

## 無限区間における補間についての考察

緒方秀教 杉原正顯 (Hidenori Ogata, Masaaki Sugihara)  
東京大学工学部物理工学科

### 1 はじめに

未知関数  $f(x)$  の値の推定法として、Lagrange 補間は古くから広く用いられている。これは、実験などによりあらかじめ関数値が分かっている有限個の標本点  $a_1, a_2, \dots, a_N$  において関数値が一致するような多項式を構成する、という手法である。これは関数近似の方法の一つであるのみならず、数値積分など様々な数値計算法の理論的基礎を与える。

ここでは Lagrange 補間の自然な拡張として、標本点が全無限区間上に無限個分布するような補間公式を考える。Lagrange 補間の場合、もとの関数  $f(x)$  に対する補間関数は多項式であったが、標本点数が無限個となる拡張公式においては、補間関数は整関数、すなわち、複素関数とみなした場合全複素平面で正則となる関数になる。

例の一つとして、標本点が等間隔の場合の補間公式が、Stenger らによる Sinc 近似 [3],[5],[6] に一致することを示す<sup>1</sup>。また、Bessel 関数の零点を標本点に用いた補間公式も提案する。

誤差解析はとくに実軸全体の近傍で正則な関数  $f(x)$  に対して行なわれ、「標本点密度」に対し誤差が指数関数的に減少することが示される。

### 2 無限区間における補間公式

未知関数  $f(x)$  に対する  $N$  点 Lagrange 補間多項式  $L_N f(x)$  は、標本点を  $a_1, a_2, \dots, a_N$  として、

$$(2.1a) \quad L_N f(x) = \sum_{k=1}^N f(a_k) \frac{W_N(x)}{(x - a_k) W_N'(a_k)}$$

$$(2.1b) \quad W_N(x) = \prod_{k=1}^N (x - a_k)$$

と表される。ここで  $W_N'(x)$  は  $W_N(x)$  の 1 階導関数を表す。

いま、標本点数  $N \rightarrow \infty$  の極限を考える。ただし、標本点の分布の仕方に関して、今回はとくに次のような状況を仮定することにする。

標本点は実軸上正負対称にとることにする： $\dots, -a_2, -a_1, a_1, a_2, \dots$  (または  $\dots, -a_2, -a_1, 0, a_1, a_2$ )、ここで  $0 < a_1 < a_2 < \dots$ 。さらに標本点列  $\{\pm a_k\}$  は漸近的に等間隔に分布すると仮定する、すなわち、ある定数  $h > 0$  に対し、

$$(2.2) \quad a_k \sim kh \quad (k \rightarrow \infty)$$

であるとする。

<sup>1</sup>この事実は高橋秀俊先生が既に、1975 年 [8] において指摘されている。しかし、Sinc 近似の理論が発展したのは、ここ 10 年くらいの間であるためか、この事実は現在あまりよく認識されていないようであるので、再度指摘することにする。

このとき、無限積で定義された関数

$$(2.3) \quad W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{a_k} \right)^2 \right\}, \quad \left( \text{または } x \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{a_k} \right)^2 \right\} \right)$$

は、 $a_k$ の漸近的振舞いに関する仮定によって、 $\dots, -a_2, -a_1, a_1, a_2, \dots$  (または  $\dots, -a_2, -a_1, 0, a_1, a_2$ ) を零点に持つ整関数を表す。これは多項式  $W_N(x)$  の  $N \rightarrow \infty$  における極限と考えられる。

補間多項式  $L_N f(x)$  の  $N \rightarrow \infty$  における極限は、無限和で定義される関数

$$(2.4) \quad Lf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) \frac{W(x)}{(x-a_k)W'(a_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} f(-a_k) \frac{W(x)}{(x+a_k)W'(-a_k)}$$

