数理解析研究所講究録
第 877 巻 1994 年 101-113

正標数のリー環の表現とその量子化

Representations of Lie algebras in positive characteristic
and their quantum analogue

筑波大数系 竹内光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

Abstract. This gives a survey on representation theory of Lie algebras in positive characteristic due to Zassenhaus and Rudakov and its quantization due to Kac and DeConcini.

量子群が'発見'されて10年近くになる. Drinfeld [Dr] は

「量子群とは,ホップ代数のことなり」

と宣言した。ふだん,余り意識に上らないが,有限群,リー群,代数群など'群論'の研究対象には,ある'可換性'が付随している。これは,アーベル群のいみの可換性ではない. この可換性は,次のようにホップ代数の枠組で考えると明らかになる.

「代数群とは,可換ホップ代数のことなり」

「リー環とは,既約余可換ホップ代数のことなり」

代数群は, Hochschild [Ho], Waterhouse [W] などを例外として, ホップ代数を余り意識しないで研究されて来た。標数0でのリー環と代数群の対応を正標数に拡張する時,ホップ代数は本質的である (Diedonné [Di], 私 [T1], 柳原 [Y] らによる

'超代数'の研究).

そもそもホップ代数は，位相幾何の分野でH. Hopfにより導入された概念で，それは次数つきのものであった．その代数的理論は，Milnor-Moore[MM]に集大成されたが，そのpreprintが出回っていた当時，版が改められる毎に記述が不透明に分りづらくなった，という動機から，Sweedler[Sw]は次数つきでないホップ代数の研究をはじめたと言われる．その時彼の念頭に，'群論の非可換化'としてのホップ代数論があった事は疑いない．私を含め，彼から影響を受けた研究者達は，そう受取って，群論の諸結果をホップ代数に拡張する方向で努力して来た．その端的な例がガロア理論である．群論に基くガロア理論をホップ代数に拡張する試みは，Chase-Sweedler[CS]に始り，土井，Schneider，Montgomery，増岡らにより活発に研究されつつあり，現時点までの成果は，Montgomery[Mo]にまとめられている．また代数群に基く，線形微分方程式のガロア理論—Picard-Vessiot理論—(Kaplansky[K]はその読み易い入門書である)も，ホップ代数をexplicitに用いる事により明快に理解される[T2].

つまり，'群論の非可換化'としてのホップ代数は，すでに60年代末から研究されて来た事で，Drinfeldらがはじめたように受取るのは誤りである．量子群の意義は，そのような一般的

思想ではなく，Drinfeldと神保の見出した量子包絡環$U_q(\mathfrak{g})$，量子GL群$GL_q(n)$等の具体的構成，及びその統計物理，結び目理論，共形場等多くの今日的分野との結びつきにある．いわば量子群'前史'として，非可換群論＝ホップ代数の歴史があり，それは実例の乏しさと，初等的に証明できる群論のスタンダードな諸結果（たとえばLagrangeの定理）さえ非可換化には多大の技術的困難が伴う事実（[Mo]オ3章のNichols-Zoellerの定理をみよ）に，長く苦しめられていた．そうした状況に突如出現した量子群とは，非可換な群の中でも，可換に近い比較的に取扱い易い一群のホップ代数の導入であり，より具体的には'リー理論の非可換化'という意味をもつ．これはKacとMoodyのはじめた，'リー理論の無限次元化'と対をなす．

要約すると，群論一般の非可換化としてのホップ代数の研究は60年代末に始り，ガロア理論の拡張，超代数の代数群への応用などに一応の成果をあげる中で，Kac-Moody代数にみられる，リー理論の一般化の影響の下に，リー理論と非可換群論の結びつきとして，量子群が80年代半ばに誕生した，という事ができる．

量子群の，大変読み易い入門書である神保[Ji]においても，この結びつきは顕著である．Lusztigは在来のリー理論を量子群に拡張する方向で，一連の仕事をしている（[L]中の文献

