

Bochner-Hecke 等式の幾つかの証明とその周辺

京大理 野村 隆 昭 (Takaaki NOMURA)

本稿は短期共同研究会での講演の内容ではなく、1991年9月10日に京都大学理学部での函数解析セミナーに於て話したものに、その後折にふれて考えたことや、新しく出版された論文や本、新たに発見した文献等を踏まえていくらか手を加えたものです。レベルとしては学部学生にも理解できるもので、一部は France Nancy I 大学で「Analyse Harmonique」、京都大学で「解析学特論」として4回生対象の講義中で話したこともあります。色々な証明（特に回転群の表現を用いた証明）を一箇所にまとめておくのもそれなりに意義があると思いますし、何よりも私自身のノートの散逸対策にもなりますので講究録の原稿としました。

表題の Bochner-Hecke 等式を述べることから始めよう。以下 $n \geq 3$ とし、 \mathbb{R}^n 上の \mathbb{C} -係数 k 次齊次多項式函数の全体を $P_k = P_k(\mathbb{R}^n)$ で表し、

$$H_k = H_k(\mathbb{R}^n) := \{p \in P_k; \Delta p = 0\}$$

とおく。ここで、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は \mathbb{R}^n での Laplacian である。従って H_k は \mathbb{R}^n 上の k 次齊次調和多項式の全体である。

BOCHNER-HECKE 等式. $p \in H_k$ のとき、

$$(1) \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx = i^{-k} p(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}.$$

ただし、 $\|x\|^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $\xi \cdot x := \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ である。

最もよくみかける証明として調和函数の平均値定理を用いるものがある ([19, Theorem IV.3.4], [5, Theorem 2.6.3], [6, Theorem II.7] 等参照)。記号の準備をしておこう。 \mathbb{R}^n の単位球面を S^{n-1} で表し、 S^{n-1} 上の標準的な Borel 測度を σ とすると、次の積分公式が成り立っている：

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} f(ru) d\sigma(u).$$

明らかに σ は $O(n, \mathbb{R})$ -不変である. また $\omega_{n-1} := \sigma(S^{n-1})$ とおくと, $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ である.

等式 (1) の証明 1: 任意に $y \in \mathbb{R}^n$ を固定するとき, (2) より

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2} p(x+y) dx = \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} p(y+ru) d\sigma(u).$$

ここで調和函数の平均値定理より, $\int_{S^{n-1}} p(y+ru) d\sigma(u) = \omega_{n-1} p(y)$. ゆえに

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2} p(x+y) dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} p(y) \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{n-1} dr = (2\pi)^{n/2} p(y).$$

p は多項式函数ゆえ,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2} p(x+y) dx = p(y) \quad \text{for all } y \in \mathbb{C}^n.$$

特に, 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2} p(x-iy) dx = p(-iy) = i^{-k} p(y).$$

両辺に $e^{-\|y\|^2/2}$ をかけると

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\|x\|^2+\|y\|^2)/2} p(x-iy) dx = i^{-k} e^{-\|y\|^2/2} p(y).$$

簡単な積分路の移動により, 任意の $b \in \mathbb{R}$ と $k = 0, 1, \dots$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+b^2)/2} (a-ib)^k da = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2} e^{-iab} a^k da$$

がわかるから, Bochner-Hecke 等式の証明が終わる. ■

次に Bochner [1, Theorem 2.6.3] の証明を紹介する ([13, 定理 11.9] も参照). これは証明 1 よりも自然と思われるもので, $p \in H_k$ に対する次の等式を用いる:

$$(3) \quad \int_{S^{n-1}} p(u) e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) = \frac{2\pi^{n/2}}{(2i)^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} j_{\frac{n-2}{2} + k}(\|\xi\|) p(\xi).$$

ただし, 階数 λ の Bessel 関数を J_λ で表すとき,

$$j_\lambda(z) := \Gamma(\lambda + 1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda} J_\lambda(z) \quad (\operatorname{Re} \lambda > -1/2, z \in \mathbb{C} \setminus \{t \leq 0\}).$$

