

# 数値等角写像のための Symm と Hough & Papamichael の定式化の比較

天野 要 (Kaname Amano)

愛媛大学工学部

## 1 緒言

与えられた Jordan 曲線の内部, 外部または 2 つの Jordan 曲線で囲まれた有界な 2 重連結領域からそれぞれ単位円の内部, 外部または円環領域への等角写像を考える. このような数値写像の方法として, Symm [1, 2, 3] の積分方程式法が著名である. これは, 調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現により, 等角写像の問題を境界上のソース密度を未知量とする第 1 種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させたものである. Symm はソース密度を階段関数で近似した. その後, Hayes et al. [4] はソース密度を 2 次の区分多項式で近似した. Gaier [5, 6] は解の存在と一意性を証明し, 外部領域と 2 重連結領域の問題の新しい定式化を行った. Hough & Papamichael [7, 8] はソース密度をスプライン関数と角点の特異性を反映した特異関数で近似した. また, この方法を上記の 3 種の等角写像の計算法として統一的に記述した.

この研究の目的は数値等角写像の第 1 種 Fredholm 型積分方程式法として著名な Symm の定式化と Gaier および Hough & Papamichael の再定式化 (簡単のため, Hough & Papamichael の再定式化または定式化と呼ぶ) を比較することである. これまでにも, Hough & Papamichael によって, 角点の特異性の問題を克服するために, 再定式化がソース密度の特異性の軽減という利点を持つことが指摘されていた. 我々は, 問題の領域に角点があるか否かにかかわらず, (a) 座標系からの独立性と, (b) 数値写像の精度において, Hough & Papamichael の定式化が優れていることを指摘したい.

本稿では外部等角写像を扱う. 内部等角写像の定式化は同一で, 2 重連結領域の場合には外部領域の場合と似た議論が可能である [9].

## 2 積分方程式法

$z$  平面上に与えられた Jordan 曲線  $C$  の外側の領域  $D_E$  から  $w$  平面上の単位円外部  $|w| > 1$  への等角写像  $w = f_E(z)$  を考える (図 1). この写像は正規化条件  $f_E(\infty) = \infty, f_E'(\infty) > 0$  の下に一意的に定まる. 問題の一般性を失うことなく, 原点を  $C$  の内側の領域に取ることができる.

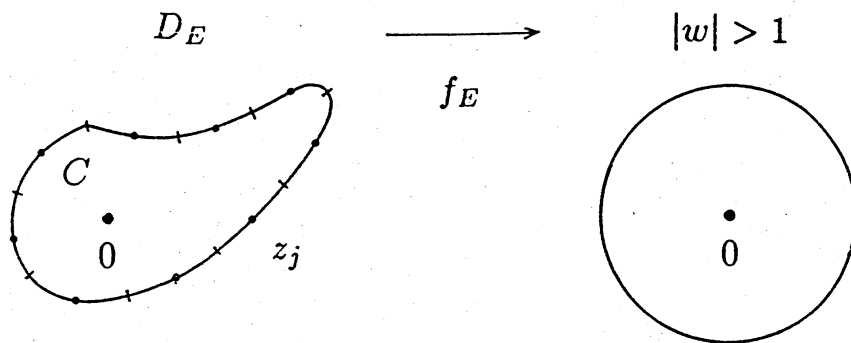


図 1: 外部等角写像と積分方程式法

Symm [2] はこの写像関数を

$$f_E(z) = \frac{z}{\gamma} \exp(\hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z)), \quad (1)$$

$$\hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z) = \int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) \log(z - \zeta) |d\zeta| \quad (2)$$

と表現した。ここに、 $\gamma$  は  $C$  の容量で、 $\hat{\sigma}_E(\zeta), \zeta \in C$  は境界上で定義されたソース密度である。これらは結合積分方程式

$$\int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) \log|z - \zeta| |d\zeta| = \log \gamma - \log|z|, \quad z \in C, \quad (3)$$

$$\int_C \hat{\sigma}_E(\zeta) |d\zeta| = 0 \quad (4)$$

の解である。

Gaier [5] と Hough & Papamichael [8] はこれを

$$f_E(z) = \frac{1}{\gamma} \exp(g_E(z) + ih_E(z)), \quad (5)$$

$$g_E(z) + ih_E(z) = \log \gamma \int_C \sigma_E(\zeta) \log(z - \zeta) |d\zeta| \quad (6)$$