参照）．Andersen-Polo-Wen [APW] と Parshall-Wang [PW] は，代数群の誘導表現のコホモロジーに関する，Kempf, Demazure, Serre らの結果 [Ja] を，量子群に拡張する事を意図している．しかし，根底にある幾何を非可換化すること（Manin [Ma] 参照）が困難であるという，技法的制約のため，かなり不満足な結果に終っている．

最近では，単に既成のリー理論を量子群に拡張するにとどまらず，Kazhdan-Lusztig 予想をめぐる諸問題 [De][Ha]，結晶基に関する柏原の一連の仕事（[L] 所載）にみられるように，リー理論自体が，量子群を視野に取込んで内容を深めつつあるように思われる．

私が今度の研究集会で取上げた DeConcini-Kac [DK] の仕事は，正標数のリー環の表現に関する Zassenhaus [Z] と Rudakov [R] の結果を，1 の巾根における量子群の表現に拡張したものである．これらを読み比べる時，技術一辺倒の [DK] の味気なさと息苦しさに対し，Rudakov [R] にみられる自然な idea の流れは心地よく，その両者に共通の理論的基盤を用意する Zassenhaus [Z] は，今の時点から見ても新鮮で，感動すら覚える．以下では，主に [Z] と [R] の要点を，私なりに整理して述べ，[DK] との関係には，ごく簡単に触れるに留めたい．

1. Zassenhaus 理論[Z]

Aを代数閉体k上の代数とする．Aは，次の程度に'大きい'中心Zをもつと仮定する．

(1) Aは有限Z加群で，Zは有限生成k代数である．

Aの，すべての，k上の有限次元既約表現の同値類の集合をRep Aとする．もし$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)$が有限次元既約表現ならば，Schurの補題により，Zの像$\rho(Z)$はスカラーkである．ρに$\rho|_Z$を対応させる事により，集合Rep Aは代数多様体

$$\mathrm{Spec}\, Z = (\text{すべての}\ k\ \text{代数射}: Z \to k)$$

によりパラメトライズされる：

$$\pi : \mathrm{Rep}\, A \to \mathrm{Spec}\, Z,\ \pi(\rho) = \rho|_Z .$$

kの標数が$p > 0$の時，Zassenhausは，有限次元リー代数Lの普遍包絡環$A = U(L)$が上の(1)と次の(2),(3)を満足する事を示した．

(2) Zは整域である．$Q(Z)$をその商体とすると，$Q(A) = Q(Z)\otimes_Z A$は$Q(Z)$上のcentral division代数である．

(3) Zは整閉整域で，Aは$Q(A)$における極大整環である．

極大整環とは，$z \neq 0 \in Z$の時，$A \subset B \subset z^{-1}A$なる部分環BはAに限る事をいみする．(2)の下で，$[Q(A) : Q(Z)] = m^2$と表せ，さらに(3)の下で，AはZ上m次の最小多項式をもち，Spec Zは正規代数多様体になる．$A = U(L)$の場合，この多様

体の次元は$\dim L$に等しく，また数mはpの巾である．

Zassenhausは次の定理を$A=U(L)$に対し示した．これは，一般に(1)〜(3)を満足するk代数Aに対し成立つ．

<u>Thm</u>．次の条件を満す，properな閉集合$D\subset \mathrm{Spec}\, Z$が一意的に存在する．$\mathfrak{p}$を$\mathrm{Spec}\, Z$の点とする．

