数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 102-116

無限次退化エゴロフ型擬微分作用素の局所可解性と準楕円性

京都大学独立大学院
人間·環境学研究科
森本　芳則 (Yoshinori Morimoto)

序. 偏微分方程式の可解性と解の特異性の研究は、擬微分作用素論、フーリエ積分作用素論等の発展に従い、多くの研究者によって取り扱われきたテーマである。その中でも、主要型擬微分作用素の局所可解性と準楕円性の研究は、1957 年の Hans Lewy[9] による、局所的にも解が存在しない偏微分方程式の発見以来、Mizohata、Nirenberg-Treves、Egorov、Beals-Fefferman、Sato-Kawai-Kashiwara、Hörmander 等によって意欲的になされてきた。これらの研究の中から、擬微分作用素の正準変換に関する Egorov 原理や、古典的な擬微分作用素を拡張した、Beals-Fefferman クラスの作用素、或いは Hörmader-Weyl calculus など、いわゆる超局所解析の方法の多くが創出された。しかしながら、主要型擬微分作用素の局所可解性に関して、Nirenberg-Treves[15] が与えた (Ψ) 条件の十分性の問題は、20 数年来、未解決である（偏微分作用素の場合は Beals-Fefferman[1]、空間次元 2 の場合は Lerner[6] によって解決。また、(Ψ) 条件の必要性は Hörmander[5] によって示されている）。最近（1992 年）、Lerner[8] は、この Nirenberg-Treves 予想について、部分的ではあるが否定的結果を与えた。彼は、擬微分作用素の正値性についての深い考察から、ある特別な”無限次退化”をする主要型擬微分作用素の例について、Nirenberg-Treves 条件 (Ψ) を満たしても L^2 の意味では局所可解にならないことを示した（次節の定義 1.1、参照）。

一方、(Ψ) 条件を満たす$\boldsymbol{R}^n$における 1 階の主要型擬微分作用素 Pは、r次の有限次退化を保障する Hörmander Lie brackets 条件 $(C.H)_r$を満たせば、Pの共役作用素 P^* に対して次の劣楕円型評価式が成立する: $\forall K \subset \boldsymbol{R}^n$ compact, $\exists C_K > 0$;

$$(1) \qquad ||u||_\delta \le C_K(||P^*u|| + ||u||),\ u \in C_0^\infty(K), \delta = 1/(r+1).$$

逆に、P^*に対する劣楕円型評価式 (1) から、Pは条件 (Ψ) と $(C.H)_r$をみたすことが従う。これが、Egorov[2]、Hörmander[4] によって証明された劣楕円型作用素定理で、評価式 (1) から、Pの L^2 局所可解性と P^*の準楕円性を容易に示すことができる。条件 (Ψ) と $(C.H)_r$ から評価式 (1) を導く証明は、粗く言って、数度にわたる超局所化 (microlocalization) の議論によって作用素 P^*を Mizohata 作用素 $D_t + it^\ell|D_x|$ 或いは Egorov 作用素

$$(2) \qquad D_t + it^s(D_{x_1} + t^k x_1^b|D_x|) \ \text{ in } \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}_x^{n-1},\ s,b \ge 0 \text{ 偶数},\ k > 0 \text{ 奇数}$$

に帰着させることにより遂行される。Egorov 作用素 (2) に対しても、評価式 (1) を示す事は、直接的にはできず再度、条件 $(C.H)_r$と (Ψ) を用いて、超局所的に Mizohata 作用

素或いは Egorov 作用素に帰着させる議論が必要である。これ故、(2) において関数 t^s または t^kを無限次の零点をもつ関数に置き換えると、条件 $(C.H)_r$が成立せず、このような Egorov 型作用素に対する準楕円性とその共役作用素の局所可解性は全く未知であった。ここではまず、作用素 (2) において、t^kを $f(t) = \int_0^t \exp(-|\sigma|^{-\kappa})d\sigma,\ \kappa > 0$ に置き換えた場合を考察し、更に、t^sと x_1^bをある種の無限次の零点をもつ関数に置き換えた場合について結果を拡張する。現在の所、得られた結果は一般論には程遠く、またここで示す局所可解な主要型作用素と Lerner の反例とには距離があるが、Nirenberg-Treves 予想の解決と新たな擬微分作用素の理論の発展のために本研究が寄与する事を期待する。

1. 局所可解性の定義と回顧

$P = P(x, D_x)$ を$\boldsymbol{R}^n$ における m 階の古典的擬微分作用素とする。すなわち、Pのシンボル $P(x,\xi)$ が

$$P(x,\xi) = p_m(x,\xi) + p_{m-1}(x,\xi) + \cdots$$

の形で展開されていて、各 $p_j(x,\xi),\ j = m, m-1, \cdots$ が $C^\infty(T^*(\boldsymbol{R}^n) \setminus 0)$ で

$$p_j(x, \lambda\xi) = \lambda^j p(x,\xi)\ \ (\lambda > 0,\ \ \xi \neq 0)$$

をみたすとする。

定義 1.1. 擬微分作用素 Pが開集合$\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$で局所可解 (locally solvable) とは、任意の $x_0 \in \Omega$に対して x_0の開近傍$\omega_1, \omega_2\ (\bar{\omega_1} \subset \omega_2)$ が存在して

$$\forall f \in C_0^\infty(\omega_1),\ \exists u \in \mathcal{E}'(\omega_2)\ ;\ Pu = f \quad \text{in} \quad \omega_1$$

が成立することである。また、Pが x_0で局所可解とは、x_0の適当な開近傍ωで、Pが局所可解なことを意味する。上の定義で $C_0^\infty(\omega_1), \mathcal{E}'(\omega_2)$ を $L^2 \cap \mathcal{E}'(\omega_1), L^2 \cap \mathcal{E}'(\omega_2)$ に置き換えたとき、 Pは L^2 局所可解であるという。