関数 j_λ を導入したのは, $\lambda = (n-2)/2$ のとき, それが正規化された Borel 測度 $\frac{\sigma}{\omega_{n-1}}$ の Fourier 変換になっていることによる:

$$(4) \quad \hat{\sigma}(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) = \omega_{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\|\xi\|).$$

関数 j_λ は整関数であり, そのべき級数展開は次式で与えられる:

$$(5) \quad j_\lambda(z) = \Gamma(\lambda + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \lambda + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

この式を項別微分することにより

$$(6) \quad \frac{d}{dz} j_\lambda(z) = -\frac{z}{2(\lambda + 1)} j_{\lambda+1}(z).$$

さて等式 (3) の証明は [13, 補題 11.6] にもあるが, 本稿では Bochner-Hecke 等式 (1) の証明 3 の後でも与える. また等式 (4) については附録で証明を幾つか与える.

Bochner-Hecke 等式 (1) の第 2 の証明を与えよう.

等式 (1) の証明 2: 積分公式 (2) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty r^{n+k-1} e^{-r^2/2} dr \int_{S^{n-1}} p(u) e^{-ir\xi \cdot u} d\sigma(u) \\ &= \frac{i^{-k} p(\xi)}{2^{\frac{n}{2}+k-1} \Gamma(\frac{n}{2} + k)} \int_0^\infty r^{2k+n-1} e^{-r^2/2} j_{\frac{n-2}{2}+k}(r\|\xi\|) dr \quad (\because (3)). \end{aligned}$$

ここでべき級数展開 (5) を代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{i^{-k} p(\xi)}{2^{\frac{n}{2}+k-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \|\xi\|^{2m}}{m! 2^{2m} \Gamma(m + k + \frac{n}{2})} \int_0^\infty r^{2k+2m+n-1} e^{-r^2/2} dr \\ &= i^{-k} p(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \|\xi\|^{2m}}{m! 2^m} = i^{-k} p(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}. \blacksquare \end{aligned}$$

なお文献 [6, Corollaire II.8] では, Bochner とは逆に等式 (1) から等式 (3) を導出している.

3 番目の証明は, 調和多項式 $p(x)$ の次数 k に関する帰納法を使うものである. これは演習書 [15] で偶然見つけたものであるが, 他に文献をご存知の方はご教示ください.

等式 (1) の証明 3: まず $k = 0$ のときは, Fourier 解析における初等的でよく知られた公式に他ならない. 次に k のとき等式 (1) が成り立つと仮定し, $p \in H_{k+1}$ とす

る. このとき $\sum_{m=1}^n x_m \frac{\partial p}{\partial x_m} = (k+1)p$ ゆえ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} x_m \frac{\partial p}{\partial x_m}(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^n \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial p}{\partial x_m}(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx. \end{aligned}$$

ここで $\partial p / \partial x_m \in H_k$ であるから, 帰納法の仮定より

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial p}{\partial x_m}(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx = i^{-k} \frac{\partial p}{\partial \xi_m}(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \frac{i^{-k}}{k+1} \sum_{m=1}^n \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \right) \left[\frac{\partial p}{\partial \xi_m}(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2} \right] \\ &= -\frac{i^{-(k+1)}}{k+1} \left\{ \Delta p(\xi) - \left[\sum_{m=1}^n \xi_m \frac{\partial p}{\partial \xi_m}(\xi) \right] \right\} e^{-\|\xi\|^2/2} \\ &= i^{-(k+1)} p(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}. \blacksquare \end{aligned}$$

同じ技巧が等式 (3) の証明に使える.

等式 (3) の証明: まず $k = 0$ のとき, 等式 (3) は等式 (4) である (証明は附録). 次

に k のとき等式 (3) が成立すると仮定して, $p \in H_{k+1}$ とする.