と表現した。ソース密度  $\sigma_E(\zeta), z \in C$  は積分方程式

$$\int_C \sigma_E(\zeta) \log|z - \zeta| |d\zeta| = 1, \quad z \in C, \quad (7)$$

の解で、 $\gamma$  との間に

$$\log \gamma \int_C \sigma_E(\zeta) |d\zeta| = 1 \quad (8)$$

なる関係がある。また、共役な調和関数  $g_E(z)$  と  $h_E(z)$ ,  $\hat{g}_E(z)$  と  $\hat{h}_E(z)$  の間には

$$g_E(z) + ih_E(z) = \log z + \hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z), \quad (9)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{g}_E(z) + i\hat{h}_E(z) = 0 \quad (10)$$

なる関係がある。

ソース密度と容量の関係式 (3),(4),(7),(8) は、 $C$  が単位円に移るための境界条件  $|f_E(z)| = 1, z \in C$  と、漸近関係  $f_E(z) \rightarrow z/\gamma (z \rightarrow \infty)$  すなわち (9),(10) 式から得られる。

### 3 比較

積分方程式 (7) は  $\gamma \neq 1$  のとき一意的な解を持ち、結合積分方程式 (3),(4) は  $\gamma = 1$  でも一意的な解を持つことが知られている。しかし、 $\gamma \neq 1$  の場合でも、領域を適当に拡大または縮小してから積分方程式法を適用して、(7) 式が一意的な解を持つようにすることは容易である。また、Hough & Papamichael [8] は、彼らの方法で角点の特異性の問題を克服するために、 $\sigma_E(z)$  の特異性が  $\hat{\sigma}_E(z)$  の特異性より軽減されることを指摘している。

我々は、問題の領域に角点があるか否かにかかわらず、数学的および計算上の観点から、Hough & Papamichael の再定式化が以下のような重要な利点を持つことを指摘したい。

基本的には、2つの定式化の写像関数の表現形式の違いが重要である。Symm の定式化は原点を原点に写像する形で独立変数  $z$  を伴い、Hough & Papamichael の定式化は原点間の対応を規定していない。そもそも、問題の領域の外部に取られた原点は、等角写像の存在と一意性には無関係で、計算の都合で導入されたものである。したがって、原点間の対応は付加的な制約である。この制約が、曲線  $C$  が単位円に移るという条件を調和関数の境界条件に置き換えたとき、 $g_E(z)$  の境界値が定数型であるのに対して、 $\hat{g}_E(z)$  の境界値が対数型であるという違いを生ずる。積分方程式法ではこれらの調和関数が1重層対数ポテンシャルで表現される。

仮に、結合積分方程式 (3),(4) と積分方程式 (7) を正確に解くことができ、Hough & Papamichael の定式化の場合の (8) 式の容量  $\gamma$  とともに、共役調和関数 (2),(6) を正確に計算することができれば、写像関数 (1) と (5) は全く同じ正確な結果を与えるはずである。しかし、上記の境界値の違いに起因する対数項  $\log|z|$  の有無によって、積分方程式の解であるソース密度  $\hat{\sigma}_E(z)$  の値は原点の取り方に依存し、 $\sigma_E(z)$  の値は原点の取り方に依存しない (曲線  $C$  の外側でも可)。この意味で、Symm の定式化は問題の等角写像に無関係な座標系の平行移動に対して不変性を示さず、不自然である。

さらに、これらの方程式は適当な離散化の下に数値的に解かれる。そのとき、対数項  $\log|z|$  は原点に特異性を持つことに注意する。原点が境界に近ければ、問題の領域の外部にあっても、数値解の精度はその特異性の影響を受けるであろう。

したがって、問題の領域に角点があるか否かにかかわらず、Hough & Papamichael の定式化は、Symm の定式化と比較して、次のような点で優れていると考えられる。

(a) 座標系からの独立性：座標系の平行移動に対して不変であり、原点の取り方に依存しない計算結果を得ることができる。

(b) 数値写像の精度：しかも、原点の特異性の影響を受けることなく、より高い計算精度を期待することができる。

## 4 数値実験

数値実験には最も簡単な離散化の方法を採用する。その概要は次の通りである。まず、境界  $C$  を適当な方法で  $N$  個の小区間  $I_i = [z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$  に分割し、その中間に拘束点  $z_i \in I_i$  を取る。次いで、ソース密度を各小区間で一定の階段関数で近似して、積分には疑似的な Simpson 則を用いる。境界上では特異積分が必要である。以上の計算法の詳細は文献 [9] に記されている。

