数理解析研究所講究録
第 880 巻 1994 年 68-69

周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列の SOR 法

大阪女子大学　石原 和夫　(Kazuo Ishihara)
大阪女子大学　山本 慎　(Makoto Yamamoto)

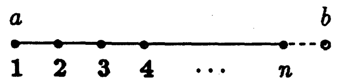
1．SOR 法.　$Av = b,\ A = D - L - U = (a_{ij}),\ 1 \le i, j \le n$ とし，$D, -L, -U$ は A の対角，狭義の下三角，狭義の上三角成分，$a_{ii} \neq 0,\ 1 \le i \le n$，$J = D^{-1}(L+U),\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を J の固有値，ω を加速係数，$H_\omega = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]$，$v_{k+1} = H_\omega v_k + \omega(D - \omega L)^{-1} b,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \rho(J) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|,\ \gamma(J) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\},\ \delta(J) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$，とする.

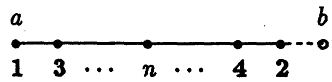
補題1 [1, 4]. (i) A が convergent ($\lim\limits_{k \to \infty} A^k = O$) $\Longleftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする．A が semiconvergent ($\lim\limits_{k \to \infty} A^k$ が存在) $\Longleftrightarrow$ $\gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

2．差分方程式.　次のような周期境界条件の問題を考える.

$$
\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a \le x \le b \\ y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b), \end{cases} \tag{1}
$$

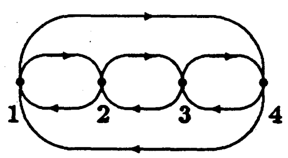
ここで $p(x),\ q(x),\ r(x)$ は周期 $b - a$ の連続関数で，$q(x) \ge 0$ とする．$[a, b]$ を n 等分し，$h = \dfrac{b-a}{n}$ として次のような 2 つのタイプの分点 x_i を考える.

[I] 

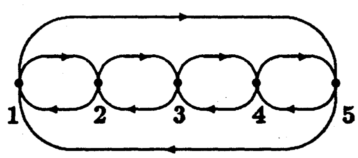
[II] 

(1) を中心差分近似し，$y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $Av = b$ となる.

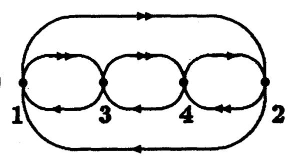
補題2． $h \cdot \max\limits_{a \le x \le b} |p(x)| < 2$ とする．n が偶数のとき，J は cyclic of index 2，n が奇数のとき，J は primitive となる．また，n が偶数，分割タイプ [II] ならば A は 2–cyclic, consistently ordered となる.

$G(J)$ 

$n = 4$, cyclic of index 2



$n = 5$, primitive

$\widehat{G}(J)$ 

consistently ordered

定理1. $p(x) \equiv 0,\ q(x) \equiv 0,\ n$ が偶数, 分割タイプ [II], $b \in \mathrm{Im}A \implies A$ は特異. SOR 法は semi-convergent $(0 < \omega < 2)$ で, $Av = b$ の解に収束し, $\omega_{\mathrm{opt}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\delta(J)^2}} = \dfrac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$, $\gamma(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min\limits_{0<\omega<2} \gamma(H_\omega)$.

定理2. $q(x) > 0,\ h \cdot \max_{a \le x \le b} |p(x)| < 2,\ n$ が偶数, 分割タイプ [II], とする.

$$\prod_{i=1}^{n} \left\{1 + \frac{1}{2}p(x_i)h\right\} = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \frac{1}{2}p(x_i)h\right\} \tag{2}$$

$\implies$ A は正則で, SOR 法は convergent $(\rho(H_\omega) < 1,\ 0 < \omega < 2)$,

$$\omega_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J)^2)}}, \quad \rho(H_{\omega_{\mathrm{opt}}}) = \min_{0<\omega<2} \rho(H_\omega),$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2+q_{\max}h^2}\right)^2}} \le \omega_{\mathrm{opt}} \le \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2+q_{\min}h^2}\right)^2}}, \quad q_{\max} = \max_{a \le x \le b} q(x), \quad q_{\min} = \min_{a \le x \le b} q(x).$$

さらに, $h = \dfrac{b-a}{n}$ が十分小ならば, $\omega_{\mathrm{opt}} \approx \dfrac{2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}$.

注意. 誤差評価 $|y(x_i) - v_i| = O(h^2)$ は得られる. 定理2の条件を満たさない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Neumann 型2点境界値問題の SOR 法については [3] 参照.

参考文献

[1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.

[2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 – 566.

[3] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two–point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), to appear.

[4] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice–Hall, 1962.

[5] Young, D., Iterative solution of large linear systems, Academic Press, 1971.