数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 23-29

AKNS System の 対称性

愛媛大学教養部
木曽和啓 (Kazuhiro Kiso)

§1. 序論

まず微分方程式の対称性について説明する．簡単の為，次のような発展方程式について考える．

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \cdots) \tag{1}$$

ここで，$u = u(x,t)$ である．(1) の解空間を $\mathcal{S}$ とする．解空間というのは曖昧な言い方だが，ここでは漠然と解の全体としておく．このとき，$\mathcal{S}$ の自己同型 $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を微分方程式 (1) の対称性という．対称性の全体 $G = \{\psi\}$ は群であると考えられる．一般的には群には Lie 環が対応しているので，G に対応する Lie 環について考えよう．今，1-パラメーターの G の元 ψ_ε があり，$\psi_0 = id$ とする．

$$\varphi = \frac{d}{d\varepsilon}\psi_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0}$$

とおくと，φ の全体 $\mathfrak{g}$ が G の Lie 環であると考えられる．$\mathcal{S} \ni u$ のとき，u のところでの (1) の線形化方程式を考える：

$$v_t = F^*(u; v) \equiv \frac{d}{d\varepsilon}F(u + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{2}$$

(2) の解全体を $T_u\mathcal{S}$ で表わすと，$\psi_\varepsilon(u) \in \mathcal{S}$ だから $\varphi(u) \in T_u\mathcal{S}$ となる．つまり $\mathfrak{g}$ は写像

$$\varphi : \mathcal{S} \ni u \to \varphi(u) \in T_u\mathcal{S}$$

の全体である．φ は正確には無限小の対称性だが，普通こちらも単に対称性ということが多いので，以下対称性といったら $\mathfrak{g}$ の元をさすことにする．

$\mathfrak{g}$ を Lie 環というからにはブラケットが定義されなければならないが，それがどのようなものになるかについて考えよう．大変乱暴な議論だけれど，今 $\mathfrak{g} \ni \varphi$ に対して "1-parameter 変換群" $\exp \varepsilon\varphi$ が存在したとする．$\exp \varepsilon\varphi$ は

$$\exp \varepsilon\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \qquad \text{かつ} \qquad \frac{d}{d\varepsilon}\exp \varepsilon\varphi \Big|_{\varepsilon=0} = \varphi$$

を満たす変換である．$\mathfrak{g} \ni \varphi,\ \psi$ に対して一般的な公式

$$[\varphi,\ \psi] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \exp s\varphi \exp t\psi \exp(-s\varphi) \Big|_{s=t=0}$$

を援用すると，ブラケットは

$$[\varphi, \psi](u) = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi((\exp \varepsilon\psi)u) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{d}{d\varepsilon}\psi((\exp \varepsilon\varphi)u) \Big|_{\varepsilon=0} \tag{3}$$

（のようなもの）であると考えられる．(以下の Example 2 および §2 を参照)

Example 1. (Lie–Bäcklund 変換)

$\varphi \in \mathfrak{g}$ が変数 $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の（普通の意味での）関数とする．$\mathcal{S} \ni u$ のとき $\varphi(u)$ は (2) を満たすから

$$\varphi(u)_t = F^*(u; \varphi(u)) \tag{4}$$

が成り立つ．微分方程式が具体的に与えられても一般には $\mathcal{S}$ は集合としては未知であるから，上式を次のように考える．$u \in \mathcal{S}$ のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}u_t + \frac{\partial\varphi}{\partial u_x}u_{xt} + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{xx}}u_{xxt} + \cdots \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}F + \frac{\partial\varphi}{\partial u_x}F_x + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{xx}}F_{xx} + \cdots \end{aligned}$$

であるから，(4) が成り立つためには変数 $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の関数として

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}F + \frac{\partial\varphi}{\partial u_x}F_x + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{xx}}F_{xx} + \cdots = F^*(u; \varphi(u))$$

が恒等的に成立すればよい．このようにして決定される Symmetry は Lie-Bäcklund 変換と呼ばれることがある．これについては，例えば[5] を参照して下さい．ただしそこでは Lie-Bäcklund 変換という言葉は使わず，generalized symmetry と呼んでいる．

