

## Poisson Cohomology

舞鶴工業高専 中西靖忠 (Nobutada Nakanishi)

### §1. Poisson manifolds の復習

$N$  を  $C^\infty$ -manifold とする。  $C^\infty(N)$  上の bracket  $\{, \}$  が、 skew-symmetric かつ Jacobi's 律を満たし、更に Leibniz の等式を満たす時、 Poisson bracket という。

$M^k(N)$  を  $N$  上の  $k$ -vector fields の空間とすると、

$\oplus_k M^k(N)$  上には、いわゆる Schouten bracket が定義される。即ち、

$$[\cdot, \cdot] : M^r(N) \times M^s(N) \longrightarrow M^{r+s-1}(N).$$

特に、単項式については次式で定義される:

$$\begin{aligned} [u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_s] \\ = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [u_i, v_j] \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_i \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_s. \end{aligned}$$

$\psi \in M^2(N)$  が Schouten bracket に関して  $[\psi, \psi] = 0$  を満たす時、  $\psi$  を  $N$  上の Poisson structure とする。  $N$  上の Poisson bracket  $\{, \}$  に対して、 Poisson structure  $\psi$  が対応し

$f, g \in C^\infty(N)$  に対して,  $\{f, g\} = \langle \psi \mid df \wedge dg \rangle$  となる。そこで、今後、組  $(N, \psi)$  を Poisson manifold と呼ぶことにする。(混乱の恐れが無ければ、単に  $N$  と書くこともある。)

$\psi$  と Schouten bracket を用いて次の2つの空間を定義しておこう。

(1)  $\mathcal{C} = \{f \in C^\infty(N) \mid [f, \psi] = 0\}$  : Casimir functions の空間。

(2)  $\mathcal{L} = \{X \in \mathfrak{X}(N) \mid [X, \psi] = 0\} = \{X \in \mathfrak{X}(N) \mid \mathcal{L}(X)\psi = 0\}$  :  $(N, \psi)$  の無限小変換の空間 (= Lie algebra)。

これから議論の対象となるのは、linear Poisson manifolds で、これは Poisson manifolds の典型例であって極めて興味深い。その定義の概略を述べよう。 $\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie algebra,  $\mathfrak{g}^*$  をその双対空間とする。 $\mathfrak{g}$  の基底  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は自然に“多様体”  $\mathfrak{g}^*$  の座標関数と見なされる。

$\{C_{ij}^k\}$  を  $\mathfrak{g}$  の構造定数とする時,  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  に対して,

$$\{f, g\} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

と定めると,  $\{, \}$  は  $\mathfrak{g}^*$  上の Poisson bracket を定める。

対応する Poisson structure  $\psi$  は,  $\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$  と与えられる。

組  $(\mathfrak{g}^*, \psi)$  を linear Poisson manifold と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$  を Lie algebra としても  $\rightarrow$  連結 Lie group を  $G$  とすると、 $G$  は  $\mathfrak{g}^*$  上に coadjoint action を与える。 $\mathfrak{g}^* \ni \mu$  に対して、 $G \cdot \mu = \{ \text{Ad}_g^* \mu \mid g \in G \}$  を coadjoint orbit とし、Kostant - Kirillov の定理によれば、 $G \cdot \mu$  は symplectic manifold の構造を持ち、 $\mathfrak{g}^*$  は  $G \cdot \mu$  達の disjoint union となっている。 $G \cdot \mu$  を今後 symplectic leaf と呼ぶ。一般に  $G \cdot \mu$  の次元は (いつも偶数次元ではあるが)  $\mu$  に depend して変わる。この特異性こそが本研究の興味の対象となる。

## §2. Poisson Cohomology の定義と例

$D: M^k(N) \longrightarrow M^{k+1}(N)$  を  $D(X) = [\psi, X]$  で定義すると、 $[\psi, \psi] = 0$  より  $D \circ D = 0$  が従う。よって  $N$  上の cohomology 群  $\mathcal{H}^k(N)$  が定義できる。これを Poisson cohomology と呼ぶ。 $N$  が symplectic manifold の場合、 $\mathcal{H}^k(N)$  はその de Rham - cohomology 群  $H^k(N)$  と一致する。 $\mathcal{H}^k(N)$  の具体的な幾何学的意味を記そう。

$$\mathcal{H}^0(N) = \{ \text{Casimir functions の空間} \},$$

$$\mathcal{H}^1(N) = \{ \text{Poisson vector fields} \} / \{ \text{Hamiltonian vector fields} \},$$

$$\mathcal{H}^2(N) = \{ \text{Poisson structure の infinitesimal deformations} \},$$

$$\mathcal{H}^3(N) = \{ \text{deformation quantization に対する障害} \}.$$

本稿では、 $\mathcal{H}^1(N)$  をいくつかの  $N$  について計算する。

$N$  が linear Poisson manifold の場合,  $\mathcal{H}^1(N)$  を計算することは、解析的には、一階線形連立偏微分方程式の可解性の研究をすることと同等である。

Poisson cohomology  $\mathcal{H}^1(N)$  の計算例.