$\mathfrak{p}\notin D$ならば，$\pi^{-1}(\mathfrak{p})$は唯一つの既約表現からなり，その次数はmに等しい．

$\mathfrak{p}\in D$ならば，$\pi^{-1}(\mathfrak{p})$は有限個の既約表現からなり，その次数はどれもmより小さい．

DはAのZ上の最小多項式を用いて記述でき，discriminant部分多様体とよばれる．

<u>例</u>（Rudakov-Shafarevich [RS]）．
$p>2$，$L=\mathfrak{sl}_2$とする．このとき可換k代数Zは生成元x,y,z,tと次の基本関係式による表示をもつ．

$$4xy+z^2=\prod_{i=0}^{p-1}(t-i^2).$$

この座標により，$\mathrm{Spec}\, Z$は$\frac{p-1}{2}$個の特異点

$$(0,0,0,i^2),\quad i=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}$$

をもつが，Dはその集合と一致する．$m=p$であり，$(0,0,0,i^2)$のファイバーはi次と$p-i$次の2つの既約表現からなる．

次数がmより小さい既約表現を特異表現とよぶ事にすると，この例は，既約表現の特異性と，多様体$\mathrm{Spec}\, Z$の特異性の結

びつきを示唆する．

2．Rudakov理論[R]

Rudakovは半単純型のリー環Lに対し，具体的に表示する事の困難なZ（$U(L)$の中心）をその主要部分Z_0でおきかえたパラメトリゼーションを用いて，既約表現の次数の最大値mを決定し，表現の特異性の判定条件を得た．

複素半単純リー環Lから出発する．Lは自然なChevalley form $L_{\mathbb{Z}}$をもつ[Se, p51]．kを標数$p>0$の閉体として$L_k = k\otimes_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}}$とおき，Rep $U(L_k)$をRep L_kと記す．次を仮定する：

（仮定）L_kのKilling formは非退化である．

又は非退化な不変形式が存在すればよい．Lのカルタン部分環をとり，Δをそのルート系とし，単純ルート$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$（$n$＝Lのランク）を選び，$\Delta^{\pm}$を対応する正負のルート系とする．$L_k$はk上の基底$H_1, \cdots, H_n$（$H_i = H_{\alpha_i}$），$X_\alpha$，$\alpha\in\Delta$をもつ[Se]．$H_i^p - H_i$と$X_\alpha^p$は$U(L_k)$の中心Zに属する．これらの生成するZの部分代数を$Z_0$とおく（dim L変数の多項式環）．Zの代りに$Z_0$を用いてパラメトライズする：

$$\pi : \mathrm{Rep}\, L_k \longrightarrow \mathrm{Spec}\, Z_0$$

L_kの既約表現ρについて

$\forall \alpha\in\Delta^+$, $\rho(X_\alpha^p) = 0$のときρを三角型，

$\forall \alpha\in\Delta$；$\rho(X_\alpha^p) = 0$のときρを対角型

とよぶ事にする．リー環L_kの自己同形群$G=\mathrm{Aut}(L_k)$は集合$\mathrm{Rep}\,L_k$に自然に作用する．$\mathrm{Rep}_{tri}L_k$と$\mathrm{Rep}_{diag}L_k$をそれぞれ，三角型，対角型の既約表現の類の集合とする．Rudakovはこの作用の下で

$$\mathrm{Rep}\,L_k = G\cdot\mathrm{Rep}_{tri}L_k$$

が成立つ事を示した．これにより考察を三角型表現に限定する事が許される．

次のペア(V,v)を考える．Vは既約L_k加群，$v\neq 0$はVのウェイトベクトル（i.e., kvが$H_1,\cdots,H_n$の作用で不変）かつ$\forall\alpha\in\Delta^+$, $X_\alpha\cdot v=0$．つまりvはVの最高ウェイトベクトルである．このようなvがあれば，Vは必然的に三角型である．ペア(V,v)の同形類の集合を$\widetilde{\mathrm{Rep}}\,L_k$と表そう．$Z^-$を$X_\alpha^p$, $\alpha\in\Delta^-$の生成するZの部分代数とする．kvはZ^-と$H_1,\cdots,H_n$の作用の下で不変であるから，ある代数射$Z^-\otimes k[H_1,\cdots,H_n]\to k$が決ることになる．この代数射を$\tilde{\pi}(V,v)$と記すと，次の可換図形が得られる：