(または、

$$(2.5) \quad Lf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) \frac{W(x)}{(x-a_k)W'(a_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} f(-a_k) \frac{W(x)}{(x+a_k)W'(-a_k)} + f(0) \frac{W(x)}{xW'(0)}$$

となる。標本点は全無限区間上に分布する。これが補間  $f(x) \approx Lf(x)$  を「無限区間における補間」と呼ぶ所以である。

ここでは、標本点が等間隔の場合： $\dots, -2h, -h, 0, h, 2h, \dots$  ( $h > 0$ )、および、標本点が0次Bessel関数の零点と同様に並んでいる場合： $\dots, -\frac{h}{\pi}j_{0,2}, -\frac{h}{\pi}j_{0,1}, \frac{h}{\pi}j_{0,1}, \frac{h}{\pi}j_{0,2}, \dots$  をとり上げる。前者の場合、 $W(x) = \frac{h}{\pi} \sin(\pi x/h)$  で、従来の Sinc 補間が得られる。後者の場合、 $W(x) = J_0(\pi x/h)$  であり、この補間公式を「Lagrange-Bessel 補間」と呼ぶことにする。

Lagrange 補間 (2.1a), (2.1b) の誤差は、関数  $f(x)$  が考えている区間の近傍で正則である場合、よく知られているように

$$(2.6) \quad f(x) - L_N f(x) = \frac{W_N(x)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-x)W_N(z)}$$

と複素積分表示できる (Fig. 2(a) 参照)。

無限区間における補間の誤差も同様に、 $f(x)$  が実軸全体の近傍で正則で、さらに  $|z| \rightarrow \infty$  における  $f(z)$  の減衰度に関するある条件を満たせば、実軸を囲む積分路  $\Gamma$  を用いて、

$$(2.7) \quad f(x) - Lf(x) = \frac{W(x)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-x)W(z)}$$

と複素積分表示が可能である (Fig. 2(b) 参照)。

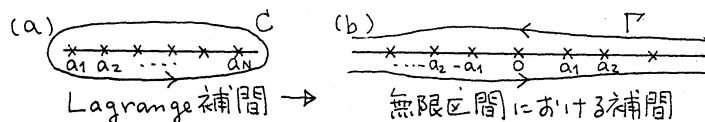


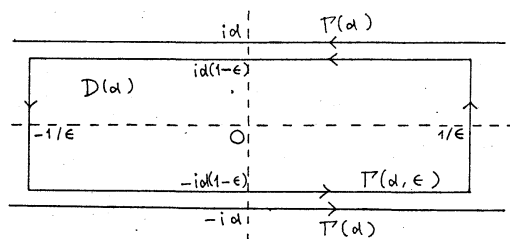
Fig. 1. 誤差の複素積分表示

無限区間における補間の場合、誤差は「標本点密度」 $1/h$  に対して評価するのが妥当と考えられる。かなり一般的条件下で上の積分 (2.7) を評価することにより、補間誤差は  $O[\exp(-c/h)]$  ( $c > 0$  は定数)、標本点密度に対し指数関数的に減少することが示される。

### 3 Sinc 補間

無限区間における補間の第一の例として、標本点が  $nh$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) と、等間隔  $h$  で分布する場合を考える。この場合  $W(x)$  は

$$(3.1) \quad W(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{kh} \right)^2 \right\} = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi x}{h} \right)$$

Fig. 2. 領域  $D(d)$  と積分路  $\Gamma(d), \Gamma(d, \epsilon)$ .