例 1.  $N = \mathbb{R}^3$ ,  $\psi = \partial_x \wedge \partial_y$  とする。

$$\mathcal{Z}^1(N) \ni X = f \partial_x + g \partial_y + h \partial_z$$

$$\iff \mathcal{L}(X)\psi = 0 \quad (\text{i.e. } DX = 0)$$

$$\iff X = -\frac{\partial F}{\partial y} \partial_x + \frac{\partial F}{\partial x} \partial_y + h(z) \partial_z \quad (\exists F \in C^\infty(\mathbb{R}^3))$$

$$\mathcal{B}^1(N) \ni Y = -\frac{\partial G}{\partial y} \partial_x + \frac{\partial G}{\partial x} \partial_y \quad (\exists G \in C^\infty(\mathbb{R}^3))$$

$$(\text{i.e. } Y = DG = [\psi, G] = Y_G)$$

$$\text{よって } \mathcal{H}^1(N) = \mathcal{Z}^1(N) / \mathcal{B}^1(N) \cong \{h(z) \partial_z\}.$$

例 2.  $N = S^2 \times \mathbb{R}^+ \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^* - \{0\}$

$N$  は linear Poisson structure を持つ:

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y.$$

$$(\text{i.e. } \psi = z \partial_x \wedge \partial_y + x \partial_y \wedge \partial_z + y \partial_z \wedge \partial_x)$$

$$X = f \partial_x + g \partial_y + h \partial_z \text{ に対して, } \mathcal{Z}^1(N) \ni X \iff$$

$$\begin{cases} xf + yg + zh = 0, \\ f_x + g_y + h_z = 0. \end{cases}$$

であることがわかる。(詳細は文献 [2] を参照のこと。) 此外より、 $X$  は各点で symplectic leaf  $S^2$  に接することかわか

る。また、点  $(x, y, z)$  を通る symplectic leaf 上の Kirillov form  $\omega$  は、

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + y dz \wedge dx)$$

で与えられる。  $(x, y, z) \in S^2(r)$  のとき、  $(r, 0, 0)$  から出発し、  $(x, y, z)$  までの  $S^2(r)$  上の path を  $\gamma$  とし、

$$F(x, y, z) = - \int_{\gamma} i(x)\omega$$

と定義すると、  $S^2(r)$  は単連結だから  $F$  は  $N$  上矛盾なく定義された  $C^\infty$  function となる。そしてこの  $F$  に対して  $X = X_F$  を得る。即ち  $X \in \mathcal{B}^1(N)$  となって  $\mathcal{H}^1(N) = 0$  となる。

以上の例は、いずれも "regular" Poisson manifold における Poisson cohomology の計算である。(但し、例2では、  $N = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$  としてもやはり  $\mathcal{H}^1(N) = 0$  を得る。) この方面の研究は、1977年の A. Lichnerowicz の論文から始まったが、最近、Yu. M. Vorobev - M. V. Karasov, I. Vaisman, Ping Xu - A. Weinstein らの研究がある。( [3], [4], [5] を参照のこと。) そこで我々の目標は、"singular" Poisson manifold の場合に、その  $\mathcal{H}^1(N)$  を求める第一歩を踏み出すことである。

§3.  $N = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  の場合の  $\mathcal{H}^1(N)$  の計算

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  の座標関数  $x, y, z$  を次のように選べる：

$$\{x, y\} = -z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y.$$

従って,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  上の linear Poisson structure  $\psi$  は,

$$\psi = -z \partial_x \wedge \partial_y + x \partial_y \wedge \partial_z + y \partial_z \wedge \partial_x$$

で与えられる。Lie 群  $SL(2, \mathbb{R})$  の  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  上への coadjoint action によって, coadjoint orbits は、原点, 回転 2 葉双曲面, 回転 1 葉双曲面及び  $u$  cone に別れる。また, Casimir function は,  $g(x^2 + y^2 - z^2)$  の形全体である。