Example 2. 定常軸対称な重力場方程式

$g = g(\rho, z)$ を 2 次の実対称行列に値をもつ関数として，さらに $\det g = -\rho^2$ が常になりたっているとする．g に関する次の方程式を定常軸対称な重力場方程式という．

$$\partial_\rho(\rho g^{-1}\partial_\rho g) + \partial_z(\rho g^{-1}\partial_z g) = 0. \tag{5}$$

今までは微分方程式の対称性を $\varphi(u)$ と書いてきたが，$\varphi(u)$ は u の変分（解 u の無限小の変形）という意味があるので以下では δu と書くことにする．方程式 (5) の対称性としてまず次のものがある．

$$\delta_1 g = {}^t\!Ag + gA, \qquad A \in sl(2, \mathbb{R}). \tag{6}$$

さらに次式で定義される δ_2 も symmetry である.

$$\delta_2 g = \begin{pmatrix} g_{11}\psi_{11} & g_{11}\psi_{21} \\ g_{11}\psi_{21} & -g_{22}\psi_{11} + 2g_{12}\psi_{21} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

ここで $\psi = (\psi_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ は次の式で定義される potential である.

$$\begin{cases} \partial_\rho \psi = \rho^{-1} g\sigma\partial_z g \\ \partial_z \psi = -\rho^{-1} g\sigma\partial_\rho g \end{cases}, \qquad \text{ただし} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

一般に解 g から決まるある量 $\Psi = \Psi(g)$ があり，さらに symmetry δg が与えられたとする．このとき，$\delta\Psi$ を g が δg だけ変分したときの Ψ の変分とする．例えば (8) で定まる ψ に対して $\delta\psi$ は次式で定義される potential である.

$$\begin{cases} \partial_\rho(\delta\psi) = \rho^{-1}(\delta g)\sigma\partial_z g + \rho^{-1} g\sigma\partial_z(\delta g) \\ \partial_z(\delta\psi) = -\rho^{-1}(\delta g)\sigma\partial_\rho g - \rho^{-1} g\sigma\partial_\rho(\delta g) \end{cases}.$$

(3) より 2 つの symmetry δ_1，δ_2 のブラケットは

$$[\delta_1, \delta_2](g) = \delta_2(\delta_1 g) - \delta_1(\delta_2 g)$$

となることが分かる．よって (6), (7) の 2 つの symmetry δ_1, δ_2 のブラケットを考えるには新しい potential $\delta_1\psi$ を導入する必要がある．次々とブラケットをとると，対応して次々と無限個の potential を導入しなければならない．ということは，δ_1，δ_2 で生成される algebra が無限次元であることを意味していて，今の場合 loop algebra $sl(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}[t, t^{-1}]$ に同型であることが示されている．また potential は微分方程式で決まるので積分定数の不定さが残るが，積分定数を適当に選んで"一意化"する必要がある.

このような type の symmetry は non-local symmetry とか，あるいは hidden symmetry という名前で呼ばれることがあり，上記重力場の方程式を含めて数理物理にあらわれる様々な方程式について計算されている．これらについては [6]–[10] などを参照されたい.

soliton 方程式のように解空間 $\mathcal{S}$ が実体をもちその代数的構造が分かる場合には，$\mathcal{S}$ に作用する変換群も決定できるが，Example 1, 2 のような対称性はそうした枠組みにのらない方程式に対しても考えることができるという利点がある.

§2. Differential Algebra

前節の最後のところを少し代数的に整理する．簡単のため (1) の形の発展方程式について考え，さらに F は u の微分多項式であると仮定する．$\mathcal{A}_0$ を u の微分多項式の全体と

する：$\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}[u, u_x, u_{xx}, \cdots]$. $\mathcal{A}_0$ には次のように微分 ∂_t が定義される.

$$\partial_t u = F,\ \partial_t u_x = F_x,\ \partial_t u_{xx} = F_{xx}, \cdots$$

また ∂_x も意味があり $[\partial_x, \partial_t] = 0$ であるから $\{\mathcal{A}_0; \partial_x, \partial_t\}$ は differential algebra である. 今次の式で定義される pseudopotential v があったとしよう.

