

## 大気モデルにおける数値計算法

気象庁数値予報課 露木 義 (Tadashi Tsuyuki)

### 1. はじめに

地球大気の数値モデルは大きく分けて、天気予報と4次元データ同化に使われる数値予報モデルと、大気の運動や気候システムの研究に使われる大気大循環モデルの二つがある。それぞれ、高分解能・高速、精密な物理過程で特徴づけられる。モデルの自由度は、現在のところ $10^5$ から $10^6$ である。したがって大気モデルでは、このような大自由度に適した数値計算法が必要になる。ここでは、高速な時間積分法である semi-Lagrange 法と、4次元データ同化における大規模極値問題である adjoint 法について紹介する。これらは、大気モデルの分野で現在注目されている手法である。

### 2. Semi-Lagrange 法

大規模な大気の運動を対象とする大気モデルでは、静水圧平衡が仮定されているので、中性回転成層流体に許される運動モードとしては、ロスビー波モードと重力波モードの二つがある。このうち後者は、多くの場合気象学的ノイズとみなされるが、位相速度が前者より1オーダー大きいので、通常の Euler 的な時間積分法では、タイムステップを不必要に小さくとらざるを得ない。そこで、予報方程式の線形重力波項を implicit に扱う semi-implicit 法を用いることによって、これを回避することが行われてきた。しかしそれでも、大気の質量の大部分が属する対流圏の運動を扱うのに、対流圏の遥か上層の上部成層圏の極夜ジェットによって、タイムステップが制限されてしまうという不合理性が残る。というのは、対流圏の温帯低気圧の位相速度は $10\sim 20\text{m/s}$ なのに、極夜ジェットは $100\text{m/s}$ 程度の風速を持つからである。

これらに対する対策として、semi-Lagrange 法が広く用いられつつある (Staniforth and Cote, 1991)。大気予報方程式は、一般的に次のように書ける。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla F = R(\mathbf{x}, t) + G(\mathbf{x}, t)$$
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

ここで  $G(x, t)$  は implicit に扱うべき線形重力波項などを表わす。この式を次のように離散化する。

$$\begin{aligned} & \frac{F(x, t + \Delta t) - F(x - 2\alpha, t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ &= R(x - \alpha, t) + \frac{1}{2}[G(x, t + \Delta t) + G(x - 2\alpha, t - \Delta t)] \\ & \alpha = \Delta t v(x - \alpha, t) \end{aligned}$$

このようにすると、上流点  $x - 2\alpha$  における値を外挿でなく内挿で求める限り、タイムステップ  $\Delta t$  の大きさにかわらず、無条件に安定になることが示せる。ただし、 $\alpha$  の値は2番目の式を用いて iteration で求めるので、これが収束するための条件から  $\Delta t$  の大きさに制限がつく。例えば、1次元の場合には

$$\Delta t \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\max} < 1$$

となる。これは大気の場合には十分ゆるい条件なので、従来の Euler 的なスキームより十分長い  $\Delta t$  がとれることに変わりはない。なお、定式化からはグリッドモデルにしか適さないように見えるが、スペクトルモデルにも適用できることが示されている (Richie, 1987)。また、このように semi-implicit 法を併用した場合には、一般に変数係数の楕円型偏微分方程式を解く必要があり、それには FFT や multigrid solver が用いられる。

semi-Lagrange 法のいちばん大きな問題点は、質量やエネルギーなどの保存則を満足させることが困難なことである。図1に、全球1層スペクトルモデルを100日間積分した場合の全エネルギーを、従来のスキームと比較した結果を示した。同じ分解能では明らかに保存性が劣ることがわかる。この原因のひとつは内挿を繰り返すためであることから、内挿しないスキームも提案されている (Richie, 1986)。移流速度  $c$  の1次元の線形移流方程式を例にとると、まず  $n$  をある整数として、それを以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{n\Delta x}{2\Delta t} \frac{\partial F}{\partial x} &= -c' \frac{\partial F}{\partial x} \\ c' &= c - \frac{n\Delta x}{2\Delta t}, \quad \left| \frac{c'\Delta t}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