誤差の評価には解析関数の最大値の原理を利用することができる。すなわち、近似写像関数  $F_E(z)$  の相対誤差を

$$E_f(z) = \left| \frac{F_E(z)}{f_E(z)} - 1 \right| \quad (11)$$

とおけば、 $E_f(z)$  は境界上または無限遠点で最大値  $\max_C E_f(z)$  または  $E_f(\infty)$  を取る。境界上では相対誤差と絶対誤差は等しい。ここで用いられる誤差の指標は次の通りである。

$$E_m = \max_j \| |F_E(z_{j+\frac{1}{2}})| - 1 | \quad (12)$$

$$E_f = \max_j (|F_E(z_j) - f_E(z_j)|, |F_E(z_{j+\frac{1}{2}}) - f_E(z_{j+\frac{1}{2}})|) \quad (13)$$

$$E_\Gamma = |\Gamma - \gamma| \quad (14)$$

$\Gamma$  は容量  $\gamma$  の近似値である。多くの計算例で

$$E_f(\infty) = \frac{E_\Gamma}{\Gamma} < E_f \approx \max_C E_f(z), \quad (15)$$

$$E_m \approx E_f \quad (16)$$

なる関係の成立することを数値実験的に確認することができる。容量  $\Gamma$  の相対誤差は無遠点における数値写像の相対誤差の指標であるが、前者はこれが境界上の最大誤差以下であることを意味している。後者は解析解が知られていない場合にも  $E_m$  が  $E_f$  のよい指標になることを意味している。

数値実験は愛媛大学情報処理センター FACOM M-770/6 の倍精度計算による。

### 例 1 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 > 1$$

解析解は

$$f_E(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + 1}}{a + 1},$$

$$\gamma = \frac{a + 1}{2}$$

である。この例では離心角、長さまたは偏角で等間隔になるように境界を分割する。

表1に誤差  $E_f$  と  $E_\Gamma$  を示す. 境界上の数値写像については, いずれの場合にも, Hough & Papamichael の定式化による計算精度は Symm の定式化による計算精度と同等またはそれ以上である. 精度の違いは境界が偏平になる程大きい. 容量については,  $a = 5$  を境に, 境界の形が円に近い場合には Symm の, 偏平な場合には Hough & Papamichael の定式化が比較的良好な精度を与えている. しかし, これらの数値はすべて (15) 式の関係を満たしている. その意味で, いずれの定式化でも十分な精度が得られている. なお, 数値は割愛するが, (16) 式の成立も確認することができる.

表 1: 数値写像と容量の誤差 (楕円,  $N = 64$ )

| $a$          | Hough & Papamichael  |                      |                      | Symm                 |                      |                      |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|              | 離心角                  | 長さ                   | 偏角                   | 離心角                  | 長さ                   | 偏角                   |
| 1.25         | $1.3 \times 10^{-4}$ | $1.6 \times 10^{-4}$ | $2.0 \times 10^{-4}$ | $3.2 \times 10^{-4}$ | $3.0 \times 10^{-4}$ | $3.2 \times 10^{-4}$ |
| 2.5          | $6.1 \times 10^{-4}$ | $1.5 \times 10^{-3}$ | $3.2 \times 10^{-3}$ | $2.4 \times 10^{-3}$ | $1.5 \times 10^{-3}$ | $3.2 \times 10^{-3}$ |
| 5 $E_f$      | $1.3 \times 10^{-3}$ | $1.3 \times 10^{-2}$ | $3.8 \times 10^{-2}$ | $9.8 \times 10^{-3}$ | $1.3 \times 10^{-2}$ | $3.8 \times 10^{-2}$ |
| 10           | $3.9 \times 10^{-3}$ | $3.8 \times 10^{-2}$ | $1.8 \times 10^{-1}$ | $5.2 \times 10^{-2}$ | $3.8 \times 10^{-2}$ | $1.8 \times 10^{-1}$ |
| 20           | $8.7 \times 10^{-3}$ | $6.7 \times 10^{-2}$ | $4.9 \times 10^{-1}$ | $2.1 \times 10^{-1}$ | $9.3 \times 10^{-2}$ | $4.9 \times 10^{-1}$ |
| 1.25         | $1.0 \times 10^{-4}$ | $1.0 \times 10^{-4}$ | $1.1 \times 10^{-4}$ | $3.6 \times 10^{-7}$ | $1.9 \times 10^{-6}$ | $7.3 \times 10^{-6}$ |
| 2.5          | $1.5 \times 10^{-4}$ | $1.5 \times 10^{-4}$ | $2.8 \times 10^{-4}$ | $9.9 \times 10^{-6}$ | $1.8 \times 10^{-5}$ | $2.0 \times 10^{-4}$ |
| 5 $E_\Gamma$ | $2.3 \times 10^{-4}$ | $2.8 \times 10^{-4}$ | $6.6 \times 10^{-4}$ | $5.3 \times 10^{-5}$ | $4.7 \times 10^{-4}$ | $6.9 \times 10^{-4}$ |
| 10           | $3.0 \times 10^{-4}$ | $4.1 \times 10^{-3}$ | $8.0 \times 10^{-2}$ | $5.0 \times 10^{-4}$ | $4.5 \times 10^{-3}$ | $8.0 \times 10^{-2}$ |
| 20           | $1.9 \times 10^{-4}$ | $7.5 \times 10^{-3}$ | 1.3                  | $1.4 \times 10^{-2}$ | $9.6 \times 10^{-3}$ | 1.3                  |