となる。このとき補間関数  $Lf(x)$  は

$$(3.2) \quad Lf(x) = C(f, h)(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) \frac{\sin[(\pi/h)(x - nh)]}{(\pi/h)(x - nh)}$$

と得られる。これは Sinc 補間、もしくは Whittaker Cardinal 関数と呼ばれる。

この補間は数値積分、微分方程式など様々な数値計算の分野に応用されている [3], [4], [5]。

Sinc 補間の誤差については、次の定理が知られている [3], [5], [6]。

**定理 3.1**  $f(z)$  は「帯状領域」

$$(3.3) \quad D(d) = \{ z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d \} \quad (d > 0)$$

で正則、かつ、

$$(3.4) \quad N(f, D(d)) \equiv \int_{\partial D(d)} |f(z)| |dz| < \infty,$$

を満たすとする。このとき、任意の実数  $x$  に対し、Sinc 補間の誤差は、次のような複素積分表示が可能である：

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f(x) - C(f, h)(x) &= \frac{\sin(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} \frac{f(z) dz}{(z-x) \sin(\pi z/h)} \\ &= \frac{\sin(\pi x/h)}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(t-ic)}{(t-ic-x) \sin[(\pi/h)(t-ic-x)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(t+ic)}{(t+ic-x) \sin[(\pi/h)(t+ic-x)]} \right\} dt, \end{aligned}$$

ただし、 $\Gamma(d)$  は Fig.2 に描いたような積分路である。そしてこれは次の不等式で評価される：

$$(3.6) \quad |f(x) - C(f, h)(x)| \leq \frac{N(f, D(d))}{2\pi d \sinh(\pi d/h)} = O \left[ \exp \left( -\frac{\pi d}{h} \right) \right].$$

**注意 3.1** 積分 (3.4) は広義積分であり、Fig.2 で示される積分路  $\Gamma(d, \epsilon)$  を用いて、

$$(3.7) \quad \int_{\partial D(d)} |f(z)| |dz| = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma(d, \epsilon)} |f(z)| |dz|$$

で定義する。以下同様である。

また、Sinc 補間が厳密な関数値を与える関数のクラスが知られている [5], [6]。

**定理 3.2**  $f(z)$  は指数型  $A(\leq \pi/h)$  の整関数<sup>2</sup>で、実軸上 2 乗可積分とする。このとき、任意の実数  $x$  に対し  $f(x) = C(f, h)(x)$  が成り立つ。

<sup>2</sup> an entire function of exponential type  $A$  の意味である。

#### 4 Lagrange-Bessel 補間

次の例として、標本点が $\dots, -\frac{h}{\pi}j_{0,2}, -\frac{h}{\pi}j_{0,1}, \frac{h}{\pi}j_{0,1}, \frac{h}{\pi}j_{0,2}, \dots$ 、と 0 次 Bessel 関数  $J_0(x)$  の零点と同様に並ぶ場合を考える。ただし  $h > 0$ 、 $j_{0k}$  は Bessel 関数  $J_0(x)$  の正の零点で、 $0 < j_{01} < j_{02} < \dots < j_{0k} < \dots$  とする。このとき、

$$(4.1) \quad W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left( \frac{\pi x}{hj_{0k}} \right)^2 \right\} = J_0(\pi x/h),$$

である。 $J'_\nu(x) = (\nu/x)J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$  より  $J'_0(j_{0k}) = J_1(j_{0k})$  に注意すれば、 $W'(\frac{h}{\pi}j_{0,k}) = J_1(j_{0,k})$  であるから、次のような補間公式の表現が得られる (Bessel 関数の性質については、例えば [2] を参照):

$$(4.2) \quad L_{\text{Bessel}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{hj_{0k}}{\pi}\right) \frac{-J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x - j_{0k}]J_1(j_{0k})} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{hj_{0k}}{\pi}\right) \frac{J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x + j_{0k}]J_1(j_{0k})}.$$

これを Lagrange-Bessel 補間と呼ぶことにする。

$$(4.3) \quad j_{0k} \sim \pi(k + \theta) \quad (\theta \text{ は定数})$$

であるから、標本点は漸近的に等間隔  $h$  で分布していることに注意せよ。

Lagrange-Bessel 補間の誤差は、Sinc 補間と同様、大雑把に言って実軸全体の近傍で解析的ならば、標本点密度  $1/h$  に対し指数関数的に減少する。