Baire 定理、Hahn-Banach 定理を用いることにより次の命題が成立し、局所可解性の問題は、Sobolev 空間上での評価式に帰着される。

命題 1.2. Pが x_0で局所可解であるための必要十分条件は、x_0の開近傍 ω、実数 $s, t \geq 0$、定数 $C > 0$ が存在して評価式

$$||u||_{-s} \leq C||P^*u||_t\ ,\ \forall u \in C_0^\infty(\omega) \tag{1.1}$$

が共役作用素 P^*について成立することである。$s = t = 0$ のとき、(1.1) は L^2 局所可解と同値である。

作用素 Pが主要型、すなわち、Pの主シンボル $p_m(x,\xi) = p(x,\xi)$ が

$$d_{x,\xi}p(x,\xi) \neq 0 \quad \text{on} \quad \Sigma = \{(x,\xi) \in T^*(\boldsymbol{R}^n) \setminus 0; p(x,\xi) = 0\}$$

をみたすとき、Pが局所可解になるには、P の主シンボル$p(x,\xi)$について、次の Nirenberg-Treves 条件* が成立することが必要である（Hörmander [5; Thm. 26.4.7]）。

(Ψ) $\quad\left\{\begin{array}{l} d_{x,\xi}\mathrm{Re}(zp)(x,\xi) \neq 0 \text{ を満たす任意の } z \in \boldsymbol{C} \text{に対して、} \\ \text{Re } (zp) \text{ の null -bicharacteristic に沿って、正の方向に} \\ \text{動くとき、Im}(zp) \text{ の符号は}- \text{から } + \text{ へは変わらない。} \end{array}\right.$

共役作用素 P^*の主シンボルは$\bar{p}(x,\xi)$なので、P^*の主シンボルについて条件を言い替えると、(Ψ) 条件で ”$-$から$+$へ” を ”$+$から$-$へ” に置き換えた条件（これを以下、$(\bar{\Psi})$ であらわすことにする）が成立する。また、Pが微分作用素のとき、$p_m(x,-\xi) = (-1)^m p_m(x,\xi)$ が成立し、(Ψ) から $(\bar{\Psi})$ が従い、結局 ” Im (zp) の符号は変わらない ” が成立する（この条件を (P) であらわす）。Beals-Fefferman[1] では、作用素 Pが条件 (P) をみたすとき、評価 (1.1) が $s = t = 0$ で成立し、Pが L^2 局所可解になることが証明された。また、Hörmande[5] の 26 章では条件 (P) の下、Pの解の存在と正則性（regularity）が詳しく調べられている。それらの結果では、(P) から従う、Im $zp = q$ の定符号性から得られる不等式 $|d_x q/|\xi|\,| + |d_\xi q| \leq C\sqrt{|q|/|\xi|}$ が本質的で、これが（Beals-Fefferman class の）擬微分作用素の calculus を可能にしている。

符号が変わる (Ψ) 条件では、Mizohata 型作用素に帰着できる空間次元 2 の場合を除いて、付加条件なしに、局所可解性を論じることは困難に思われる（[6],[8]）。作用素 P のシンボルを多項式で近似すること、或いは、作用素 Pを、べき零 Lie 環上の表現で近似することを可能にするのが、次に述べる Hörmander 条件 $(C.H)_r$ である： $p_1(x,\xi) = \mathrm{Re}p(x,\xi)$, $p_2(x,\xi) = \mathrm{Im}p(x,\xi)$ とおき、H_jは p_j(j =1,2) の Hamilton vector 場 $H_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial p_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi_k}$ をあらわすとする。多重指標 $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $(i_j = 1 \text{ or } 2)$ に対して $|I| = k$とおく。自然数 rに対して Hörmander 条件 $(C.H)_r$が成立するとは

$$\sum_{|I| \leq r+1} |H_{i_1} \cdots H_{i_{k-1}} p_{i_k}(x,\xi)| \neq 0 \tag{1.2}$$

がすべての $(x,\xi) \in \Sigma = \{(x,\xi) \in T^*(\boldsymbol{R}^n) \setminus 0; p(x,\xi) = 0\}$ に対して満たされることである。序文で述べたように、劣楕円型評価式 (1) の必要十分条件は、(Ψ) と $(C.H)_r$ が成立することである（[2], [4], [5;Thm. 27.1.11], cf., [16],[17]）。supp u を小さく取ることにより、(1) から (1.1) with $s = t = 0$ が従い、Pの局所可解性が導かれる。

*局所可解性の null-bicharacteristic による特徴付けは、Matsumura[10] によって、[14][15] とは独立になされた。

次節で、(Ψ) 条件のみで、$(C.H)_r$条件を仮定しない場合の、主要型擬微分作用素の局所可解性の結果を述べるが、その前に主要型作用素の標準形について注意を与える事にする。命題 1.1 を考慮して、P^*の代わりに Pについて評価式 (1.1) を考える事にする。従って、以下、Pの主シンボル $p(x,\xi)$ は $(\bar{\Psi})$ 条件を満たすとする。 symplectic な 1 次変換と Malgrange の予備定理から、Σの点 (x_0,ξ_0) の錘近傍 Vで

$$p(x,\xi)=e(x,\xi)(\xi_1+iq(x,\xi')),\ \ 0\neq e\in S^{m-1}_{1,0},\ \ q\in S^1_{1,0}\ \ \text{実数値}$$