図2は楕円の長軸と短軸に沿って原点  $(x_c, y_c)$  を移動させた場合の  $E_f$  の変化である. 座標系の平行移動に対して不変な Hough & Papamichael の定式化では水平な直線である. しかし, Symm の定式化では原点が境界に近づくとき計算精度は急速に低下し, その低下は原点が近づく先の境界の分割の密度が小さい程著しい. したがって, 表1の  $E_f$  は Symm の定式化にとって都合のよい比較であったことがわかる. なお, 容量  $\Gamma$  についても同様な結果が得られる.

## 例 2 Cassini の楕形

$$|z^2 - 1| > a^2$$

解析解は

$$f_E(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{a},$$

$$\gamma = a$$

である. この例では長さまたは偏角で等間隔になるように境界を分割する.

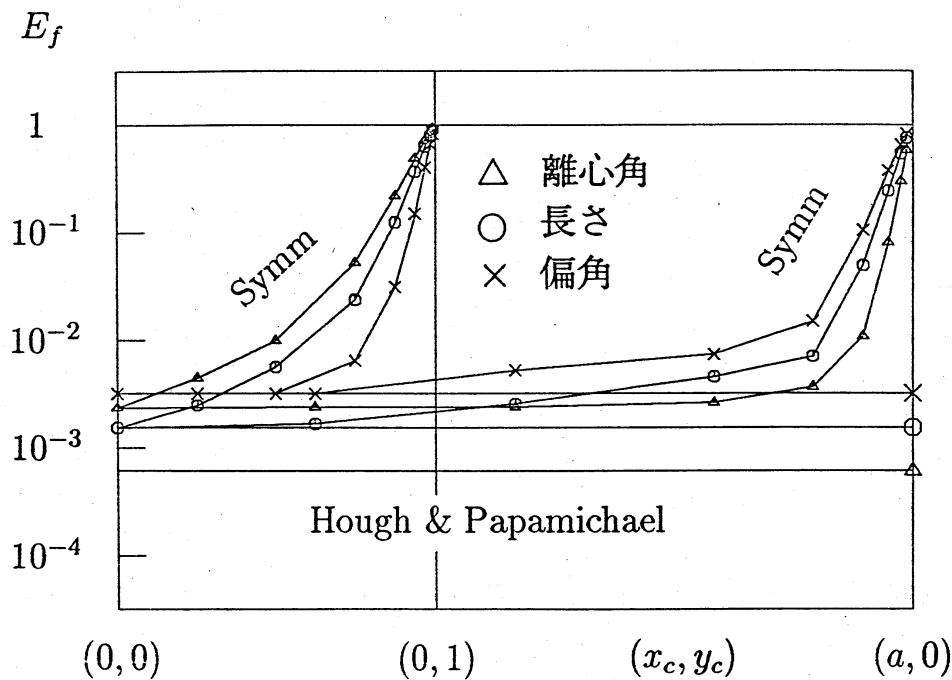


図 2: 原点の移動と数値写像の精度 (楕円,  $a=2.5$ )

表 2 に誤差  $E_f$  と  $E_r$  を示す. 楕円の場合と同様に, Hough & Papamichael の定式化による数値写像の精度は Symm の定式化と同等またはそれ以上である. 精度の違いは,  $a$  の値が小さく, 楕円のくびれが強い程大きい. 容量については, くびれが弱い場合には Symm の, 強い場合には Hough & Papamichael の定式化が比較的良い精度を与えている. しかし, これらの数値も全て (15) 式の関係を満たしている. また, (16) 式の成立も確認することができる.