**定理 4.1**  $f(z)$  は帯状領域  $D(d)$  で正則、かつ、(3.4) を満たすとする。このとき Lagrange-Bessel 補間の誤差は、次のような複素積分表示が可能である:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f(x) - L_{\text{Bessel}}f(x) &= \frac{J_0(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} \frac{f(z)dz}{(z-x)J_0(\pi z/h)} \\ &= \frac{J_0(\pi x/h)}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(t-ic)}{(t-ic-x)J_0[(\pi/h)(t-ic)]} - \frac{f(t+ic)}{(t+ic-x)J_0[(\pi/h)(t+ic)]} \right\} dt \end{aligned}$$

また誤差は、 $h$  が十分小さいとき次の不等式で評価される:

$$(4.5) \quad |f(x) - L_{\text{Bessel}}f(x)| \leq C_d \left| J_0\left(\frac{\pi x}{h}\right) \right| N(f, D(d)) \exp\left(-\frac{\pi d}{h}\right),$$

ここで  $C_d$  は、 $d$  に依る正の定数である。

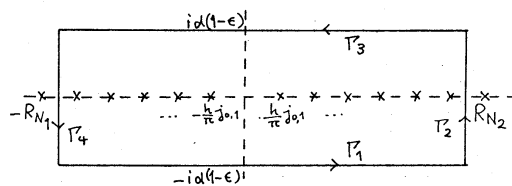
(証明) 基本的なアイデアは、Sinc 補間の場合と同様である。 $J_0$  の漸近評価に関する、次の結果を用いる:  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$  ( $\delta > 0$ ) において  $z \rightarrow \infty$  のとき、

$$(4.6) \quad J_0\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 z}} \cos\left[\frac{\pi}{h}\left(z - \frac{h}{4}\right)\right]$$

いま、実数  $R_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を

$$(4.7) \quad \frac{h}{\pi}j_{0k} < R_k < \frac{h}{\pi}j_{0,k+1}, \quad J_0\left(\frac{\pi}{h}R_k\right) \sim \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 R_k}} \quad (k \rightarrow \infty)$$

となるようにとる。 $J_0$  の漸近評価により、このような  $R_k$  をとることは可能である。そして複素平面上に Fig. 3 のように積分路  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  をとる。 $N_1, N_2$  は正の整数である。

Fig. 3. 定理 4.1 の証明に用いる積分路  $\Gamma$ 

複素積分

$$(4.8) \quad I(x) = \frac{J_0(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-x)J_0(\pi z/h)}$$

を考える。留数定理よりこの積分は

$$(4.9a) \quad I(x) = f(x) - (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x),$$

$$(4.9b) \quad (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x) = \sum_{k=1}^{N_2} f\left(\frac{h}{\pi} j_{0k}\right) \frac{-J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x - j_{0k}]J_1(j_{0k})} \\ + \sum_{k=1}^{N_1} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{0k}\right) \frac{J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x + j_{0k}]J_1(j_{0k})}$$

と表される。

 $\Gamma_2$  の積分への寄与を評価する。任意の  $\delta > 0$  に対し  $N_2$  を十分大きくとると、 $\Gamma_2$  上では

$$(4.10) \quad \left| J_0\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right|^{-1} \leq \left(\frac{2\pi^2}{h}\right)^{1/2} (1+\delta)(R_2^2 + d^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{\pi}{h} |\text{Im } z|\right) \\ \leq \left(\frac{2\pi^2}{h}\right)^{1/2} (1+\delta)(R_{N_2}^2 + d^2)^{1/4}$$

が成り立つから、積分は

$$(4.11) \quad \left| \int_{\Gamma_2} \frac{f(z) dz}{(z-x)J_0(\pi z/h)} \right| \leq \left(\frac{2\pi^2}{h}\right)^{1/2} (1+\delta) \frac{(R_{N_2}^2 + d^2)^{1/4}}{R_{N_2} - x} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} |f(R_{N_2} + iy)| dy$$