とあらわすことができる。但し、$\xi=(\xi_1,\xi')$ である。簡単のために、(x_1,ξ_1) を (t,τ) に、(x',ξ') を (x,ξ) と書くことにすると主要型作用素の主シンボルの標準形は

$$\tau+iq(t,x,\xi),\ \ q\in S^1_{1,0},\ \ \text{実数値} \tag{1.3}$$

である。条件 $(\bar{\Psi})$ は non-zero なシンボル e のかけ算と正準変換に不変で、上の標準形に対して、$(\bar{\Psi})$ は

$$q(t,x,\xi)>0 \text{ and } s>t \text{ imply } q(s,x,\xi)\geq 0 \tag{1.4}$$

と表現される。更に、$d_{x,\xi}q\neq 0$ ならば、陰関数定理と symplectic な 1 次変換により $q(t,x,\xi)=a(t,x,\xi)(\xi_1+b(t,x,\xi'))$, $a(t,x,\xi)\neq 0$ とあらわされる。a が零になる場合も許せば、$D_t+ia(t,x,D_x)(D_{x_1}+b(t,x,D_{x'}))$ が、主要型作用素の generic な形であると言えよう。しかし、$(C.H)_r$ 条件を仮定した場合と違って、厳密な意味で (1.3) より詳しい標準形を得る事は困難と思われる。

2. 主結果

P を次の形をした擬微分作用素とする。

$$P=D_t+it^s(D_{x_1}+f(t)x_1^b|D_x|)\ \ \text{in}\ \ \boldsymbol{R}_t\times\boldsymbol{R}^n_x,\ \ i=\sqrt{-1}, \tag{2.1}$$

ここで、 $s,b\geq 0$ は偶数、 $f(t)\in C^\infty$は奇関数で、$f'(t)>0$ $(t\neq 0)$。序文で述べたように $f(t)=t^k$, (k 奇数) のとき、Pは Egorov、Hörmander によって研究された劣楕円型作用素の重要なモデルで、s,b と fの仮定から $(\bar{\Psi})$ 条件（すなわち、(1.3) ）をみたす。まず $f(t)$ が原点で無限次に消える典型的な場合について次の定理が成立する。

定理 1. *P が (2.1) の作用素で*

$$f(t)=\int_0^t \exp(-|\sigma|^{-\kappa})d\sigma,\ \ \kappa>0. \tag{2.2}$$

とする。　このとき $\forall\varepsilon>0$, $\forall K\subset\boldsymbol{R}^{n+1}_{t,x}$ *compact*、$\exists C=C_{\varepsilon,K}$;

$$\begin{aligned}||(\log\Lambda)^{1/\kappa}u|| \ &+\ ||(\log\Lambda)^{1+1/\kappa-\varepsilon}\chi(t(\log\Lambda)^{1/\kappa})u||+||D_tu||\\ &\leq\ C(||Pu||+||u||)\ \ \textit{for } u\in C_0^\infty(K),\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、 $\Lambda^2 = 2 + |D_x|^2$、 $\chi(t) \in C^\infty$ は $\chi(t) = 0\ (t \leq 2)$ と$\chi(t) = 1\ (t \geq 3)$ をみたす。これ故、P^* は局所可解、さらに、$\kappa < s+1$ ならば Pは準楕円型である。

作用素 (2.1) の t^sと x_1^bを $f'(t)$ の退化の order に応じたある種の無限次零点をもつ関数に置き換えることが可能である。

定理 2. *$g_\nu(t) = |t|^{|\log|t||^\nu}$ for $\nu > 0$ とし、P は (2.1) の形の作用素において t^s と x_1^b をそれぞれ $g_{\nu'}(t)$ $(0 < \nu' < 1)$ と $g_{\nu''}(x_1)$ $(\nu'' > 0)$ に置き換えたものとする。$f(t)$ は $C^\infty-$奇関数で、$\exists\nu_0 > 0$ について*

$$|t|^{|\log|t||^{\nu_0}} \exp(-|t|^{-\kappa}) \leq f'(t) \leq |t|^{-|\log|t||^{\nu_0}} \exp(-|t|^{-\kappa}),\ \ \kappa > 0 \tag{2.4}$$

を原点近傍でみたす。 $f'(t)$ は $t > 0$ で単調増大とする。このとき、(2.3) の左辺の $||D_t u||$ を $||D_t\chi(|D_t|/\Lambda)u||$ に置き換えた評価式が成立する。従って、 P^* は局所可解、P は準楕円型になる。

定理 2 の証明方法を使う事により、虚部が区間で恒等的に零になる次のような主要型作用素の例について、局所可解性を議論できる。

系. 定理 2 の作用素 Pにおいて $g_{\nu'}(t)$ を $H(t)g_{\nu'}(t)$ に置き換えても、P^*は局所可解である。但し、 $H(t)$ は Heaviside 関数である。

更に、局所可解性については、つぎのような一般的な結果を得る。

$$\tilde{P} = D_t + i\alpha(t)(D_{x_1} + f(t)g(x_1)|D_x|) \text{ in } \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}_x^n, \tag{2.5}$$

とする。ここで、 $f(0) = 0$, $\alpha(t), g(t)$ と $f'(t)$ は $C^\infty-$偶関数で $t > 0$ において単調増大、かつ、次をみたす。

$$\alpha(0) = g(0) = f'(0) = 0\ \ \alpha(t), g(t), f'(t) > 0 \text{ for } t \neq 0.$$

$\Phi(t) = \log f'(t)$ とするとき、$t > 0$ 十分小として、以下を仮定する。

$$C_1 t\Phi'(t) \geq |\Phi(t)|^{\theta_0} \text{ for } \exists\theta_0 > 0,\ \exists C_1 > 0, \tag{2.6}$$

$$\Phi'''(t) \geq 0,\quad |\Phi'(t)|^2 > 2|\Phi''(t)||\Phi(t)|^{\theta_1} \text{ for } 0 < \exists\theta_1 < \theta_0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \leq C_2 \frac{(\log|\Phi(2t)|)^{\theta_2}}{t} \text{ for } 0 < \exists\theta_2 < 1 \text{ and } \exists C_2 > 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} C_3\alpha(t)g(t\alpha(t)|\Phi(t)|^{-\theta_3})\exp(|\Phi(t)|^{\theta_1}) \geq t^{-2}|\Phi(t)|^{2\theta_3} \\ \text{for } 0 < \exists\theta_3 \leq \theta_0 - \theta_1 \text{ and } \exists C_3 > 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

