\to-\infty\quad(|x|\to\infty)$ のときにこれらの性質を調べることを考える．

[1] は $\boldsymbol{R}^2$ 上のパウリ作用素 P の研究に関連して $V=\kappa B\quad(\kappa$:実定数) の場合を調べ，(B1) に加えて適当な条件を仮定すれば $\kappa\notin\{-1,-3,-5,\ldots\}$ のとき L_0 が本質的自己共役であり H が離散スペクトルをもつことを示した．次のことを考えると，この結果は興味深いものである：$V(x)\to-\infty\quad(|x|\to\infty)$ のときには，もし $V(x)$ の発散のオーダーに制限を付けなければ L_0 が本質的に自己共役かどうかも自明ではない；また更に $\kappa<-1$ のときには H は下から有界でなく$\pm\infty$ の両方に集積するような離散スペクトルを持ち，このような Schrödinger 作用素の例は従来あまり知られていない．またその固有値の漸近分布がどうなるかも興味ある問題である．そこで我々の目標は，本質的自己共役性，スペクトルの離散性に関する結果が $V=\kappa B$ でない場合にどこまで拡張できるか調べ，さらに H の固有値の分布を調べることである．

2 本質的自己共役性とスペクトルの離散性

次の仮定を考える：

(B2) $\nabla B \equiv (\partial B/\partial x_1, \partial B/\partial x_2) = o(B^{3/2}) \quad (|x| \to \infty)$,

(V1) $R_0 > 0, j \in \boldsymbol{Z} \quad (j \geq 0), \delta \in (0,1)$ が存在して，$B(x) \geq 1\,(|x| \geq R_0)$ であり，

(i) $j = 0$ のとき $V(x) \geq (-1+\delta)B(x) \quad (|x| \geq R_0)$,

(ii) $j \geq 1$ のとき $-(2j-1+\delta)B(x) \geq V(x) \geq -(2j+1-\delta)B(x) \quad (|x| \geq R_0)$,

(V2) $\nabla V = o(B^{3/2}) \quad (|x| \to \infty)$.

このとき次の定理が成り立つ．

定理 1 (B1)(B2)(V1)(V2) の下で L_0 は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$で本質的自己共役かつ $H \equiv \overline{L_0}$ は離散スペクトルをもつ．

簡単のため特に [1] が取り扱った $V = \kappa B$ （κ：実定数）の場合について説明すると，定理 1 は [1] が与えた十分条件より弱い仮定 (B1)(B2) の下で，$\kappa \notin \{-(2n-1)|n \in \boldsymbol{N}\}$ $(\boldsymbol{N} = \{n \in \boldsymbol{Z}|n > 0\})$ のとき L_0 は本質的自己共役でかつ H は離散スペクトルをもつことを示す．従来知られた本質的自己共役性の十分条件 ([4,6]) は，$\kappa \geq -1$ のときは適用できるが，$\kappa < -1$ のときには B の増大度によって（大雑把にいって $|x|^2$ より早いオーダーで発散するときは）適用できない場合があるので 定理 1 はこの十分条件の一つの拡張を与えることになる．κ と -1 の大小に従って

(i) $\kappa > -1$ のとき H は下から有界で離散スペクトルをもつ，

(ii) $\kappa = -1$ のとき $H \geq 0$ だが離散スペクトルをもたない（ [7] を見よ），

(iii) $\kappa < -1$ のとき H は下から有界ではなく，$\kappa \notin \{-(2n-1)|n \in \boldsymbol{N}\}$ ならば離散スペクトルをもつ，

ことが知られる．

なお，2次元のパウリ作用素 P の研究は $V = \kappa B,\ \kappa \in \boldsymbol{Z}$ のときの H の研究に帰着する．スピン s が整数のときはκ が偶数 $(|\kappa| \leq 2s)$ のときを考えることになり，仮定 (B1)(B2) の下では P に対する本質的自己共役性及びスペクトルの離散性が示される．また s が半整数のときには κ が奇数 $(|\kappa| \leq 2s)$ のときを考えることになり，$\kappa = -1$ のときの考察より P が離散スペクトルを持つような自己共役拡張を持たないことがわかる．