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathrm{Rep}}\,L_k & \xrightarrow{\quad\tilde{\pi}\quad} & \mathrm{Spec}\,Z^-\times\mathrm{Spec}\,k[H_1,\cdots,H_n] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Rep}_{tri}L_k & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & \mathrm{Spec}\,Z^-\times\mathrm{Spec}\,k[H_i^p-H_i\,(1\leq i\leq n)]
\end{array}$$

タテの↓は自然な射影である．この図形の4つの矢印はすべて全射である．

$N=|\Delta^+|$ とおく．$\mathrm{Spec}\,Z\times\mathrm{Spec}\,k[H_1,\cdots,H_n]$ の元 (φ,λ) に対し，p^N 次元のある Verma 型の L_k 加群で，weight λ の最高 weight ベクトル v で生成され，かつ Z が kv に φ を通して作用するものが一意的に構成される．この加群を $M(\varphi,\lambda)$ とする．$\tilde{\pi}$ のファイバー $\tilde{\pi}^{-1}(\varphi,\lambda)$ は，$M(\varphi,\lambda)$ のすべての既約商加群からなる．この事から，群 G の作用をも考慮に入れて，$m\leqq p^N$ なる事が分る．

この考察を対角型既約表現に制限してみる．前頁の図は次のように簡単になる．

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathrm{Rep}}_{diag}\,L_k & \xrightarrow{\ \tilde{\pi}\ } & \mathrm{Spec}\,k[H_1,\cdots,H_n] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Rep}_{diag}\,L_k & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathrm{Spec}\,k[H_i^p-H_i\ (1\leqq i\leqq n)]
\end{array}$$

Rudakov の主結果は次の２つに要約される．

<u>Prop.</u> この図の左の矢印↓と $\tilde{\pi}$ は全単射である．

<u>Thm.</u> すべての正ルートの和の $\frac{1}{2}$ を ρ とする．$\mathrm{Spec}\,k[H_1,\cdots,H_n]$ の元 λ に対し，次が成立つ．

$$M(0,\lambda)\ \text{が既約加群} \Longleftrightarrow \forall\alpha\in\Delta^+,\ \left(\lambda(H_\alpha)+\rho(H_\alpha)\right)^{p-1}\neq 1.$$

この結果は，上の図に現れる被覆写像 π が，右の p^n 重被覆と完全に同一視できる事を主張し，次に正則な（つまり p^N 次元の）対角型既約表現の全体を，開部分多様体（これが $\emptyset$ でない事は，$\lambda=-\rho$ とおけば分る）として具体的に表示する．

とくに $m=p^N$ である事が従う．

3．量子化

L を複素半単純リー環，$q\in\mathbb{C}$ を1の原始 ℓ 乗根とする．Kac-DeConcini [DK]は，まず q をパラメータとする $\mathbb{C}$ 上の量子包絡環 $A=U_q(L)$ が(1)〜(3)を満す事を示した．これにより1.に述べたZassenhaus理論を適用する事ができる．

例．$A=U_q(sl_2)$．これは生成元 K, K^{-1}, E, F と次の関係式

$$KEK^{-1}=q^2E,\ KFK^{-1}=q^{-2}F,\ [E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．簡単のため ℓ を奇数とする．A の中心 Z は

$$x=E^\ell,\ y=F^\ell,\ z^\pm=K^{\pm\ell},\ t=FE+\frac{qK+q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

で生成され，次の基本関係式をもつ．

$$xy+\frac{z+z^{-1}-2}{(q-q^{-1})^{2\ell}}=\prod_{i=0}^{\ell-1}\left(t-\frac{q^i+q^{-i}}{(q-q^{-1})^2}\right)$$