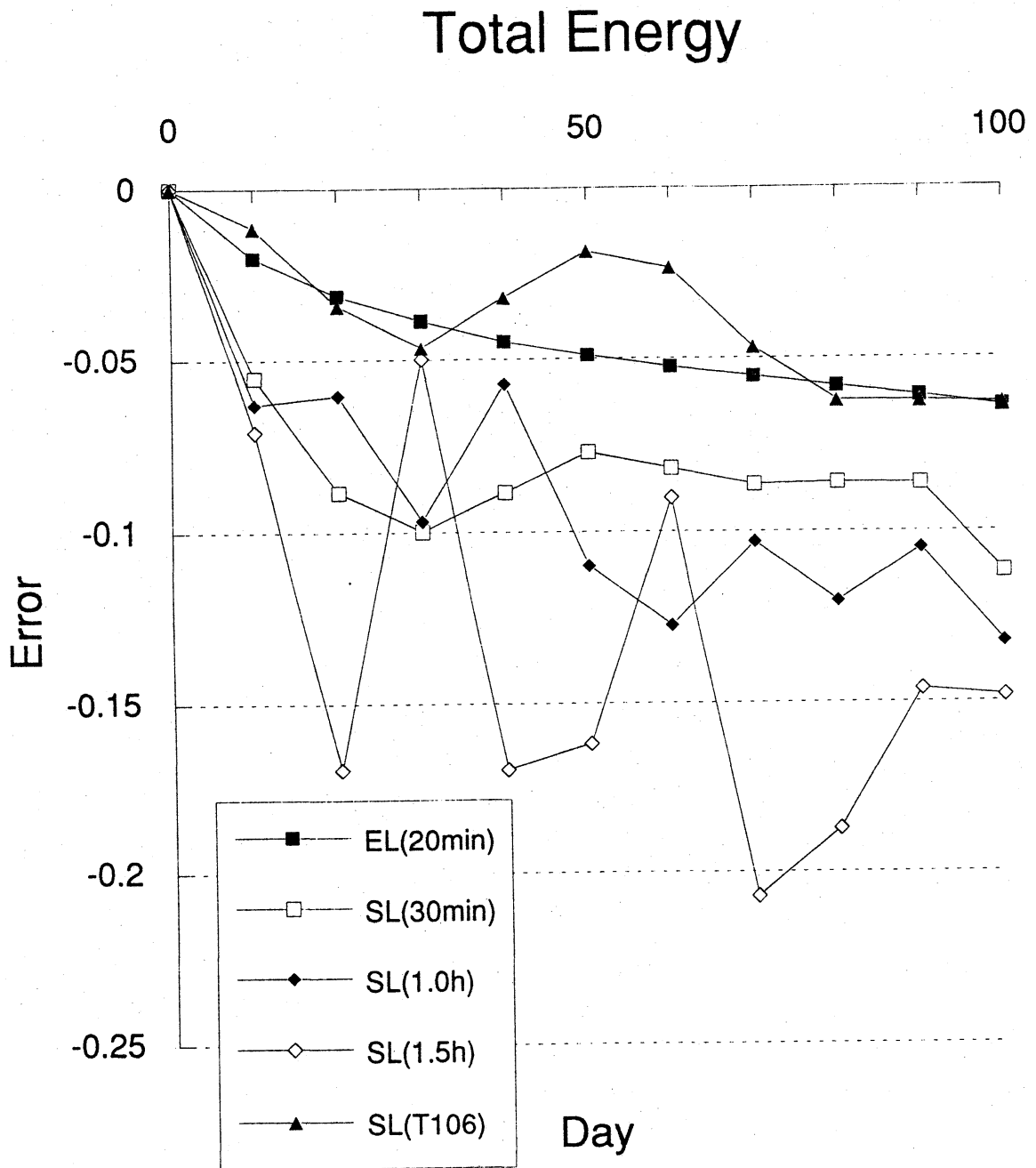


図1 全球1層スペクトルモデルの100日積分における全エネルギーの変化。初期値との差の相対値で示す。モデルの空間分解能は、1例を除いて波数42の三角切断である。EL は従来の Euler 的な時間積分スキーム、SL は semi-Lagrange 法によるもので、それぞれの括弧内はタイムステップを示す。ただし、最後の括弧内の T106 は、波数106の三角切断のモデルで20分のタイムステップを用いた場合を示す。(気象庁数値予報課の真木貴史氏の実験結果による)

そして次のように離散化する。

$$\frac{F(x, t + \Delta t) - F(x - n\Delta x, t - \Delta t)}{2\Delta t} = -c' \frac{\partial F}{\partial x} \left( x - \frac{1}{2}n\Delta x, t \right)$$