定理 3. 上記の$\tilde{P}$が条件 *(2.6)-(2.9)* をみたすならば、共役作用素 $\tilde{P}^*$ は局所可解である。

条件 (2.8), (2.9) はα, g, f'の間に零点の order の関係を要請している。定理 1, 2 であらわれる関数以外に条件 (2.6)-(2.9) をみたす例として次がある。

$$\begin{aligned} &f'(t) = \exp(-(\exp|t|^{-\kappa_1})), \quad \alpha(t) = \exp(-|t|^{-\kappa_2}), \\ &g(x_1) = \exp(-|x_1|^{-\kappa_3}) \text{ if } \kappa_1 > \kappa_2 > 0 \text{ and } \kappa_3 > 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

但し、$\theta_0 = 1, \theta_1 < 1$, $\theta_2 > \kappa_2/\kappa_1$ かつ $\theta_3 < \theta_1/\kappa_3$にとれる。

条件 (2.6) から、f'は $t=0$ で無限次の零点をもつ事が要求される。この為、(2.1) において、$f(t) = t^k$ ($k > 0$ 奇数)で t^sを $\exp(-|t|^{-\kappa})$ ($\kappa > 0$)に置き換えた作用素には定理 3 は適用できず、その共役作用素が局所可解であるかどうかは、未知である。

この節を終わるにあたって、(1.3) の形をした主要型作用素が準楕円型になるための十分条件を述べよう。$\rho_0 = ((0,0),(0,\xi_0)) \in T^*(\boldsymbol{R}^{n+1}_{t,x}) \setminus 0$ の錘近傍 Vで作用素 Pは

$$P = D_t + iQ(t,x,D_x), \ \ Q \in S^1_{1,0} \tag{2.11}$$

の形であらわされ、Q の主シンボル $q(t,x,\xi)$ が条件 (1.4) を満たすと仮定する。Γはシンボル $p = \tau + iq(t,x,\xi)$ の零点集合Σの部分集合で (1.2) が成立しない点からなるとする。$\rho_0 \in \Gamma$とし、更に、

(2.12) Γ は τ の Hamilton vector 場に横断的な、$T^*(\boldsymbol{R}^{n+1})$ の C^∞ 超曲面に含まれる

を仮定する。Pを ρ_0 の錘近傍 Vに超局所化した作用素 P_λ を考える。まず、$h(x)$ を C^∞_0 関数で、$0 \le h \le 1$, $h(x) = 1$ for $|x| \le 1/5$ かつ $h(x) = 0$ for $|x| \ge 7/24$ を満たすとする。$\delta > 0$ に対して $h_\delta(x) = h(x/\delta)$、$H_\delta(x,\xi;\lambda) = h_\delta(x)h_\delta(\lambda\xi - \xi_0)$ とおく。ここで、λは $0 < \lambda \le 1$ を満たすパラメータである。δ_1 を $\{|t| \le 2\delta_1\} \times \text{supp } h_{2\delta_1}(x)h_{2\delta_1}(\lambda\xi - \xi_0)$ が V の$\boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}^n_x \times \boldsymbol{R}^n_\xi$ への射影に含まれるように小さくとる。パラメータ $0 < \lambda \le 1$ に対して、

$$P_\lambda = D_t + ih_{\delta_1}(x)Q(t,x,D_x)h_{\delta_1}(\lambda D_x - \xi_0) \equiv D_t + iQ_\lambda(t,x,D_x)$$

とおくとき、次の定理が成立する。

定理 4. Pを$\rho_0 = ((0,0),(0,\xi_0)) \in T^*(\boldsymbol{R}^{n+1}_{t,x}) \setminus 0$ の錘近傍 V で (2.11) の形をした擬微分作用素で (1.4) をみたすとする。Γを上記の集合で、$\rho_0 \in \Gamma$かつ (2.12) を仮定する。上で述べたδ_1に対して$\delta > 0$ は $100\delta < \delta_1$ を満たす任意の正数とする。各δについて非負なシンボル$\varphi(x,\xi;\lambda) \in S^0_{1,0}$ と $\alpha(t,x,\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_t;\ S^0_{1,0})$ が存在して $\{\varphi(x,\xi;\lambda); 0 < \lambda \le 1\}$ は $S^0_{1,0}$ の有界集合をなし、以下の条件を満たすと仮定する。

$$\begin{cases} \varphi \ge 1 \ \text{ outside of supp } H_{5\delta}(x,\xi;\lambda) \\ \varphi = 0 \ \text{ on supp } H_\delta(x,\xi;\lambda), \end{cases} \tag{2.13}$$

$$(2.14) \qquad |(H_q\varphi)(t,x,\xi;\lambda)| \le \alpha(t,x,\xi) \text{ on } \{|t|\le\delta_1\}\times \operatorname{supp} H_{100\delta}(x,\xi;\lambda),$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0 \text{ independent of } 0<\lambda\le 1\ ;$$

$$(2.15) \qquad \begin{aligned} &||u||^2+(\log\lambda)^2||\alpha(t,x,D_x)u||^2 \\ &\le \varepsilon||P_\lambda u||^2 + C_\varepsilon(\lambda||u||^2+\lambda^{-2}||(1-H_{20\delta}(x,D_x;\lambda)u||^2) \\ &\qquad\qquad \text{if } u(t,x)\in C_0^\infty([-\delta_1,\delta_1];\mathcal{S}(\boldsymbol{R}_x^n)). \end{aligned}$$