と押えられる。仮定より  $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} |f(R_{N_2} + iy)| dy \leq N(f, D(d))$  であるから、右辺は  $N_2 \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。 $\Gamma_4$  の寄与も同様の評価が成り立つ。ゆえに、(4.9a) で  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$  とすれば、 $\Gamma_2, \Gamma_4$  の寄与が消える。次に  $\Gamma_1, \Gamma_3$  の寄与の大きさを見積もる。まず、次の補題を用意する。証明は  $J_0(z)$  の Hankel による積分表示 [2] を用いて行なうことが出来る。補題 4.2 任意の  $\delta > 0$  に対し、 $\tilde{d} > 0$  を十分大きくとれば、 $|\text{Im } z| = \tilde{d}$  なる  $z$  に対し、

$$(4.12) \quad |J_0(z)| \geq \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi}|z|} \exp(-\tilde{d})$$

が成り立つ。

任意の  $\delta > 0$  に対し、 $(\pi d/h)(1-\epsilon)$  を十分大きく、すなわち、 $h$  を十分小さくとると、上の補題から  $\Gamma_1, \Gamma_3$  上

$$(4.13) \quad \left| J_0\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right|^{-1} \leq (1+\delta) \left(\frac{2\pi^2|z|}{h}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi d(1-\epsilon)}{h}\right)$$

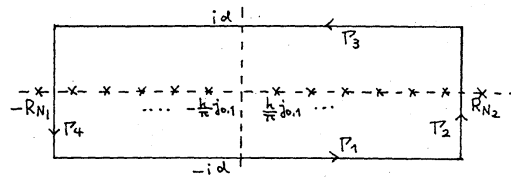


Fig. 4. 定理 4.3 の証明に用いる積分路  $\Gamma$

が成り立つ。これを用いると、

$$(4.14) \quad \left| \left( \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right) \frac{f(z) dz}{(z-x) J_0(\pi z/h)} \right| \leq (1+\delta) \sup_x \sup_t \frac{(t^2 + d^2(1-\epsilon)^2)^{1/4}}{[(t-x)^2 + d^2(1-\epsilon)^2]^{1/2}} \exp\left(-\frac{\pi}{h} d(1-\epsilon)\right) \left( \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right) |f(z)| |dz|$$

と押えられる。したがって、ここで  $\epsilon \downarrow 0$  としても積分は存在し、(4.4) が成立することが分かる。また、更に以上の評価により、不等式 (4.5) が成立することも分かる。 ■

Lagrange-Bessel 補間にも、補間が厳密な関数値を与える関数のクラスが存在する。

定理 4.3  $f(z)$  は指数型  $A (< \pi/h)$  の整関数で、

$$(4.15) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^{-1/2} f(x) = 0$$

を満たすとする。このとき、任意の実数  $x$  に対して、 $f(x) = L_{\text{Bessel}} f(x)$  が成り立つ。

(証明) 初めにつぎの補題を用意する (証明は [7] p. 391 と同様である):

補題 4.4 任意の  $\delta > 0$  に対し、 $g_\delta(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) なる関数  $g_\delta(x)$  が存在し、不等式

$$(4.16) \quad |f(z)| \leq g_\delta(|z|) |z|^{1/2} e^{(A+\delta)|\text{Im } z|}$$

が成立する。

いま、 $A + \delta < \pi/h$  となるように  $\delta$  をとる。

定理 4.1 の証明と同様に複素積分

$$(4.17) \quad I(x) = \frac{J_0(\pi x/h)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-x) J_0(\pi z/h)}$$