$$\begin{cases} v_x = f(u, u_x, u_{xx}, \cdots; v) \\ v_t = g(u, u_x, u_{xx}, \cdots; v) \end{cases}. \tag{9}$$

v は一般には無限個の成分をもつベクトルである. また (9) は $u \in \mathcal{S}$ の時積分可能でなければならない. $\mathcal{A}_0$ に v をつけ加えた多項式全体を $\mathcal{A}$ とする：$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0[v]$. $\mathcal{A}$ には (9) 式によって微分 ∂_x, ∂_t が定義され, かつ積分可能であることから両者は可換となる. よって, differential algebra として $\{\mathcal{A}; \partial_x, \partial_t\}$ は $\{\mathcal{A}_0; \partial_x, \partial_t\}$ の拡張となっている.

$\mathcal{A}$ の微分 $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ であって, ∂_x, ∂_t と可換なものを考えよう. $[\partial_t, \delta](u) = 0$ より

$$(\delta u)_t = \delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x + \cdots$$

であるが, これは δu が線形化方程式 (2) の解即ち (1) の symmetry であることを意味している. その他の条件, 例えば, $[\partial_x, \delta](v) = 0$ と $[\partial_t, \delta](v) = 0$ より

$$\begin{cases} (\delta v)_x = \delta f \\ (\delta v)_t = \delta g \end{cases}$$

が得られるが, これは symmetry δu に対する δv の定義式に他ならない. 従って pseudopotential v であらわされる symmetry は ∂_x, ∂_t と可換な $\mathcal{A}$ の微分 δ であると言うことができる. また, Lie-Bäcklund 変換は ∂_x, ∂_t と可換な微分 $\delta : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ である.

§3. AKNS Hierarchy とその対称性

次のような線形方程式系を考える.

$$\begin{cases} V_x = PV \\ V_t = QV \end{cases}. \tag{10}$$

ここで, $V = {}^t(v_1, v_2)$ また

$$P = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix}$$

である. ただし, λ はパラメーター, q と r は未知関数である. (10) の積分可能条件は

$$P_t - Q_x + [P, Q] = 0 \tag{11}$$

である．Q は次のように決める．今 Q が λ の n 次の多項式だとして

$$Q=(-iH)\lambda^n+Q_1\lambda^{n-1}+\cdots+Q_n$$

とおく．ただし，

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

この Q を (11) に代入して λ の各係数をみると，Q_j が次々と決定される．例えば

$$Q_1=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix},\quad Q_2=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}-qr & q_x\\ -r_x & qr\end{pmatrix}.$$

一般に Q_j の各成分は q と r の微分多項式として求まる．Q_j は一意的ではないが，q と r の微分多項式として定数項が 0 と約束すれば一意的である．以下そのようにとるものとする．このようにして決まる Q を $Q^{(n)}$ で表わし，対応する時間変数を t_n とする．すると次が成り立つ．([4])

$$Q^{(n)}=\lambda Q^{(n-1)}+Q_n,\quad Q^{(1)}=P,\qquad Q^{(n)}\in sl(2,\mathbb{C}).$$

また，(11) で λ についての定数項が q と r の発展方程式を与えている．例えば $n=2$ の時は

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} q_{t_2}=\dfrac{i}{2}(q_{xx}-2q^2r)\\ r_{t_2}=-\dfrac{i}{2}(r_{xx}-2qr^2). \end{cases}$$

またこれらの方程式系は互いに compatible になっている．そのような意味で $n=2,\ 3,\cdots$ に対する方程式系

$$\text{(13)}\qquad P_{t_n}-Q_x^{(n)}+[P,Q^{(n)}]=0$$

を AKNS hierarchy という．(12) で $r=\mp q^*$ と置くと nonlinear Schrödinger 方程式が得られる．

以下で AKNS hierarchy の対称性について考える．AKNS hierarchy は soliton 方程式だから τ 関数とか vertex operator とかいう言い方をしたほうが正解であるのは言うまでもないが，ここでは前節のような形の対称性を考えたい．