このとき、次が成立する。

$$(2.16) \qquad \rho_0\notin \mathrm{WF}(Pu) \text{ implies } \rho_0\notin\mathrm{WF}(u) \text{ for } \forall u\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^{n+1}).$$

定理 1 の (2.3) より、$\kappa<s+1$ のとき、定理 4 の仮定が$\varphi(x,\xi)=(1-h_{5\delta}(x))+(1-h_{5\delta}(\lambda\xi-\xi_0))$ と $\alpha(t,x,\xi)=t^s$で成立し、(2.16) から、定理 1 の準楕円性の結果を得る。定理 2 についても同様である。定理 1-3 の詳細な証明は、[13] に与えてある。また、定理 4 の証明は [12] の定理 1 のそれと、Γの定義が違うだけで、同じである。[12] では、L^2 評価が比較的容易に求まる、作用素 (2) における $s=0$ または、$b=0$ に対応する場合について、準楕円性が、少し一般的な形で論じられている。

3. 定理 1 の証明の概略

前節の終わりで述べたような、Pを超局所化した、パラメータ $0<\lambda\le 1$ に従属する作用素

$$P_\lambda = D_t+it^s(D_y+f(t)y^b\lambda^{-1}),\ \ f(t)=\int_0^t \exp(-|\sigma|^{-\kappa})d\sigma,\ \ \kappa>0$$

に対して

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} &||\,|\log\lambda|^{1/\kappa}u||^2 \ + \ ||\,|\log\lambda|^{1+1/\kappa-\varepsilon}\chi(2t|\log\lambda|^{1/\kappa})u||^2+||D_tu||^2 \\ &\le\ C(||P_\lambda u||^2+||u||^2) \\ &\qquad \text{for } u(t,y)\in C_0^\infty([-1,1]^2) \end{aligned}$$

を示す。この評価式から (2.1) を得ることができる。 以下、$u\in C_0^\infty([-1,1]^2)$ として (3.1) を示す。$t_1=|\log\lambda|^{-1/\kappa}$とおくと $f'(t_1)\lambda^{-1}=1$ なので、

$$(3.2) \qquad t^sy^bf(t)\lambda^{-1}\le 1 \text{ if } |t|\le t_1 \text{ and } |y|\le 1$$

が成立する。supp $u \subset \{|t| \le t_1\}$ ならば

$$2(||P_\lambda u||^2 + ||u||^2) \ge ||(D_t + it^s D_y)u||^2$$

が従う。Mizohata 作用素に対しては

$$C||(D_t + it^s D_y)u||^2 \ge ||D_t u||^2 + ||t^s D_y u||^2$$

が成立するので、 Poincaré の不等式を使って

$$\begin{aligned} C||P_\lambda u||^2 &\ge |\log\lambda|^{2/\kappa}||u||^2 + ||D_t u||^2 \\ &\quad \text{if} \quad \text{supp } u \subset \{|t| \le t_1\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る。以下、λによらない異なる正定数を同じ記号 Cであらわすことにする。$B_\lambda = D_y + f(t)y^b\lambda^{-1}$とおくとき、

$$\begin{aligned} ||P_\lambda u||^2 &= ||D_t u||^2 + ||t^s B_\lambda u||^2 \\ &+ 2\mathrm{Re}(st^{s-1}B_\lambda u, u) + 2\mathrm{Re}(V_\lambda u, u), \end{aligned} \tag{3.4}$$

が成立する。但し、

$$V_\lambda = V_\lambda(t, y) = t^s y^b f'(t)\lambda^{-1}. \tag{3.5}$$

supp $u \subset \{|t| \ge t_1/2\}$ ならば、

$$|(st^{s-1}B_\lambda u, u)| \le \frac{1}{4}||t^s B_\lambda u||^2 + C|\log\lambda|^{2/\kappa}||u||^2. \tag{3.6}$$

従って、(3.4) と (3.6) から

$$\begin{aligned} ||P_\lambda u||^2 &\ge \tfrac{1}{2}(||D_t u||^2 + ||t^s B_\lambda u||^2 + (V_\lambda u, u)) \\ &- C|\log\lambda|^{2/\kappa}||u||^2 \\ &\quad \text{if} \quad \text{supp } u \subset \{|t| \ge t_1/2\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る。

評価式 (3.1) は、(3.3) と (3.7) をつなぎ合わせることによって得られる。但し、(3.7) の右辺の始めの 3 項から 適当な "positivity "を稼ぐことが必要である。このために、$t = t_1$ の近くでポテンシャル V_λ の挙動を詳しく考察することと、$t = t_1$ を含む区間を特別な形で分解することが要請される。$\ell > 0$ に対して

$$\mu = \mu(\lambda) = \frac{(\log|\log\lambda|)^{\ell+1}}{|\log\lambda|} = \frac{\log|\log\lambda|^{a(\lambda)}}{|\log\lambda|}, \tag{3.8}$$

とおく。ここで、$a(\lambda) = (\log|\log\lambda|)^\ell$とおいた。$\lambda > 0$ が小ならば$\mu(\lambda) < 1$ が成立する。$t_2 = ((1+\mu)/|\log\lambda|)^{1/\kappa}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t_2)\lambda^{-1} &= \exp\left\{-\frac{|\log\lambda|}{1+\mu} + |\log\lambda|\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\log(|\log\lambda|)^{a(\lambda)}}{1+\mu}\right\}. \end{aligned}$$

従って、

$$f'(t)\lambda^{-1} \geq |\log\lambda|^{a(\lambda)(1-\mu(\lambda))} \text{ if } |t| \geq t_2 \tag{3.9}$$

を得る。$(1+\mu)^{1/\kappa} = 1 + \mu/\kappa + O(\mu^2)$ なので

$$t_2 - t_1 = O(|\log\lambda|^{-1-1/\kappa}(\log|\log\lambda|)^{\ell+1}), \tag{3.10}$$