§1 で定義した  $\mathcal{L}$  の 2 つの subalgebras を定義する。

$$\mathcal{J} = \{X \in \mathcal{L} \mid X \text{ は各点で symplectic leaf に接する}\},$$

$$\mathcal{H} = \{X_f \mid f \in C^\infty(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*)\}.$$

この時、明らかに次の包含関係が成り立つ:

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{J} \supset \mathcal{H}.$$

これらの 3 つの Lie algebras が本当に異なることの実例は、文献 [1] を見てもらいたい。これからの目標は勿論、 $\mathcal{H}'(\mathcal{N}) = \mathcal{L}/\mathcal{H}$  の計算である。

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$  を  $\mathbb{R}^3$  と同一視し,  $(\mathbb{R}^3, \psi)$  を linear Poisson manifold と考え、 $\mathbb{R}^3$  上の formal vector fields で  $\psi$  を不変にするもの全体を  $\mathcal{L}$  とする。即ち,  $\mathcal{L} = \{X: \text{formal vector fields} \mid \mathcal{L}(X)\psi = 0\}$ .  $\mathbb{R}^3$  上の formal functions の空間を  $F(\mathfrak{g})$  (i.e.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ) とすると,  $\mathcal{L} \subset F(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^*$  である。ここで  $\mathfrak{g}^*$  の basis は、 $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$  と見做している。また,  $\mathcal{H} = \{X_f \mid \tilde{f} \in F(\mathfrak{g})\}$  と

おくと  $L \supset H$  が成り立つ。

一般に、有限次元 Lie algebra  $\mathfrak{g} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  について、 $\mathfrak{g}$  の  $F(\mathfrak{g})$  への表現  $\rho$  を

$$(*) \quad \rho(x_i) \tilde{f} = \sum_{j,k} C_{ij}^k x_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

とすると、 $\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} C_{ij}^k x_k \partial x_i \wedge \partial x_j$  という linear Poisson structure に対して、次の系列の中で、 $\partial_0$  は  $\tilde{f} \mapsto X_{\tilde{f}}$  であり、また、 $\partial_1$  は、 $\eta \mapsto \mathcal{L}(\eta)\psi$  と一致する。

$$F(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\partial_0} F(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\partial_1} F(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^2 \mathfrak{g}^* \longrightarrow$$

$$\text{但し, } (\partial_0 \alpha)(\xi_1) = \rho(\xi_1)(\alpha),$$

$$(\partial_1 \beta)(\xi_1 \wedge \xi_2) = \rho(\xi_1)(\beta(\xi_2)) - \rho(\xi_2)(\beta(\xi_1)) - \beta([\xi_1, \xi_2]).$$

有限次元ベクトル空間  $V$  への  $\mathfrak{g}$  の表現において、 $\mathfrak{g}$  が半単純ならば  $H^1(\mathfrak{g}, (V, \rho)) = 0$  となることは良く知られている所であるが、(\*)式で定義した  $\rho$  は、 $F(\mathfrak{g})$  の grading を保っているため、無限次元の  $F(\mathfrak{g})$  に対しても、 $\mathfrak{g}$  が半単純ならば、 $H^1(\mathfrak{g}, (F(\mathfrak{g}), \rho)) = 0$  が成り立つのである。

さて、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  の場合に戻ると、上の注意から、我々の場合、 $L = H$  を得る。E. Borel は、 $C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow F(\mathfrak{g})$  が onto であることを示した。このことから  $\mathcal{H} \rightarrow H$  が onto であることがわかり、従って、 $\mathcal{L} \rightarrow H = L$  も onto となる。

今後、この linear map を  $T$  と書き、 $\text{Ker } T = \mathcal{L}'$  とする。

( $\mathcal{L}'$  は  $\mathcal{L}$  の ideal になる。) 以上の記号のもとでいくつもの

補題を証明しよう。

補題 1. (i)  $\mathcal{L} \ni X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = xg_y - yg_x + zh_x + xh_z, \\ g = yf_x - xf_y + zh_y + yh_z, \\ h = zf_x + xf_z + zg_y + yg_z. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot \operatorname{div} X = (xf + yg - zh)_x, \\ y \cdot \operatorname{div} X = (xf + yg - zh)_y, \\ z \cdot \operatorname{div} X = -(xf + yg - zh)_z \end{cases}$$

$$\text{但し, } \operatorname{div} X = f_x + g_y + h_z.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ある } \varphi \in C^\infty \text{ が存在して,} \\ xf + yg - zh = \varphi(x^2 + y^2 - z^2), \\ \operatorname{div} X = 2\varphi'(x^2 + y^2 - z^2). \end{cases}$$