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} p(u) e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^n \int_{S^{n-1}} u_m \frac{\partial p}{\partial x_m}(u) e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^n \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \right) \int_{S^{n-1}} \frac{\partial p}{\partial x_m}(u) e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) \\ &= -\frac{1}{k+1} \frac{1}{i} \frac{2\pi^{n/2}}{(2i)^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[j_{\frac{n-2}{2}+k}(\|\xi\|) \frac{\partial p}{\partial \xi_m}(\xi) \right] \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= -\frac{1}{k+1} \frac{1}{i} \frac{2\pi^{n/2}}{(2i)^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} \sum_{m=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} j_{\frac{n-2}{2}+k}(\|\xi\|) \right] \left[\frac{\partial p}{\partial \xi_m}(\xi) \right]. \end{aligned}$$

ここで (6) を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} j_\lambda(\|\xi\|) = -\frac{\xi_m}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(\|\xi\|)$$

がわかるので,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} p(u) e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u) &= \frac{1}{k+1} \frac{2\pi^{n/2}}{(2i)^{k+1} \Gamma(\frac{n}{2} + k + 1)} j_{\frac{n}{2}+k}(\|\xi\|) \sum_{m=1}^n \xi_m \frac{\partial p}{\partial x_m}(\xi) \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{(2i)^{k+1} \Gamma(\frac{n}{2} + k + 1)} j_{\frac{n}{2}+k}(\|\xi\|) p(\xi). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

次に, compact Lie 群 $SO(n, \mathbb{R})$ の表現を用いる証明を 2 つ挙げよう. Laplacian Δ が回転不変であるということから, 群 $SO(n, \mathbb{R})$ の k 次斉次調和多項式の空間 H_k への表現

$$(7) \quad T(g)p(x) := p(g^{-1}x) \quad (p \in H_k, g \in SO(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n)$$

を得る. この表現が既約である (たとえば, [4], [6, Chap. I], [9, Chap. 3], [24, Chap. 9] 等参照) ことを用いるのである. まず Clerc [2, p. 198] にある証明から.

等式 (1) の証明 4: 任意に自然数 $m \geq n$ をとり, $p \in \sum_{j=0}^k P_j(\mathbb{R}^m)$ とする. \mathbb{R}^m での Fourier 変換を考えると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} p(x) e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= p \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-\|\xi\|^2/2} =: q(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2} \quad \left(q \in \sum_{j=0}^k P_j(\mathbb{R}^m) \right) \end{aligned}$$

となるから, 空間 $\sum_{j=0}^k P_j(\mathbb{R}^m)$ 上の線型写像 $\Phi_k = \Phi_{k,m} : p \mapsto q$ を得る. そして Fourier 変換の回転不変性から, Φ_k と $SO(m, \mathbb{R})$ の作用とは可換である. さらに $H_k(\mathbb{R}^m)$ は $\sum_{j=0}^k P_j(\mathbb{R}^m)$ における重複度 1 の既約部分空間であるから, Schur の補題により, $H_k(\mathbb{R}^m)$ 上で $\Phi_k = c_{k,m} I$ ($c_{k,m} \in \mathbb{C}$) となる. 一方 $m < m'$ のとき, trivial な拡張で $H_k(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow H_k(\mathbb{R}^{m'})$ ゆえ, $c_{k,m}$ は m に無関係である. スカラー $c_k := c_{k,m}$ を計算するために, $m := \max(k, n)$ とおいて, $H_k(\mathbb{R}^m)$ で考えてよい. このとき単項式 $p(x) = x_1 x_2 \dots x_k$ は明らかに調和であって

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} x_1 x_2 \dots x_k e^{-\|x\|^2/2} e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \dots \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) e^{-\|\xi\|^2/2} = i^{-k} \xi_1 \dots \xi_k e^{-\|\xi\|^2/2}. \blacksquare \end{aligned}$$

次の補題の証明の技法は, 私自身が Nancy I 大学での講義の準備中に Bochner-Hecke 等式の証明のために思いついたもの ([16], [17]) であるが, 以前に誰かがどこかで発表しているかもしれない. ご存知の方は教えてください. なお補題そのものは, 後で述べる Hobson の公式の特別な場合である.