を考える (積分路  $\Gamma$  は Fig. 4 を参照)。

積分路  $\Gamma_3$  の寄与を評価する。

$d > 0$  を十分大きくとれば、 $\Gamma_3$  上  $g_\delta(|z|) \leq \epsilon$ , すなわち、

$$(4.18) \quad |f(z)| \leq \epsilon |z|^{1/2} \exp[(A + \delta)d]$$

が成り立ち、これと補題 4.2 を用いることにより、 $\Gamma_3$  上の積分は

$$(4.19) \quad \left| \int_{\Gamma_3} \frac{f(z) dz}{(z-x) J_0(\pi z/h)} \right| \leq (1+\delta) \epsilon \sup_t \frac{(t^2 + d^2)^{1/2}}{[(t-x)^2 + d^2]^{1/2}} \exp\left[\left(A + \delta - \frac{\pi}{h}\right)d\right] (R_{k_1} + R_{k_2})$$

と押さえられる。

$\Gamma_1$  の寄与も同様に評価される。

つぎに  $\Gamma_2$  の寄与を評価する。

$N_2$ を十分大きくとれば、 $\Gamma_2$ 上

$$(4.20) \quad |f(z)| \leq \epsilon(R_{k_2}^2 + d^2)^{1/4} \exp[(A + \delta)|\operatorname{Im} z|],$$

が成り立つ。虚軸に平行な直線上でも補題 4.2 と同様の評価が成立し、

$$(4.21) \quad \left| \int_{\Gamma_2} \frac{f(z) dz}{(z-x)J_0(\pi z/h)} \right| \leq \frac{(R_{N_2}^2 + d^2)^{1/2}}{R_{N_2} - x} \left( \frac{2\pi^2}{h} \right)^{1/2} \epsilon(1 + \delta) \int_{-d}^d \exp \left[ \left( A + \delta - \frac{\pi}{h} \right) |s| \right] ds \\ \leq \frac{2(2\pi^2/h)^{1/2} \epsilon(1 + \delta) (R_{N_2}^2 + d^2)^{1/2}}{\pi/h - A - \delta} \frac{1}{R_{N_2} - x}$$

と押さえられる。

$\Gamma_4$ の寄与も同様に押さえられる。

以上をまとめて、

$$(4.22) \quad |I(x)| = \left| f(x) - (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x) \right| \\ \leq \frac{|J_0(\pi x/h)|}{2\pi} \times \left\{ 2(1 + \delta) \epsilon(R_{k_1} + R_{k_2}) \sup_t \frac{(t^2 + d^2)^{1/2}}{[(t-x)^2 + d^2]^{1/2}} \exp \left[ \left( A + \delta - \frac{\pi}{h} \right) d \right] \right. \\ \left. + \frac{2(2\pi^2/h)^{1/2} \epsilon(1 + \delta)}{\pi/h - A - \delta} \left( \frac{(R_{N_1}^2 + d^2)^{1/2}}{R_{N_1} + x} + \frac{(R_{N_2}^2 + d^2)^{1/2}}{R_{N_2} - x} \right) \right\},$$

$d \rightarrow \infty$  とすると、

$$(4.23) \quad |f(x) - (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x)| \\ \leq \frac{|J_0(\pi x/h)|}{2\pi} \frac{2(2\pi^2/h)^{1/2} \epsilon(1 + \delta)}{\pi/h - A - \delta} \left( \frac{(R_{N_1}^2 + d^2)^{1/2}}{R_{N_1} + x} + \frac{(R_{N_2}^2 + d^2)^{1/2}}{R_{N_2} - x} \right),$$

さらに  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$  とすれば、

$$(4.24) \quad |f(x) - L_{\text{Bessel}} f(x)| \leq \epsilon \frac{|J_0(\pi x/h)|}{2\pi} \frac{4(2\pi^2/h)^{1/2}(1 + \delta)}{\pi/h - A - \delta}$$