が成立する。但し、$R = O(J)$ は $C^{-1} < R/J < C$ がλによらない定数 $C > 0$ に対して成立することを意味する。$\gamma_0 = t_1/2$、 $\gamma_j = \gamma_{j-1}/2$ for $j = 1, 2, 3, \ldots$ と帰納的に定義する。N を$\gamma_N < 2(t_2 - t_1)$ を満たす最小の自然数とすると、(3.10) から

$$N = O(\log|\log\lambda|) \tag{3.11}$$

を得る。 $j \geq N+1$ に対しても、$\gamma_j = \gamma_N$ とおくことにする。$t_0 = t_1 - \gamma_0$とおいて、次のような区間 $[t_0, t_1]$ と $[t_1, \infty)$ の分解を考える：$I_1 = [t_0, t_0 + \gamma_1]$ とし、$j = 1, 2, 3, \cdots$に対して $I_{j+1} = [\bar{\gamma}_j, \bar{\gamma}_{j+1}]$ とおく。但し、$\bar{\gamma}_j = t_0 + \sum_{k=1}^{j} \gamma_k$ for $j = 1, 2, 3, \cdots$である。 このとき、分解

$$[t_0, t_1] = I_1 \cup \cdots \cup I_N \cup I_{N+1} \text{ and } [t_1, \infty) = \cup_{j=N+2}^{\infty} I_j$$

が成立する。$j = 1, \cdots, N$に対して

$$\mu_j = |\log\lambda|^{-s/\kappa}\gamma_j \tag{3.12}$$

とおき、 $j \geq N+1$ については $\mu_j = \mu_N$ とする。ℓ を充分大きく取れば、(3.5) と (3.9) より

$$V_\lambda(t, x_1) \geq \gamma_j^{-2} \text{ on } \{|t| \geq t_2\} \times \{|y| \geq \mu_j\} \tag{3.13}$$

が成立する。$J_j = [-\mu_j, \mu_j]$ とおいて、Q_j は$\boldsymbol{R}^2_{t,y}$の矩形 $I_j \times J_j$をあらわすとする。I_j^*をI_jの右側への 4 倍拡大とする。すなわち、$I_j^* = [\bar{\gamma}_{j-1}, \bar{\gamma}_j + 3\gamma_j]$ （ $j = 1, \cdots, N+2$）。$j \geq N+3$ については、便宜的に $I_j^* = I_j$ とおくことにする。$j = 1, 2, 3, \cdots$について Q_j^* は矩形 a rectangle $I_j^* \times [-2\mu_j, 2\mu_j]$ をあらわすことにする。以上の記号の下、次の補題が成立する。

Lemma 3.1. $\exists c_0 > 0$;

$$\int_{Q_j^*} |D_t u|^2 + t^{2s}|(D_y + f(t)y^b\lambda^{-1})u|^2 + V_\lambda(t,y)|u|^2 dtdy$$

(3.14)

$$\geq c_0\gamma_j^{-2}\int_{Q_j}|u|^2 dtdy \text{ for } u(t,y) \in C^1([-1,1]^2).$$

Proof. [3; p.148] で与えられている次の基本不等式を用いる (see also [11; Lemma 1.1]) : I が $\boldsymbol{R}_t$ の有界区間ならば

$$\int_I |D_t v|^2 dt \geq c_0\frac{(\text{diam } I)^{-2}}{|I|}\int_{I\times I}|v(t)-v(t')|^2 dtdt' \text{ for } v \in C^1(\boldsymbol{R}).$$

但し、 $|I| = \text{diam } I$ は Iの長さをあらわす。$I = I_j^*$として、$v(t) = u(t,y) \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ を代入し、y について $[-2\gamma_j, 2\gamma_j]$ で積分すると、Q_j^* の面積 $|Q_j^*|$ は $8|I_j||J_j| = 8|Q_j|$ に等しいので、

$$\int_{Q_j^*}|D_t u(t,y)|^2 dtdy \geq c_0\frac{\gamma_j^{-2}}{|Q_j|}\int_{Q_j^*\times Q_j^*}|u(t,y)-u(t',y)|^2 dtdydt'dy'$$

を得る。 $\tilde{u} = u\exp(i\lambda^{-1}f(t)y^{b+1}/(b+1))$ とおくと、同様に

$$\int_{Q_j^*} t^{2s}|(D_y \quad + \quad f(t)y^b\lambda^{-1})u(t,y)|^2 =$$

$$\int_{Q_j^*} t^{2s}|D_y\tilde{u}(t,y)|^2 dtdy \quad \geq \quad c_0\frac{\mu_j^{-2}}{|Q_j|}\int_{Q_j^*\times Q_j^*}(t')^{2s}|\tilde{u}(t',y)-\tilde{u}(t',y')|^2 dtdydt'dy'$$

が成立する。明らかに

$$\int_{Q_j^*} V_\lambda(t,y)|u(t,y)|^2 dtdy = \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j^*\times Q_j^*} V_\lambda(t',y')|u(t',y')|^2 dtdydt'dy'.$$

が成立する。 これらの式の右辺は正である事を注意しよう。$Q_j^0 = Q_j^* \cap \{|t| \geq t_2\} \times \{|x_1| \geq \mu_j\}$ とおくと、(3.12) と (3.13) より

$$\int_{Q_j^*}|D_t u|^2 + t^{2s}|D_y\tilde{u}|^2 + V_\lambda(t,y)|u|^2 dtdy$$

$$\geq c_0\frac{\gamma_j^{-2}}{|Q_j|}\int_{Q_j\times Q_j^0}\Big\{|u(t,y)-u(t',y)|^2$$

$$+2|\tilde{u}(t',y)-\tilde{u}(t',y')|^2+2|u(t',y')|^2\Big\}\,dtdydt'dy'$$

$$\geq c_0\frac{\gamma_j^{-2}}{|Q_j|}\int_{Q_j\times Q_j^0}\Big\{|u(t,y)|^2/2-|u(t',y)|^2+|\tilde{u}(t',y)|^2$$

$$-2|\tilde{u}(t',y')|^2+2|u(t',y')|^2\Big\}\,dtdydt'dy'$$

が成立する。$|Q_j^0|/|Q_j|\geq 1$ かつ $|u|=|\tilde{u}|$ なので

$$\int_{Q_j^*}|D_tu|^2+t^{2s}|D_y\tilde{u}|^2+V_\lambda(t,y)|u|^2dtdy\geq c_0\gamma_j^{-2}\int_{Q_j}|u(t,y)|^2dtdy$$