補題. \mathbb{R} 上の C^∞ 偶関数 f に対して, $F(x) := f(\|x\|)$ で \mathbb{R}^n 上の C^∞ 関数 F を定義する. このとき, $p \in H_k$ ならば

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) F(x) = \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k f \right] (\|x\|) p(x).$$

証明: 各 $c \in \mathbb{C}^n$ に対して, $q_c \in P_1$ を $q_c(x) := c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ で定義する. また, $N := \{c \in \mathbb{C}^n; c_1^2 + \dots + c_n^2 = 0\}$ とおく. N は $O(n, \mathbb{C})$ -不変な集合である. さて $q_c^k(x) := q_c(x)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) とおくと, H_k は $\{q_c^k; c \in N\}$ で生成されることに注意しよう. 実際

$$\Delta q_c^k = k(k-1)(c_1^2 + \dots + c_n^2) q_c^{k-2}$$

ゆえ, $c \in N$ ならば $q_c^k \in H_k$ であり, $T(g)q_c^k = q_{gc}^k$ ($g \in SO(n, \mathbb{R})$) と表現の既約性から $H_k = \langle q_c^k; c \in N \rangle$ となる.

従って, 補題は $p = q_c^k$ ($c \in N$) に対して示せば十分である. まず容易に

$$q_c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) F(x) = \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f \right] (\|x\|) q_c(x).$$

この式と

$$q_c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) q_c^m = m(c_1^2 + \cdots + c_n^2) q_c^{m-1} = 0 \quad \text{if } c \in N.$$

とから補題の証明が終わる. ■

等式(1)の証明5: 等式(1)の左辺は $p \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-\|\xi\|^2/2}$ に等しいから, 証明すべき式は結局

$$(8) \quad p \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-\|\xi\|^2/2} = (-1)^k p(\xi) e^{-\|\xi\|^2/2}$$

であるが, これは補題より直ちに出る. ■

補題から等式(3)を証明するのは, [13, 補題 11.6] の通りゆえ本稿では割愛する.

注 意. 函数 f, F は補題の通りとすると, 一般に $p \in P_k$ のとき,

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) F(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{1}{2^j j!} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-j} f \right] (\|x\|) \Delta^j p(x) \quad (\text{Hobson の公式})$$

[12, p. 126] が成り立つ ([13, 補題 11.5] も参照). これを用いると, 証明4における写像 $\Phi_k = \Phi_{k,n}$ が, $p \in P_k$ のときには

$$\Phi_k(p) = i^{-k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{1}{2^j j!} \Delta^j p$$

となっていることがわかる ([21]も参照). 従って, Bochner-Hecke 等式を斉次調和多項式を特徴付ける等式と見ることができ:

$p \in P_k$ のとき, 「 $p \in H_k \iff$ Bochner-Hecke 等式(1)が成り立つ」. ■

最後に Bochner-Hecke 等式(1) (実際は(8))の応用を1つ述べておこう. 多項式の空間 $P = \sum P_k$ では通常次の内積を考える (Fischer 内積或いは微分内積と呼ばれる):

$$(9) \quad \langle p | q \rangle_F := p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \overline{q(x)} \Big|_{x=0}.$$

特に $p, q \in P_k$ のとき, $\langle p|q \rangle_F = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q(x)}$ となることに注意. 一方 $p \in P_k$ のとき, $p \mapsto p|_{S^{n-1}}$ は明らかに単射なので $L^2(S^{n-1})$ での内積が考えられる:

$$\langle p|q \rangle_2 := \int_{S^{n-1}} p(u)\overline{q(u)} d\sigma(u).$$

どちらの内積でも (7) で定義した群 $SO(n, \mathbb{R})$ の表現 T はユニタリゆえ, Schur の補題から 2 つの内積は H_k 上では正の定数倍しか違わない. この定数をここで計算しよう (cf. [9, Lemma 3.12]).