と押えられる。 $\epsilon$ は任意であるから、左辺 = 0 を得る。 ■

## 5 数値実験

関数  $f(x) = 1/\cosh((x-1)/c)$  ( $c > 0$ ) に対して Lagrange-Bessel 補間を適用し、精度を調べた。

補間公式 (4.2) は無限和で定義されているが、実際の計算では、次の式のように、無限和は有限和に打ち切られる：

$$(5.1) \quad (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x) = \sum_{k=1}^{N_1} f\left(\frac{h}{\pi} x\right) \frac{-J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x - j_{0k}]J_1(j_{0k})} + f\left(-\frac{h}{\pi} x\right) \frac{J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x + j_{0k}]J_1(j_{0k})}.$$

本実験では、

$$(5.2) \quad \left| f\left(\pm \frac{hj_{0k}}{\pi}\right) \frac{\mp J_0(\pi x/h)}{[(\pi/h)x \mp j_{0k}]J_1(j_{0k})} \right| < 10^{-10}$$

となったところで和を打ち切った。

定数  $c$  を 1 または 0.5 とし、 $x = 0.12345$  における補間の相対誤差

$$(5.3) \quad \text{relative error} = \frac{f(x) - (L_{\text{Bessel}})_{-N_1}^{N_2} f(x)}{f(x)}$$

を  $h$  の値を変えながら調べた。その結果を Fig. 5(a) に挙げる。

Fig. 5(a) において、グラフが緩やかに波打っているのが観察される。これは誤差評価 (4.5) が  $|J_0(\pi x/h)|$  を含み、 $h$  の値を変えるに従ってこの因子の値が振動するためと考えられる。

そこで相対誤差を  $J_0(\pi x/h)$  で割った値を調べ、 $1/h$  に対しプロットした。結果を Fig. 5(b) に挙げる。 $1/h$  に対しグラフは直線を描き、誤差評価 (4.5) が実験的にも確認されることが分かる。