この座標に関して，多様体 Spec Z は $\ell-1$ 個の特異点

$$\left(0,0,\pm1,\frac{\pm q^i\pm q^{-i}}{(q-q^{-1})^2}\right),\ i=1,2,\cdots,\frac{\ell-1}{2}$$

をもち，この集合が D に一致する．$m=\ell$ であり，この特異点でのファイバーは，i 次と $\ell-i$ 次の2個の既約表現からなる．従って，この例は1.のRudakov-Shafarevichの例の完全な量子アナログになっている．

ついで彼らは，Rudakov 理論をmodify L，ℓ が奇数の時，

$m=\ell^N$である事を示した．その際，$G=\mathrm{Aut}(L_k)$に相当するものの構成が大変厄介であり（彼らはそれをquantum coadjoint actionとよんでいる）ある種の収束を伴う解析的なideaを必要とする．ℓが偶数の時はまだうまく行っていないようである．$M(0,\lambda)$の既約性の判定条件も量子化されるが，Rudakovのそれと比べて若干こみ入った形を取る．

文　　献

[APW] H.Andersen, P.Polo, Wen K., Representations of quantum algebras, Invent. math. 104(1991), 1-59.

[CS] S.Chase and M.Sweedler, Hopf algebras and Galois theory, L.N. in Math. 97, Springer 1969.

[De] V.Deodhar, ed., Kazhdan-Lusztig theory and related topics, Contemp. Math. 139, A.M.S. 1992.

[Di] J.Dieudonné, Introduction to the theory of formal groups, Marcel Dekker 1973.

[DK] C.DeConcini and V.Kac, Representations of quantum groups at roots of 1, Progress in Math. 92, Birkhäuser 1990, 471-506.

[Dr] V.Drinfeld, Quantum groups, Proc. ICM Berkeley 1(1986), 789-820.

[Ha] W.Haboush, ed., Algebraic groups and their generalizations, Proc. Symp. in Pure Math., AMS, to appear.

[Ho] G.Hochschild, Introduction to affine algebraic groups, Holden-Day 1971.

[Ja] J.Jantzen, Representation theory of algebraic groups, Academic Press, 1987.

[Ji] 神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガー現代数学シリーズ，1990.

[K] I.Kaplansky, An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.

[L] G.Lusztig, Introduction to quantum groups, Progress in Math. 110, Birkhäuser 1993.

[Ma] Y.Manin, Topics in noncommutative geometry, Princeton U. Press, 1991.

[MM] J.Milnor and J.Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. Math. 81(1965), 211-264.

[Mo] S.Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regn. Conf. Ser. in Math. 82, AMS 1993.

[PW] B.Parshall and J.Wang, Quantum linear groups, Memiors 439, AMS 1991.

[R] A.Rudakov, On representations of classical semisimple Lie algebras of characteristic p, Math. USSR-Izv. 34(1970), 741-749.

[RS] A.Rudakov and I.Shafarevich, Irreducible representations of a simple three-dimensional Lie algebra over a field of finite characteristic, Math. Notes Acad. Sci. USSR, Vol.2(1967), 760-767.

[Se] J.Serre, Complex semisimple Lie algebras, Springer 1987.

[Sw] M.Sweedler, Hopf algebras, Benjamin 1969.

[T1] M.Takeuchi, Tangent coalgebras and hyperalgebras I, Japan. J. Math. 42(1974), 1-143.

[T2] M.Takeuchi, A Hopf algebraic approach to the Picard-Vessiot theory, J. Algebra 122(1989), 481-509.

[W] W.Waterhouse, Introduction to affine algebraic group schemes, Graduate texts in math. 66, Springer 1979.

[Y] H.Yanagihara, Theory of Hopf algebras attached to group schemes, L.N. in Math. 614, Springer 1977.

[Z] H.Zassenhaus, The representations of Lie algebras of prime characteristic, Proc. Glasgow Math. Assoc. 2(1954), 1-36.