まず $SL(2,\mathbb{C})$ に値をもつ関数 Φ についての線形方程式系

$$\begin{cases} \Phi_x=P\Phi\\ \Phi_{t_n}=Q^{(n)}\Phi \end{cases}$$

を考える．これは (13) が成り立つとき積分可能である．Φ はパラメーター λ に関係しているので

$$\Phi=\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_j\lambda^j$$

とする．$\mathcal{A}$ を $q, q_x, q_{xx}, \cdots$ と $r, r_x, r_{xx}, \cdots$ および Φ_r の各成分で生成される多項式の全体とする．$\mathcal{A}$ には微分 ∂_x, ∂_{t_n} が定義されて $\{\mathcal{A}; \partial_x, \partial_{t_n}\}$ は differential algebra である．∂_x, ∂_{t_n} と可換な $\mathcal{A}$ の微分 δ を考えたいのだが，今の場合付加条件 $\Phi\in SL(2,\mathbb{C})$ があるので $\delta(\det\Phi)=0$ を満たしていなければならない．まず $L\in sl(2,\mathbb{C})$ と整数 $j\geq 0$ に対して微分 $\delta_j^L:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ を次の様に定める．

$$\delta_j^L P=0$$

$$\delta_j^L\Phi=\lambda^j\Phi L.$$

今までは明示しなかったけれど，Φ はパラメーター λ に関係しているので λ への依存性を明らかにしたい時は $\Phi(\lambda)$ と書く．$L\in sl(2,\mathbb{C})$ に対してパラメーター λ に関係した微分 $\delta_-^L(\lambda)$ を

$$\delta_-^L(\lambda)P=[-iH,\ \mathrm{Ad}\,\Phi(\lambda)\cdot L]$$

$$\delta_-^L(\lambda)\Phi(\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu}\Phi(\mu)\{\mathrm{Ad}\,\Phi(\mu)^{-1}\Phi(\lambda)\cdot L-L\}$$

で定義する．また，$\delta_-^L(\lambda)$ を λ について形式的に展開する．

$$\delta_-^L(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\delta_{-(j+1)}^L.$$

この時次の定理が成り立つ．

定理.

(1) $L\in sl(2,\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{Z}$ に対して，δ_j^L は *symmetry* である．

(2) $[\delta_i^L,\ \delta_j^M]=\delta_{i+j}^{[L,M]}$.

(2) は $\{\delta_j^L\}$ で生成される Lie 環が loop algebra $sl(2,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ に同型であることを意味している．

特に $r=\mp q^*$ のときは，パラメーター λ を real にとると P と $Q^{(n)}$ がそれぞれ $su(2)$ または $sl(2,\mathbb{R})$ と同型な Lie 環

$$\left\{\begin{pmatrix} ia & b\\ b^* & -ia\end{pmatrix}\,\middle|\, a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{C}\right\}$$

に含まれることから，symmetry algebra は $su(2)\otimes\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$ または $sl(2,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$ に同型となることが分かる．証明については[3] を参照して頂きたい．

参考文献

[1] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell and H.Segur: The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems, Stud. Appl. Math. **53** (1974), 249-315.

[2] K.Kiso, Pseudopotentials and symmetries of evolution equations, Hokkaido Math. J. **18** (1989) no.1, 125-136.

[3] K.Kiso, Symmetries of the AKNS hierarchy, to appear in J. Math. Physics.

[4] A.C.Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia, 1985.

[5] P.J.Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] K.Takasaki, Hierarchy structure in integrable systems of gauge fields and underlying Lie algebras, Comm. Math. Phys. **127** (1990) no.2, 225-238.

[7] K.Takasaki, Symmetries of hyper kähler (or Poisson gauge field) hierarchy, J. Math. Phys. **31** (1990) no.8, 1877-1888.

[8] K.Ueno and Y.Nakamura, Transformation theory for anti-self-dual equations, Publ. RIMS **19** (1983), 519-547.

[9] K.Ueno, Infinite-dimensional Lie algebras acting on chiral fields and the Riemann–Hilbert problem, Publ. RIMS **19** (1983) no.1, 59–82.

[10] K.Ueno and Y.Nakamura, Infinite-dimensional Lie algebras and transformation theories for non-linear fields equations, *Nonlinear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, 1981), World Sci. Publishing, Singapore.