命題. $p, q \in H_k$ のとき, $\langle p|q \rangle_F = \frac{2^{k-1}}{\pi^{n/2}} \Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right) \langle p|q \rangle_2$.

証明: すでに注意したように, $\langle p|q \rangle_F = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q(x)}$ であるから

$$\begin{aligned} \langle p|q \rangle_F &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q(x)} \right] e^{-\|x\|^2/2} dx \\ &= \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{q(x)} \left[p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{-\|x\|^2/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{q(x)} p(x) e^{-\|x\|^2/2} dx \quad (\because (8)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty r^{2k+n-1} e^{-r^2/2} dr \int_{S^{n-1}} p(u)\overline{q(u)} d\sigma(u) \\ &= \frac{2^{k-1}}{\pi^{n/2}} \Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right) \langle p|q \rangle_2. \blacksquare \end{aligned}$$

附録. 等式(4)の幾つかの証明.

まず [19, p. 154] では, 積分公式

$$(10) \quad \int_{S^{n-1}} f(u \cdot e_n) d\sigma(u) = \omega_{n-2} \int_{-1}^1 f(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

(ただし $e_n := {}^t(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$) と Bessel 関数 J_λ の積分表示

$$J_\lambda(z) = \frac{(z/2)^\lambda}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$$

とを用いて等式(4)を示していることに注意しておく。なお[13, 補題 11.4]では(10)を用いた後, 函数 $\cos t$ のべき級数展開を直接利用している。

Laplacian Δ を用いるのもある [6, Proposition II.1], [18, Aufgabe 4.1]. 等式 $\hat{\sigma}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot u} d\sigma(u)$ の両辺に Δ を作用させて $\Delta \hat{\sigma} = -\hat{\sigma}$ を得る。ところで函数 $\hat{\sigma}$ は回転不変ゆえ, \mathbb{C} 上の整函数

$$\varphi(z) := \int_{S^{n-1}} e^{-izu \cdot e_n} d\sigma(u) \quad (z \in \mathbb{C})$$

に対して, $\hat{\sigma}(\xi) = \varphi(\|\xi\|)$ となる。 $\Delta \hat{\sigma} = -\hat{\sigma}$ より函数 φ は常微分方程式

$$(11) \quad \varphi''(z) + \frac{n-1}{z} \varphi'(z) = -\varphi(z)$$

をみたす $\varphi(0) = \omega_{n-1}$ である整函数である。これより等式(4)が導かれる。ついでに, 常微分方程式(11)の解をべき級数 $\sum a_m z^m$ ($a_0 = 1, a_1 = 0$) から出発して求めることも容易であることにも注意しておこう。

次に, 「回転不変な斉次多項式は定数倍を除いて $\|x\|$ の偶数乗だけである」という事実を踏まえた証明を2つ挙げよう。

まず函数 e^t のべき級数展開をいきなり代入して

$$\hat{\sigma}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{S^{n-1}} (\xi \cdot u)^m d\sigma(u).$$

ここで, $\xi \mapsto \int_{S^{n-1}} (\xi \cdot u)^m d\sigma(u)$ は回転不変な m 次斉次多項式函数であるから, m が奇数ならそれは0であり, $m = 2k$ のとき

$$\int_{S^{n-1}} (\xi \cdot u)^{2k} d\sigma(u) = c_k \|\xi\|^{2k}.$$

ただし c_k は定数であって, $\xi = e_n$ とおくことにより

$$c_k = \int_{S^{n-1}} u_n^{2k} d\sigma(u) = 2\pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + \frac{n}{2})} = 2\pi^{n/2} \frac{(2k)!}{k! \Gamma(k + \frac{n}{2})} \frac{1}{2^{2k}}.$$

これより

$$\hat{\sigma}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} c_k \|\xi\|^{2k} = 2\pi^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{n}{2})} \left(\frac{\|\xi\|}{2}\right)^{2k}. \quad \blacksquare$$

この手法は [25, Theorem 1] で一般化された Pizzetti の公式の証明に用いられている。余談であるが, [25, p. 342] に指摘されているように, 文献によっては Pizetti や Pizzeti といったスペルミスがある。