3 固有値の漸近分布

2節で見たように 定理 1 の仮定のもとで H が離散スペクトルを持つことが分るので H の固有値の漸近分布を調べることが問題となるが，一般に H が下に有界でないので正と負の方向での漸近分布を別々に考える必要がある．すなわち，

$$\begin{aligned} N^+(\lambda) &= \sharp\{H\text{の固有値} \in (0,\lambda)\} \\ N^-(\lambda) &= \sharp\{H\text{の固有値} \in (-\lambda,0)\} \end{aligned}$$

とおき，$\lambda \to \infty$ のときの $N^{\pm}(\lambda)$ の漸近挙動を調べる（ただし，$\sharp$ は集合の元の数を表す）．

そのために 定理 1 の仮定より強い仮定が必要となる：

(B3) $m(\lambda) = \mu(\{x \in \boldsymbol{R}^2 | |B(x)| < \lambda\})$ （μ は Lebesgue 測度）が十分大きな λ に対し C^1 級で，かつ定数 $C > 1$ が存在して十分大きな λ に対し

$$C^{-1}\lambda^{-1} \leq \frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)} \leq C\lambda^{-1}.$$

(V1') $\sigma \equiv \lim_{|x|\to\infty} V(x)/B(x)$ が存在し，$\sigma \notin \{-(2n-1) | n \in \boldsymbol{N}\}$ かつ $\sigma < -1$.

定理 2 (B1)-(B3), (V1')(V2) の下で $\lambda \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} N^{+}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\geq R_0} B(x)\sharp\{n \in \boldsymbol{N}; (2n-1)B(x) + V(x) \in (0,\lambda)\}dx(1+o(1)), \\ N^{-}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\geq R_0} B(x)\sharp\{n \in \boldsymbol{N}; (2n-1)B(x) + V(x) \in (-\lambda,0)\}dx(1+o(1)). \end{aligned}$$

仮定 (V1') において $\sigma < -1$ としたのは本質的ではない．$\sigma > -1$ のときは H は下から有界で $N^{-}(\lambda)$ は十分大なる λ に対して定数であり，$N^{+}(\lambda)$ に対しては 定理 2 と同様の漸近挙動が成り立つ．このとき同様の漸近式は [8,3] によって既に得られている．

4 定理の証明の概略

定理 1 及び 定理 2 の証明に共通の基本的な手法は，1の分解によって作用素を局所化し，磁場が定数の場合の作用素の性質に帰着させることである．大雑把に言って，$\boldsymbol{R}^2$ を 1 辺が $\rho(x) = M(x)B(x)^{-1/2}$ の正方形に分割してやればよい．ここで $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $M(x)$ は $M(x) \to \infty, \rho(x) \to 0 \quad (|x| \to \infty)$ を満たすような適当な関数である．こう取れば巧くいく理由は：定数磁場 B_0 をもつ Schrödinger 作用素は

$$H_0(B_0) = (D_1 - B_0x_2/2)^2 + (D_2 + B_0x_1/2)^2$$

であり，U_δ を $L^2(\boldsymbol{R}^2)$上の相似変換のユニタリー作用素：$U_\delta u(x) = \delta u(\delta x)$ とすれば

$$U_\delta^{-1}H_0(B_0)U_\delta = \delta^2 H_0(B_0/\delta^2)$$

となる．従って $\delta = B_0^{1/2}$ と取ることにより，磁場の強さ B_0 の作用素を 1 辺 $MB_0^{-1/2}$ の正方形上で考えることは，磁場の強さ 1 の作用素を 1 辺 M の正方形上で考えたものの B_0 倍となることが分る．すなわち磁場の強さ B_0 に固有のサイズは $B_0^{-1/2}$ に比例すると考えられる．よってある点 $x \in \boldsymbol{R}^2$ において 1 辺 $M(x)B(x)^{-1/2}$ の正方形をとることはその点での磁場の強さに固有のサイズに較べて大きい（ $M(x)$ 倍の）正方形をとるということになる．(B2), (V2) はこの正方形上で B, V がほぼ定数とみなしてよいための条件である．

定理 1 が次の評価式から得られることは標準的であり，難しくない：

$$\sum_{j=1}^{2}\|(D_j-a_j)^2u\|^2+\|Bu\|^2\le C(\|Lu\|^2+\|u\|^2)\quad(u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)).$$