(ii)  $\mathcal{J} \ni X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xf + yg - zh = 0, \\ \operatorname{div} X = 0. \end{cases}$$

補題 2. 1変数の  $C^\infty$ -関数  $\alpha(t), \beta(t)$  が  $\int_0^\infty \alpha = 0$ ,

$\int_0^\infty \beta = 0$  をみたすとある。このとき,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \alpha(t), & t > 0, \end{cases} \quad s(t) = \begin{cases} \beta(t), & t \leq 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$



とすると,  $m(t), s(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  であって, 次の vector fields  $X_1, X_2$  は  $\mathcal{L}'$  に属する:

$$X_1 = \frac{x \cdot m(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2} \partial_x + \frac{y \cdot m(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2} \partial_y,$$

$$X_2 = \frac{y \cdot s(x^2 + y^2 - z^2)}{y^2 - z^2} \partial_y + \frac{z \cdot s(x^2 + y^2 - z^2)}{y^2 - z^2} \partial_z.$$

以上の補題は、いずれも直接計算によって簡単に確かめられる。

補題 3. (i)  $\mathcal{L} = \mathcal{H} + \mathcal{L}'$ .

(ii)  $\mathcal{L}/\mathcal{H} \cong \mathcal{L}'/\mathcal{L}' \cap \mathcal{H}$ .

(証明) (i)  $\mathcal{L}$  の任意の元  $X$  に対して, ( $\mathcal{L} = \mathcal{H}$  だから) ある  $Y \in \mathcal{H}$  が存在して,  $T(X) = T(Y)$  が成り立つ。よって,  $X - Y \in \mathcal{L}'$ . (ii) は (i) から明らか。■

$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' = \{ \varphi \mid j_0^\infty \varphi = 0 \}$  とするとき, 次の成り立つ。

補題 4. 補題 1 で定まる写像  $A: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  ( $X \mapsto \varphi$ )

によって,  $A(\mathcal{L}') \subset \mathcal{C}'$  で  $A|_{\mathcal{L}'}: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{C}'$  は onto.

(証明)  $X = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$  が  $\mathcal{L}'$  の元であれば,  $f, g, h$  は、原点で flat である。  $xf + yg - zh = \varphi(x^2 + y^2 - z^2)$

$= F(x, y, z)$  とおくと、 $\frac{\partial^{2k} F}{\partial x^{2k}}(0, 0, 0) = 0$  より  $\varphi^{(k)}(0) = 0$  が従う。

よって  $\varphi(t) \in \mathcal{C}'$  を得る。逆に、 $\varphi(t) \in \mathcal{C}'$  に対して、

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \varphi(t), & t > 0, \end{cases} \quad s(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leq 0, \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

とおくと  $m(t), s(t)$  は  $C^\infty$ -関数で、補題 2 のように  $X_1, X_2$  を定めると、

$$X = X_1 + X_2 = \frac{x \cdot m(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2} \partial_x + \left( \frac{y \cdot m(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2} + \frac{y \cdot s(x^2 + y^2 - z^2)}{y^2 - z^2} \right) \partial_y + \frac{z \cdot s(x^2 + y^2 - z^2)}{y^2 - z^2} \partial_z$$

とおくと、 $X \in \mathcal{L}'$  で  $A(X) = \varphi$  となる。■

$\text{Ker}(A|_{\mathcal{L}'} = \mathcal{L}' \cap \mathcal{J}$  であるから、補題 4 より、

$\mathcal{L}' / \mathcal{L}' \cap \mathcal{J} \cong \mathcal{C}'$  となる。従って、

$$(**) (\mathcal{L}' / \mathcal{L}' \cap \mathcal{K}) / (\mathcal{L}' \cap \mathcal{J} / \mathcal{L}' \cap \mathcal{K}) \cong \mathcal{L}' / \mathcal{L}' \cap \mathcal{J} \cong \mathcal{C}'$$

であるから、あとは、 $\mathcal{L}' \cap \mathcal{J} / \mathcal{L}' \cap \mathcal{K}$  の構造を明らかにすればよいことになった。よって次の線型写像  $B$  を考えよう。

$$B: \begin{array}{ccc} \mathcal{L}' \cap \mathcal{J} & \longrightarrow & H^1(\mathcal{F}, \mathbb{R}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \longrightarrow & [i(X)\omega]. \end{array}$$