が成立し、$|D_y\tilde{u}|=|(D_y+f(t)y^b\lambda^{-1})u|$ より求める評価式 (3.14) を得る。

$\mathcal{H}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ をヒルベルト空間 $L^2([-1,1])$、($[-1,1]\subset\boldsymbol{R}_y$)、とそのノルムを、それぞれあらわすとする。補題3．1と同様な方法により、(3.13) から

(3.15)
$$\int_{I_j^*}\|D_tu\|_{\mathcal{H}}^2+(V_\lambda u,u)_{\mathcal{H}}dt\geq c_0\gamma_j^{-2}\int_{I_j}\|u\|_{\mathcal{H}}^2dt$$
$$\text{for } u\in C^1(\boldsymbol{R}_t;\mathcal{H}) \text{ with supp } u\cap\{|y|\leq\mu_j\}=\emptyset$$

が成立する。(3.14) と (3.15) から

(3.16)
$$\int_{I_j^*}\|D_tu\|_{\mathcal{H}}^2+t^{2s}\|(D_{x_1}+f(t)y^b\lambda^{-1})u\|_{\mathcal{H}}^2+(V_\lambda u,u)_{\mathcal{H}}dt$$
$$\geq c_0\gamma_j^{-2}\int_{I_j}\|u\|_{\mathcal{H}}^2dt \text{ for } u\in C^1(\boldsymbol{R}_t;\mathcal{H})$$

が得られる。

(3.3) と (3.7) をつなぐために、次の特別な "cut function" が必要である：まず、$\psi(t)\in C^\infty$ を $0\leq\psi\leq 1$, $\psi(t)=0$ for $t\leq 0$, $\psi(t)=1$ for $t\geq 1$ かつ $|\psi'(t)|\leq 2$ を満たす関数とする。

(3.17)
$$\varphi_\lambda(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}(j-1+\psi((t-\bar{\gamma}_{j-1})/\gamma_j)^2) & \text{if } t\in I_j\ (j=1,\cdots,N)\\ 0 & \text{if } t<t_0\\ 1 & \text{if } t>\bar{\gamma}_N,\end{cases}$$

とおくと $j=1,\cdots,N$について

(3.18)
$$\frac{j-1}{N}\leq\varphi_\lambda(t)\leq\frac{j}{N} \text{ if } t\in I_j,$$

$$|\varphi_\lambda'(t)| \le 4(\gamma_j N)^{-1} \text{ if } t \in I_j, \tag{3.19}$$

$$|(\sqrt{\varphi_\lambda(t)})'| \le 4(\gamma_j \sqrt{Nj})^{-1} \text{ if } t \in I_j \tag{3.20}$$

が成立する。$u \in C_0^\infty([-1,1]^2)$ について $\sqrt{N\varphi_\lambda(t)}u$ を (3.7) に代入すると適当な正定数 C, C_1, C_2 and c_0が存在して

$$\begin{aligned} &CN||P_\lambda u||^2 \\ &\ge c_0 N\{||\sqrt{\varphi_\lambda} D_t u||^2 + |\log\lambda|^{-2s/\kappa}||\sqrt{\varphi_\lambda}(D_{x_1} - \tilde{r})u||^2 + (\varphi_\lambda V_\lambda u, u)\} \\ &-C_1 N||[D_t, \sqrt{\varphi_\lambda}]u||^2 - C_2 N|\log\lambda|^{2/\kappa}||\sqrt{\varphi_\lambda}u||^2 \\ &\equiv \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 \end{aligned} \tag{3.21}$$

が成立する。$j \ge N+2$ については $I_j^* = I_j$なので (3.18) から、$B_\lambda = D_y + f(t)y^b\lambda^{-1}$に注意すると

$$\begin{aligned} C\Omega_1 \ &\ge \ \sum_{j=2}^{N+2} \int_{I_j^*} ||D_t u||_{\mathcal{H}}^2 + t^{2s}||B_\lambda u||_{\mathcal{H}}^2 + (V_\lambda u, u)_{\mathcal{H}} dt \\ &+ \ \sum_{j=N+3}^{\infty} \int_{I_j} ||D_t u||_{\mathcal{H}}^2 + t^{2s}||B_\lambda u||_{\mathcal{H}}^2 + (V_\lambda u, u)_{\mathcal{H}} dt \\ &\ge \ \sum_{j=2}^{N+1} \gamma_j^{-2} \int_{I_j} ||u||_{\mathcal{H}}^2 dt + \gamma_N^{-2} \int_{t_1}^{\infty} ||u||_{\mathcal{H}}^2 dt \end{aligned} \tag{3.22}$$

が成立する。ここで、最後の不等式を得るのに (3.16) を用いた。(3.20) によって

$$\Omega_2 \le C \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j^{-2}}{j} \int_{I_j} ||u||_{\mathcal{H}}^2 dt \tag{3.23}$$

が成立する。(3.18) から

$$\Omega_3 \le C|\log\lambda|^{2/\kappa}\Big(\sum_{j=1}^{N+1} j \int_{I_j} ||u||_{\mathcal{H}}^2 dt + N\int_{t_1}^{\infty} ||u||_{\mathcal{H}}^2 dt\Big) \tag{3.24}$$