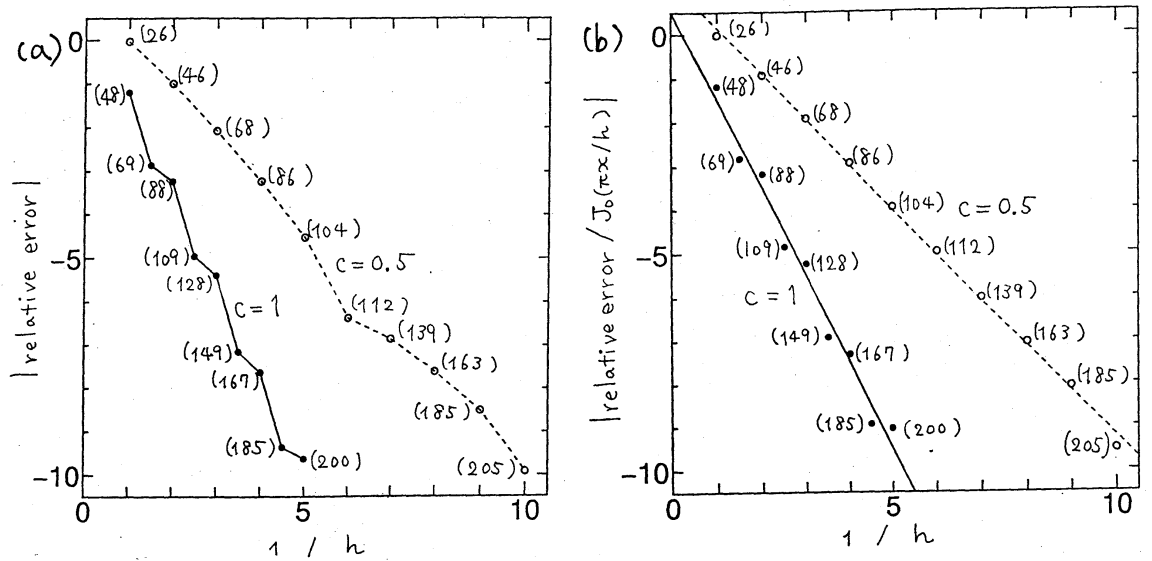


Fig. 5. Lagrange-Bessel 補間の精度。括弧内は計算に要した標本点数  $N_1 + N_2$ 。

## 6 無限区間における補間の一般論

ここではより一般的な状況での補間の性質について触れる。

標本点は、漸近的に等間隔  $h$  で分布するという仮定とともに、さらに次の仮定を満たすとする：

$$(6.1) \quad a_{k+1} - a_k \geq \delta \quad (\delta > 0).$$

このとき、整関数  $W(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a_k^2}\right)$  の値分布に関し次の事実が成り立つことが分かっている [1]：

### 補題 6.1

$$(6.2) \quad |W(re^{i\theta})|^{-1} = O \left[ \exp \left( -\frac{\pi}{h} r |\sin \theta| + \epsilon r \right) \right], \quad |re^{i\theta} - a_k| \geq \delta/8.$$

これを用いると、いまの補間について、次の2つの定理が導出される。前者は、実軸全体の近傍で正則な関数に対する補間誤差、後者は、補間が厳密な関数値を与える関数のクラスについて、述べている。

定理 6.2  $f(z)$  は帯状領域  $D(d)$  で正則、かつ、ある実数  $\alpha > 0$  に対し

$$(6.3) \quad N_{\alpha}(f, D(d)) = \int_{\partial D(d)} |f(z)| e^{\alpha|z|} |dz| < \infty,$$

が成り立つとする。このとき任意の実数  $x$  に対し、補間誤差に対し次の複素積分表示が可能である：

$$(6.4) \quad f(x) - Lf(x) = \frac{W(x)}{2\pi i} \int_{\Gamma(d)} \frac{f(z) dz}{(z-x)W(z)}.$$

また誤差の大きさは次の不等式で評価される：

$$(6.5) \quad |f(x) - Lf(x)| \leq C |W(x)| N_{\alpha}(f, D(d)) \exp \left( -\frac{\pi d}{h} \right),$$

ここで  $C$  は正の定数である。

定理 6.3  $f(z)$  は指数型  $A(< \pi/h)$  の整関数であり、ある実数  $\alpha > 0$  に対し

$$(6.6) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) e^{\alpha|x|} = 0$$

が成り立つとする。このとき、任意の実数  $x$  に対し  $f(x) = Lf(x)$  が成り立つ。



## 7 まとめと今後の課題

Lagrange 補間の拡張として無限区間における補間を考案した。具体例の一つとして、Lagrange-Bessel 補間を提案し、それが Sinc 補間と同様、標本点密度に対し誤差が指数関数的減少することを述べ、実験的にも確かめた。

今後の課題として、Sinc 補間と同様 Lagrange-Bessel 補間を数値計算に応用していくことが挙げられる。例えば、Bessel 関数を含むような振動型積分に応用することが、考えられる。

さらには Sinc 補間が、無限区間における補間全体の中で、何らかの形で最適性をもつことが期待される。そのことを検証することも、今後の課題の一つである。

## 参考文献

- [1] Boas, R. P., Jr., *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [2] 小松勇作, 特殊函数, 朝倉書店, 1967.
- [3] Lund, J. and Bowers, K. L., *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] 緒方秀教, 杉原正顕, 森正武, Cauchy の主値及び Hadamard の有限部分に対する DE 公式, 日本応用数理学会論文誌, 3(1993), 309-322.
- [5] Stenger, F., Numerical methods based on Whittaker Cardinal functions, or Sinc functions, *SIAM Rev.*, 23(1981), 165-224.
- [6] Stenger, F., *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] Sugihara, M., A class of functions for which the trapezoidal rule gives the exact value of integral over the infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 20(1987), 387-392.
- [8] 高橋秀俊, 複素関数論と数値解析, 数理解析研究所講究録 No. 253(1975), 京都大学, 24-37.
- [9] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, 2nd ed., Oxford University Press, London, 1939.