ここで C は u に依らない正定数である．この不等式は定数磁場の場合の同様な評価式から得られる：

補題 3 $B_0>0,\ V_0\in\boldsymbol{R}$ として

$$\|X_1^2u\|^2+\|X_2^2u\|^2+\|B_0u\|^2\le C_0(V_0/B_0)\|(H_0(B_0)+V_0)u\|^2\quad(u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)).$$

ここで $X_1=D_1-B_0x_2/2,\ X_2=D_2+B_0x_1/2,$

$$C_0(\tau)=\text{const.}\sup_{n\in\mathbf{N}}\left|\frac{(2n-1)}{(2n-1)+\tau}\right|^2.$$

証明. まず $A=X_1-iX_2,\ A^*=X_1+iX_2$ とおくと，交換関係 $[X_1,X_2]\equiv X_1X_2-X_2X_1=-iB_0$ より

$$AA^*=H_0(B_0)+B_0,\quad A^*A=H_0(B_0)-B_0.$$

$X_1=(A+A^*)/2$ より $X_1^2=(A^2+A^{*2}+2H_0(B_0))/4$ であり $\|A^2u\|^2=(A^{*2}A^2u,u)$ などを評価すれば

$$A^{*2}A^2=A^*(A^*A)A=A^*(AA^*-2B_0)A=H_0(B_0)^2-4B_0H_0(B_0)+3B_0^2$$

であるから

$$\|X_1^2u\|^2\le C(\|H_0(B_0)u\|^2+\|B_0u\|^2)$$

を得る．X_2 に対しても同様の評価を得る．次に $\sigma(H_0(B_0))=\{(2n-1)B_0|n\in\boldsymbol{N}\}$ であることからスペクトル分解定理により P_n を $H_0(B_0)$ の固有値 $(2n-1)B_0$ に対する固有空間への射影とすれば

$$\begin{aligned}\|B_0u\|^2\le\|H_0(B_0)u\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^2B_0^2\|P_nu\|^2\\ &\le C_0(V_0/B_0)\sum_{n=1}^{\infty}\{(2n-1)B_0+V_0\}^2\|P_nu\|^2\\ &= C_0(V_0/B_0)\|(H_0(B_0)+V_0)u\|^2.\end{aligned}$$

これより求める評価式を得る．□

定理 2 の証明は，平面を上に述べた様な正方形に分割して Min–Max 原理を使えばよい．Min–Max 原理を使う方法は基本的には [3] で用いられたものである．[3] の場合は 2 次形式 $q_1[u]=(Hu,u)$ に Min–Max 原理を適用してある値以下の固有値の個数の評価をしたのだが，今の場合は q_1 が下から有界でないのでこの手は使えない．その代わりに 2 次形式 $q_2^+[u]=\|(H-\lambda/2)u\|^2$ に対して Min–Max 原理を適用すれば，q_2^+ の $\lambda^2/4$ 以下の固有値の個数が $N^+(\lambda)$ なので求める漸近式が得られる．同様に $q_2^-[u]=\|(H+\lambda/2)u\|^2$ に対する議論から $N^-(\lambda)$ に対する漸近式が得られる．

参考文献

[1] A. Ahammou, Quelques applications des groupes nilpotents aux équations aux dérivées partielles, Thèse, l'université de Rennes, 1988.

[2] J. Avron, I. Herbst and B. Simon, Schrödinger operators with magnetic fields, I., General Interactions, *Duke Math. J.* **45** (1978), 847–883.

[3] Y. Colin de Verdiere, L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, *Comm. Math. Phys.* **105** (1986), 327–335.

[4] T. Ikebe and T. Kato, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962), 77–92.

[5] A. Iwatsuka, Magnetic Schrödinger operators with compact resolvent, *J. Math. Kyoto Univ.* **26** (1986), 357–374.

[6] A. Iwatsuka, Essential self-adjointness of the Schrödinger operators with magnetic fields diverging at infinity, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), 841–860.

[7] I. Shigekawa, Spectral properties of Schrödinger operators with magnetic fields for a spin 1/2 particle, *J. Funct. Anal.* **101** (1991), 255–285.

[8] H. Tamura, Asymptotic distribution of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields, *Nagoya Math. J.* **105** (1987), 49–69.