これだと上流点がモデルの格子点上にくるので、左辺は内挿する必要がなく、右辺も  $n$  が偶数ならその必要がない。右辺の移流は Euler 的に計算することになるが、 $n$  の決め方からわかるように CFL 条件を満足するので、無条件に安定であることには変わりはない。実際にこのスキームを採用すると、保存性が向上することが示されている。しかし、数値予報モデルならともかく、大気大循環モデルのように何10年も時間積分する場合には、保存則が保証されないことは大きな問題で、まだ一部の数値予報モデルにしか採用されていない。

### 3. Adjoint 法

天気予報の精度を上げるためには、数値モデルを改良するだけでなく、大気の初期値をなるべく正確に知ることがも欠かせない。これは、時間的にも空間的にも不均一に分布し、かつ精度や特性の異なるさまざまな種類の観測データから、ある特定の時刻（解析時刻）におけるモデルの格子点の予報変数の値を、なるべく高い精度で推定する問題である。このためには空間方向だけの内挿ではなく、大気の物理法則を用いて時間方向にも内挿する必要がある。物理法則は数値モデルで体现されるので、モデルとの不可分の結合が必要になる。これを4次元データ同化と呼び、観測されない領域の大気の状態や観測されない物理量を、物理法則と矛盾することなく推定できる。なお、4次元データ同化で得られたデータを解析値と呼ぶ。

多くの数値予報センターでは、4次元データ同化の手法として統計的内挿法が用いられてきた。これは、解析時刻におけるモデルの予報値を第1推定値として、それを観測地点における予報誤差の線形結合で修正したものを解析値とする方法である。線型結合の重みを、予報誤差共分散行列や観測誤差共分散行列などから、二乗平均解析誤差の期待値が最小になるように決めるので、最適内挿法とも呼ばれる。この方法の大きな欠点は、本来は Kalman filter で計算すべき予報誤差共分散行列を、空間的一様等方性や時間不変性などの簡単な過程のもとに、経験的に決めていることである。また、解析時刻と大きく異なる時刻の観測値を、十分有効に利用できないことも問題である。一方、Kalman filter は優れた推定法であるが、大気モデルの場合は自由度が大きすぎて、まず実行は無理である。

これらに代わるべき手法として現在注目されているのが adjoint 法である。これは、解析時刻  $t = t_N$  より過去の観測値も用いて、ある短い期間  $[t_0, t_N]$  におけるモデルの予報値を、観測値になるべく近くなるようにフィットさせる方法である。この期間の予報の初期値を  $x_0$ 、解析時刻における予報値を  $x_N$  として、数値モデルの予報方程式を

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

と書くことにする。 $\mathbf{X}_N$ が求める解析値になる。これを決めるための cost function を

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k)^T \mathbf{O}_k^{-1} (\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k)$$

とする。ここでは最も簡単な関数形を選んだ。 $\mathbf{O}_k$ は観測誤差共分散行列、 $\mathbf{Y}_k$ はモデルの変数の観測値で、観測はモデルのタイムステップの時刻に、モデルの格子点上で行われるものとする。 $J$ を最小とする $\mathbf{X}_0$ を求めるわけであるが、 $J$ の $\mathbf{X}_0$ に関する傾度は次式のように表される。

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} J = \sum_{k=0}^N [\mathbf{F}'_0|_{\mathbf{X}_0}]^T [\mathbf{F}'_1|_{\mathbf{X}_1}]^T \cdots [\mathbf{F}'_{k-1}|_{\mathbf{X}_{k-1}}]^T \mathbf{O}_k^{-1} (\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k)$$

この値は以下のアルゴリズムによって計算できる。

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_N = \mathbf{O}_N^{-1} (\mathbf{X}_N - \mathbf{Y}_N) \\ \mathbf{Z}_k = [\mathbf{F}'_k|_{\mathbf{X}_k}]^T \mathbf{Z}_{k+1} + \mathbf{O}_k^{-1} (\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k) \end{cases} \quad (k = N-1, N-2, \dots, 0)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} J = \mathbf{Z}_0$$

このうちの2番目の式は、もとの予報方程式を線形化したものの adjoint 方程式になっている。まず、適当な $\mathbf{X}_0$ から予報方程式を未来に向かって時間積分し、次に得られた $\mathbf{X}_k$ を用いて adjoint 方程式を過去に向かって時間積分すると、 $\mathbf{Z}_0$ が求める傾度になる。あとは適当な降下法アルゴリズムによって最小値が探索できる。自由度が非常に大きいことから、それには limited-memory quasi-Newton 法や conjugate gradient 法などが用いられる (Navon and Legler, 1987; Navon et al., 1992)。adjoint 法は、予報モデルが線型でかつ完全ならば、Kalman filter と同等の結果を与えることが知られている。Kalman filter より優る点は、アルゴリズムが単純なうえにずっと少ない計算機資源で実行できることである。また、いくつかの実験結果によれば、観測がない領域の大気の状態をより正確に推定できる (Ehrendorfer, 1992; 図2)。とはいえ、adjoint 法の時間積分の期間を1日程度としても、十分な精度で収束