もう一つは (9) で定義した Fischer 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_F$ を用いる方法である。すなわち $\hat{\sigma}$ は回転不変な実解析関数であるから

$$\hat{\sigma}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(\xi) \quad (p_k(\xi) := \|\xi\|^{2k})$$

とおいて係数 a_k を求める際に,

$$p_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \hat{\sigma}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) p_j(\xi) \Big|_{\xi=0} = a_k \langle p_k | p_k \rangle_F$$

に注意するのである。そうすると

$$p_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \hat{\sigma}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \int_{S^{n-1}} (-i)^{2k} p_k(u) d\sigma(u) = (-1)^k \omega_{n-1} = (-1)^k \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

であり, また

$$\langle p_k | p_k \rangle_F = \Delta^k \|\xi\|^{2k} = 2^{2k} k! \frac{\Gamma(k + \frac{n}{2})}{\Gamma(n/2)}$$

であることから $a_k = 2\pi^{n/2} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k + \frac{n}{2})}$ を得る。■

最後の方法は, [7] でより一般の設定で用いられたものである。

REFERENCES

1. S. Bochner, "Harmonic analysis and the theory of probability," Univ. California Press, Berkeley, 1955.
2. J. L. Clerc, *Les représentations des groupes compacts, Les Cours du CIMPA, Analyse Harmonique* (1983), 145–234.
3. R. R. Coifman and G. Weiss, *Representations of compact groups and spherical harmonics*, L'Enseignement Math. **14** (1968), 121–173.
4. R. R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Springer Lecture Notes in Math. **242** (1971).
5. P. Eymard, *Analyse de Fourier euclidienne, Les Cours du CIMPA, Analyse Harmonique* (1983), 1–144.

6. J. Faraut, *Analyse harmonique et fonctions spéciales*, Deux Cours d'Analyse Harmonique, Birkhäuser, Boston (1987), 1–151.
7. J. Faraut, *Formule du binôme généralisée*, Springer Lecture Notes in Math. **1359** (1988), 170–180.
8. S. S. Gelbart, *A theory of Stiefel harmonics*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 29–50.
9. J. E. Gilbert and M. A. M. Murray, “Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis,” Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
10. S. Helgason, “Groups and geometric analysis,” Academic press, New York, 1984.
11. C. S. Herz, “Analyse harmonique à plusieurs variables,” Publ. Semi. Math. Orsay, 1965.
12. E. W. Hobson, “The theory of spherical and ellipsoidal harmonics,” Chelsea, New York, 1955.
13. 猪狩悳, “フーリエ級数,” 岩波書店, 東京, 1975.
14. N. N. Lebedev, “Special functions and their applications,” Dover, New York, 1972.
15. G. Letac, “Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale, exercices,” Masson, Paris, 1982.
16. 野村隆昭, Bochner-Hecke 等式の表現論的証明, 日本数学会 1992 年度年会函数解析分科会講演アブストラクト (於福岡大学) (1992 年 4 月).
17. T. Nomura, *une nouvelle démonstration des identités de Hecke*, preprint Kyoto-Math 93-09 (1993).
18. W. Schempp and B. Dresler, “Einführung in die harmonische Analyse,” Teubner, Stuttgart, 1980.
19. E. M. Stein and G. Weiss, “Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces,” Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.
20. A. Strasburger, *Differential operators of gradient type associated with spherical harmonics*, Ann. Pol. Math. **53** (1991), 161–183.
21. A. Strasburger, *A generalization of the Bochner identity*, Exp. Math. **11** (1993), 153–157.
22. R. Strichartz, *Bochner identities for Fourier transforms*, Trans. Amer. Math. Soc. **228** (1977), 307–327.
23. 竹内勝, “現代の球函数,” 岩波書店, 東京, 1975.
24. N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, “Representation of Lie groups and special functions, Vol. 2,” Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.
25. L. Zalcman, *Mean values and differential equations*, Israel J. Math. **14** (1973), 339–352.