表 2: 数値写像と容量の誤差 (Cassini の楕円,  $N = 64$ )

| $a$           | Hough & Papamichael  |                      | Symm                 |                      |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|               | 長さ                   | 偏角                   | 長さ                   | 偏角                   |
| 1.8           | $2.5 \times 10^{-4}$ | $2.4 \times 10^{-4}$ | $4.5 \times 10^{-4}$ | $4.5 \times 10^{-4}$ |
| 1.06 $E_f$    | $1.1 \times 10^{-3}$ | $1.3 \times 10^{-3}$ | $1.0 \times 10^{-2}$ | $3.0 \times 10^{-3}$ |
| $\sqrt{1.02}$ | $1.5 \times 10^{-3}$ | $2.9 \times 10^{-3}$ | $7.0 \times 10^{-2}$ | $7.6 \times 10^{-3}$ |
| 1.8           | $1.7 \times 10^{-4}$ | $1.8 \times 10^{-4}$ | $1.6 \times 10^{-5}$ | $2.3 \times 10^{-5}$ |
| 1.06 $E_r$    | $1.3 \times 10^{-4}$ | $1.8 \times 10^{-4}$ | $1.6 \times 10^{-4}$ | $1.6 \times 10^{-4}$ |
| $\sqrt{1.02}$ | $1.3 \times 10^{-4}$ | $2.1 \times 10^{-4}$ | $3.6 \times 10^{-4}$ | $2.7 \times 10^{-4}$ |

## 5 結論

与えられた Jordan 曲線の外部から単位円外部への数値等角写像について、第 1 種 Fredholm 型積分方程式法である Symm [2] と Gaier [5], Hough & Papamichael [8] の定式化を比較した。その結果、(a) 座標系からの独立性と、(b) 数値写像の精度において、後者が前者より優れていることがわかった。容量については、再定式化によって計算精度の向上する場合と低下する場合とがあった。しかし、数値写像の相対誤差の最大値が無遠点ではなく境界上に現れるという意味で、いずれの定式化でも十分な計算精度を得ることができる。

2 重連結領域の場合にも外部領域の場合と似た議論が可能である [9]。

数値等角写像の方法として著名な第 1 種 Fredholm 型積分方程式法の 2 つの定式化の間にこのような違いが存在することは重要である。

## 参考文献

- [1] Symm, G.T.: An integral equation method in conformal mapping, Numer. Math., Vol.9, pp.250-258, 1966.
- [2] Symm, G.T.: Numerical mapping of exterior domains, Numer. Math., Vol.10, pp.437-445, 1967.
- [3] Symm, G.T.: Conformal mapping of doubly-connected domains, Numer. Math., Vol.13, pp.448-457, 1969.
- [4] Hayes, J.K., Kahaner, D.K. and Kellner, R.G.: An improved method for numerical conformal mapping, Math. Comput., Vol.26, No.118, pp.327-334, 1972.
- [5] Gaier, D.: Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung, Math. Z., Vol.147, pp.113-129, 1976.
- [6] Gaier, D.: Das logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete, E.B. Christoffel, The Influence of his Work on Mathematics and the Physical Sciences (P.L. Butzer and F. Fehér, eds.), pp.290-303, Birkhäuser, Basel, 1981.
- [7] Hough, D.M. and Papamichael, N.: The use of splines and singular functions in an integral equation method for conformal mapping, Numer. Math., Vol.37, pp.133-147, 1981.
- [8] Hough, D.M. and Papamichael, N.: An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, Numer. Math., Vol.41, pp.287-307, 1983.

- [9] 天野 要: 積分方程式法による数値等角写像のための Symm と Hough & Papamichael の定式化の比較, 情報処理学会論文誌, Vol.35, No.2, 1994 (掲載予定).