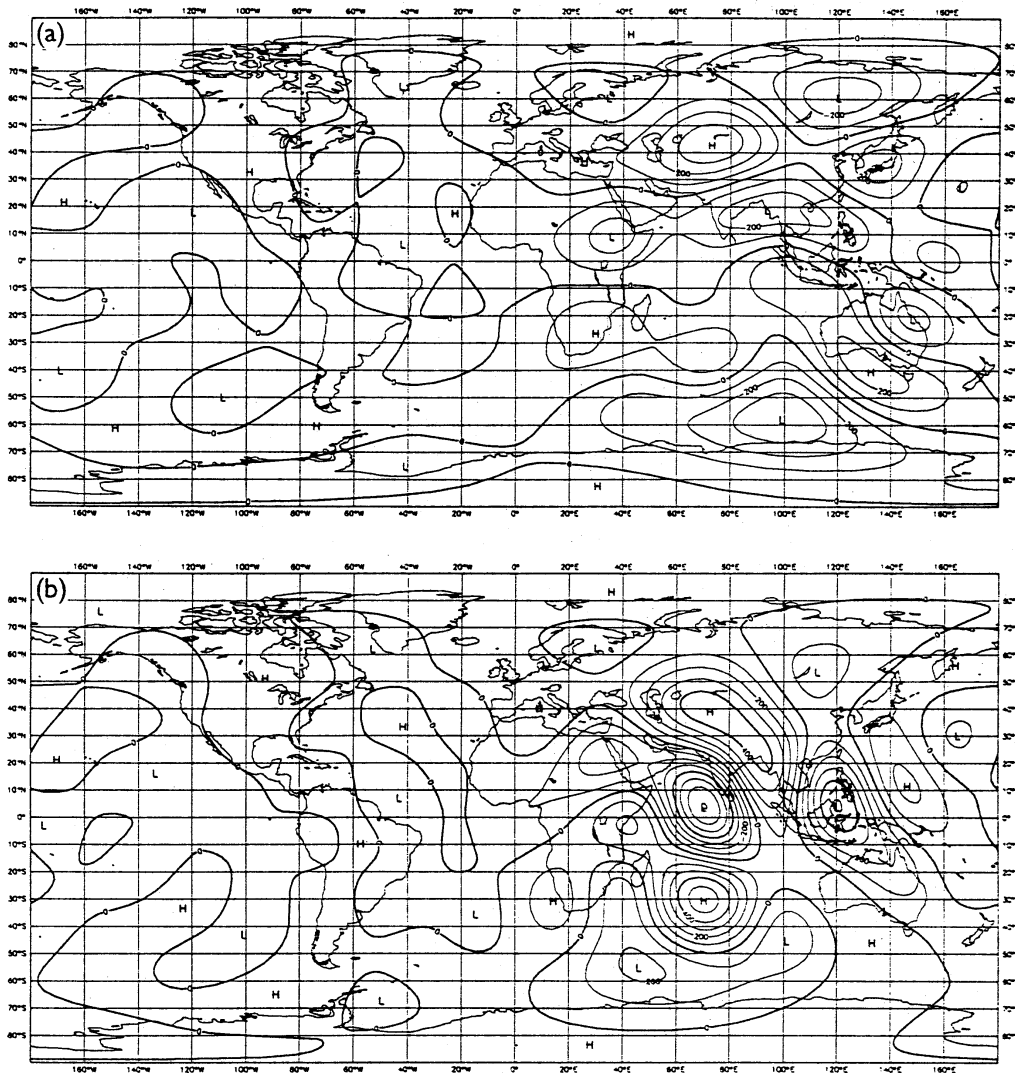


図2 ある日の500hPaの流線関数を、東半球の観測値が全くないとして西半球の観測値だけを用いて推定した場合の誤差の比較。(a) adjoint法、(b) Kalman filter。等値線の間隔は $10^5 \text{m}^2/\text{s}$ 。(Ehrendorfer, 1992)