ここで  $\mathcal{F}$  は、(任意の) 回転 1 葉双曲面で、 $\omega$  はその上の symplectic form である。 $\mathcal{L}' \cap \mathcal{J} \ni X$  について  $[i(X)\omega]$  が、 $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{R})$  の generator になるかどうかは、回転 1 葉双曲面

字の取り方はよらないことを注意しておく。  $B$  は onto で  $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  であるから、  $\mathcal{L}' \cap \text{Ker } B \cong \mathbb{R}$  となる。また、  $\text{Ker } B \supset \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}$  は明らかであるから逆を示そう。

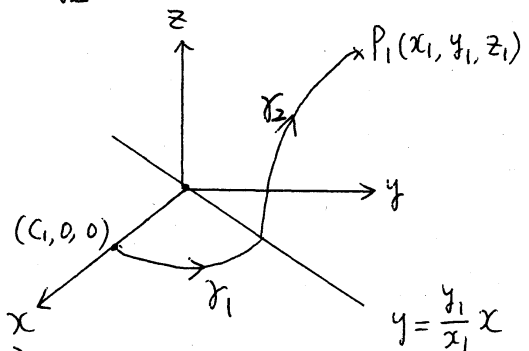
イ) 点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  が  $x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = c_1^2$  ( $c_1 > 0$ ) を満たす場合には、

$$F(x_1, y_1, z_1) = - \left( \int_{\gamma_1} i(X)\omega + \int_{\gamma_2} i(X)\omega \right)$$

と定義する。 leaf  $\mathcal{F}_1$  に沿って

上記の積分で  $F$  を定めるが、

$X \in \text{Ker } B$  だから  $F$  は  $\mathcal{F}_1$  上の path の取り方によらず well-defined である。

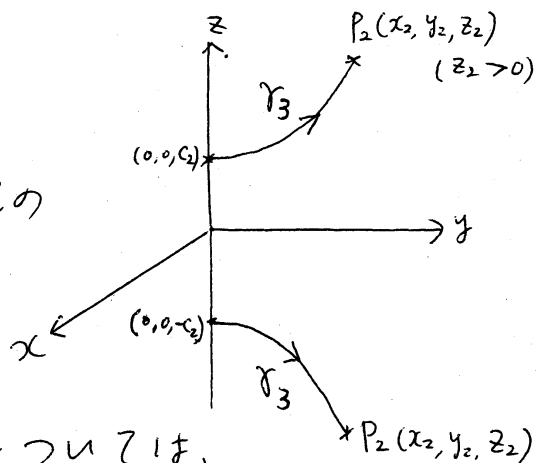


ロ) 点  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  が  $x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 = -c_2^2$  ( $c_2 > 0$ ) を満たす場合には、

$$F(x_2, y_2, z_2) = - \int_{\gamma_3} i(X)\omega$$

と定義する。 leaf  $\mathcal{F}_2$  に沿う上記の

積分は、  $\mathcal{F}_2$  が単連結だから well-defined である。



ハ) cone 上の点  $P(u, v, w)$  について、

$$F(u, v, w) = \lim_{P_1 \rightarrow P} F(P_1) = \lim_{P_2 \rightarrow P} F(P_2)$$

( $P_1$  は一葉双曲面上の点)

( $P_2$  は二葉双曲面上の点)

とすると、特に、二番目の等号も成り立ち、  $F(u, v, w)$  が確定

する。cone上の各点で、今、定義した関数の可微分性を証明することば、少々面倒であるが、ともかく、このFが求めるもの、即ち、 $X \in \text{Ker } B$ であれば、 $X = X_F$ が結論される。従って、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ についての $\mathcal{H}^1(N)$ に関する最終定理は次のようにまとめられる:

$$\text{定理. } \mathcal{H}^1(N) / \mathbb{R} \cong \mathbb{C}.$$

### 文献表

- [1] N. Nakanishi, On the structure of infinitesimal automorphisms of linear Poisson manifolds I, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 31, No. 1, (1991), 71-82.
- [2] N. Nakanishi, On the structure of infinitesimal automorphisms of linear Poisson manifolds II, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 31, No. 1, (1991), 281-287.
- [3] I. Vaisman, Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40, 4 (1990), 951-963.
- [4] Yu. M. Vorob'ev and M. V. Karasov, Poisson manifolds and the Schouten bracket, Functional Analysis and its Applications, Vol. 22, No. 1 (1988), 1-9
- [5] P. Xu, Poisson cohomology of regular Poisson manifolds, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 4 (1992), 967-988.