明らかに、λによらない自然数 j_0 がとれて

$$2C^2\Big(\frac{\gamma_j^{-2}}{j} + (\min\{j, N\})|\log\lambda|^{2/\kappa}\Big) < \gamma_j^{-2} \text{ if } j > j_0 \tag{3.25}$$

が成立する。(3.25) を考慮すると、(3.21)-(3.24) から

$$
\begin{aligned}
CN\|P_\lambda u\|^2 &\geq c_0\Big\{N\|\sqrt{\varphi_\lambda(t)}D_t u\|^2 \\
&+ \sum_{j=2}^{N+1}\gamma_j^{-2}\int_{I_j}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt + \gamma_N^{-2}\int_{t_1}^{\infty}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt\Big\} \\
&- C\sum_{j=1}^{j_0}|\log\lambda|^{2/\kappa}\int_{I_j}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

が得られる。同様に、$\sqrt{N\varphi_\lambda(-t)}u$ を (3.7) に代入する。これにより、$-I_j$ が I_j の原点対称な区間とすると

$$
\begin{aligned}
CN\|P_\lambda u\|^2 &\geq c_0\Big\{N\|\sqrt{\varphi_\lambda(|t|)}D_t u\|^2 \\
&+ \sum_{j=2}^{N+1}\gamma_j^{-2}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt + \gamma_N^{-2}\int_{|t|\geq t_1}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt\Big\} \\
&- C\sum_{j=1}^{j_0}|\log\lambda|^{2/\kappa}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

が得られる。(3.3) に $(1-\varphi_\lambda(|t|))u$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
C\|P_\lambda u\|^2 &\geq \|(1-\varphi_\lambda(|t|))D_t u\|^2 \\
&+ |\log\lambda|^{2/\kappa}\|(1-\varphi_\lambda(|t|))u\|^2 \\
&- \frac{C}{N^2}\sum_{j=2}^{N}\gamma_j^{-2}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

を得る。実際 $|\log\lambda|^{2/\kappa}$ は、はるかにγ_1^{-2}/N^2より大きく、また、(3.19) から

$$
\|[D_t,\varphi_\lambda(|t|)]u\|^2 \leq \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\gamma_j^{-2}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
$$

が従うからである。

$$
\begin{aligned}
2|\log\lambda|^{2/\kappa}\|(1-\varphi_\lambda(|t|))u\|^2 &\geq \sum_{j=1}^{j_0}|\log\lambda|^{2/\kappa}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt \\
&+ \int_{-t_0}^{t_0}|\log\lambda|^{2/\kappa}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

に注意すると、(3.27) と、(3.28) に Nをかけた式から

$$
\begin{aligned}
CN\|P_\lambda u\|^2 \;\geq\;& N\|D_t u\|^2 + N\int_{-\bar{\gamma}_{[N/2]}}^{\bar{\gamma}_{[N/2]}} |\log\lambda|^{2/\kappa}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt \\
&+ \sum_{j=1}^{N+1}\gamma_j^{-2}\int_{I_j\cup(-I_j)}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt + \gamma_N^{-2}\int_{|t|\geq t_1}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 dt
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

が、$(1-\varphi_\lambda(|t|))^2+\varphi_\lambda(|t|)\geq 1/2$ より従う。ここで、$[N/2]$ は $N/2$ より小さい最大の整数とする。$j\geq [N/2]+1$ ならば$\gamma_j^{-2} > N|\log\lambda|^{2/\kappa}$ なので、N で割る事により、(3.10) と (3.11) に注意すれば、求める式 (3.1) を得る。

参考文献

[1] Beals R. and Fefferman C., On local solvability of linear partial differential equations, Ann. of Math. **97**, (1973), 482-498.

[2] Egorov Yu. V., Subelliptic operators, Russian Math. Surveys **30:2** (1975), 59-118, **30:3** (1975),55-105.

[3] Fefferman C., The uncertainty principle , Bull. Amer. Math. Soc., **9** (1993), 129-206.

[4] Hörmander L., Subelliptic operators, Seminar on Singularities of Solution of Linear Partial Differential Equations, Princeton University Press 1979, 3-49.

[5] Hörmander L., The analysis of Linear Partial Differential Operators IV, (1985), Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, Tokyo.

[6] Lerner N., Sufficiency of condition (Ψ) for local solvability in two dimensions, Ann. Math. **128** (1988), 243-258.

[7] Lerner N., An iff solvability condition for the oblique derivative problem, Séminar EDP 90-91, Ecole Polytechnique, exposé n° 18.

[8] Lerner N., Nonsolvability in L^2 for a first order pseudo-differential operator satisfying condition (Ψ), preprint.

[9] Lewy H., An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math. **66** (1957), 155-158.

[10] Matsumura M., Existence de solutions locales pour quelques opérateurs différentiels, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 383-387.

[11] Morimoto Y., Estimates for degenerate Schödinger operators and hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic operators, J. Math. Kyoto Univ., **32** (1992), 333-372.

[12] Morimoto Y., Hypoelliptic operators of principal type with infinite degeneracy, to appear in Tsukuba J. Math., **19** (1994).

[13] Morimoto Y., Local solvability and hypoellipticity for pseudodifferential operators of Egorov type with infinite degeneracy, preprint.

[14] Nirenberg L. and Treves F., Solvability of a first order linear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 331-351.

[15] Nirenberg L. and Treves F., On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions. II. Sufficient conditions. Correction. Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 1-38 and 459-509; **24** (1971), 279-288.

[16] Nourrigat J., Subelliptic systems, Comm. in P.D.E. **15** (1990), 341-405.

[17] Nourrigat J., Systèmes sous-elliptiques II, Invent. Math. **104** (1991), 377-400.