するまで数10回の iteration が必要である。現在の計算機のレベルからみると、多大の計算機資源を要するため、まだ実用化されてはいない。計算機の性能の向上とアルゴリズムの高速化が望まれる。

adjoint 法の欠点のひとつは、数値モデルが完全であることが仮定されていることである。このことに関して、Derber (1989) は次のような方法を提案した。

$$\begin{aligned} X_k &= F_{k-1}(X_{k-1}) + \lambda_k \phi & (k = 1, 2, \dots, N) \\ \nabla_{\phi} J &= \sum_{k=0}^N (\lambda_k + \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_l [F'_l]_{X_l}^T [F'_{l+1}]_{X_{l+1}}^T \cdots [F'_{k-1}]_{X_{k-1}}^T) O_k^{-1} (X_k - Y_k) \end{aligned}$$

すなわち、モデルの予報方程式が不完全であるとして系統的誤差  $\phi$  を加え、この  $\phi$  を変化させて  $J$  の最小値を探索するわけである。この場合の初期値  $X_0$  には、以前の解析値をそのまま用いる。adjoint 方程式の解  $Z_k$  によって、求める傾度はつぎのように表わされる。

$$\nabla_{\phi} J = \sum_{k=1}^N \lambda_k Z_k$$

モデルの系統的誤差も得られるので、これを実際の予報に利用して予報誤差を減らすこともできる。また、adjoint 方程式を求めるためには予報方程式の微分が必要なため、数値モデルに水蒸気の凝結のような微分不可能な過程が含まれている場合には困難が生じる。ただしこの点に関しては、最近いくつかの対策が提案されている (Bao and Warner, 1993; Zou et al., 1993; Zupanski, 1993)。

#### 4. おわりに

大気モデルの分野で現在注目されている2つの数値計算手法について紹介したが、90年代後半を見据えた場合、超並列コンピューターへの対応が大きな課題になる。一見スペクトル法には不利なように思われるが、必ずしもそうとはいえないことが示されている。超並列コンピューターに適した数値計算法の開発が急がれる。

一方、大気の運動が基本的にカオスであることから、初期値の不確定性を反映した多数の予報からなるアンサンブル予報が広く用いられるようになるであろう。これによって予報の信頼性を予測するわけである。すでに中期予報に取り入れている数値予報センターもあるが、数値モデルの自由度よりずっと少ないメンバー数で我慢しなければならないため、サンプリング・エラーを減らすための工夫が必要になる。

なお、このような予測可能性の変動は、adjoint 法における最小値探索の効率と密接に結びついていることがわかっている (Gauthier, 1992)。また、アンサンブル予報の有力な手法の一つである最適モード法では、初期値に加える摂動を求めるのに、adjoint 方程式と Lanczos 法を併用する。したがって、数値予報の未来像のひとつとして、超並列コンピュータ上で動く adjoint 法とアンサンブル予報を統合した予測システムが描けるのではないか。

#### 引用文献

- Bao, J.-W., and T.T. Warner, 1993: Treatment of on/off switches in the adjoint methods: FDDA experiments with a simple model. *Tellus*, 45A, 525-538.
- Derber, J.C., 1989: A variational continuous assimilation technique. *Mon. Wea. Rev.*, 117, 2437-2446.
- Ehrendorfer, M., 1992: Four-dimensional data assimilation: comparison of variational and sequential algorithms. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 118, 673-713.
- Gauthier, P., 1992: Chaos and quadri-dimensional data assimilation: a study based on the Lorenz model. *Tellus*, 44A, 2-17.
- Navon, I.M., and D.M. Legler, 1987: Conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 1479-1502.
- Navon, I.M., X. Zou, J. Derber and J. Sela, 1992: Variational data assimilation with an adiabatic version of the NMC spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 1433-1446.
- Ritchie, H., 1986: Eliminating the interpolation associated with the semi-Lagrangian scheme. *Mon. Wea. Rev.*, 114, 135-146.
- Ritchie, H., 1987: Semi-Lagrangian advection on a Gaussian grid. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 608-619.
- Staniforth, A., and J. Cote, 1991: Semi-Lagrangian schemes for atmospheric models --- a review. *Mon. Wea. Rev.*, 119, 2206-2223.
- Zou, X., I.M. Navon and J.G. Sela, 1993: Variational data assimilation with moist threshold processes using the NMC spectral model. *Tellus*, 45A, 370-387.
- Zupanski, D., 1993: The effects of discontinuities in the Betts-Miller cumulus convection scheme on four-dimensional variational data assimilation. *Tellus*, 45A, 511-524.