数理解析研究所講究録
第 880 巻 1994 年 105-111

非線形楕円型境界値問題の不安定解に対する有限要素近似*

学習院大学理学部　　水谷 明
Mizutani Akira

次の非線形楕円型境界値問題を考える。

$$-\Delta u = f(u), \quad u \geq 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{2}$$

ここで、$\Omega \subset \mathbf{R}^2$は凸多角形領域とし、$f(u)$ に関して、$f \in C^1(\overline{\mathbf{R}}_+;\mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{R})$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(+\infty) = f'(+\infty) = +\infty$, $\frac{d}{du}\{f(u)/u\} > 0$ $(u > 0)$, $\lim_{u\to+\infty}\{\log f(u)/u^\alpha\} = 0$ $(1 < \exists\alpha < 2)$, $F(u) \equiv \int_0^u f(s)ds \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon)f(u)u$ $(0 < \exists\varepsilon < \frac{1}{2}$, $u\sim$十分大) を仮定する。
fの典型例としては、$f(u) = u^p$ $(p>1)$、$f(u) = e^u - 1 - u$ がある。

境界値問題 (1) (2) は、安定な自明解 $u \equiv 0$ の他に、不安定な解 $\overline{u} > 0$ を持つことが知られている。エネルギー $J(v)$ を、
$J(v) = \frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 - \int_\Omega F(v)dx$ $(v \in H_0^1(\Omega))$ により定める。集合 $\mathcal{N}$を、$\mathcal{N} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \| \nabla v \|^2 = (f(v), v),\ v \geq 0 \text{ in } \Omega\}$ とおくと、$\mathcal{N}$ は (1) (2) の不安定解をすべて含み、安定解を含まない。

Nehari[1] による基本的な結果は次の通りである。
『$\mathcal{N}$ の中で $J(v)$ を最小にする不安定解 $u \in \mathcal{N}$ が存在する：$J(u) = \inf_{v\in\mathcal{N}} J(v)$ $(= d > 0)$』　（この解 u をエネルギー最小解という。）

以前、この事実に基づき、逆巾法による反復列を用いて、不安定解を構成した ([2,3])。本報告では、その有限要素近似について考える。

§有限要素近似

証明の都合上、上記仮定に加えて、

ある $p > 1$ があって、$f(\lambda s) \geq \lambda^p f(s)$ $\quad (\lambda \geq 1,\ 0 \leq s < +\infty)$

を仮定する。上で述べた典型的な具体例はこの仮定を満たしている。

---

*鈴木貴氏（愛媛大学理学部）との共同研究である。

Ωの3角形分割$\{\tau_h\}_{h>0}$は「正則な」3角形分割で、"inverse assumption"を満たすものとする（用語については、例えばCiarlet[4]を参照）。$V_h \subset H_0^1(\Omega)$を通常の区分的1次式からなる有限要素空間とし、$\mathcal{N}_h = \mathcal{N} \cap V_h$とおく。

まず各$h > 0$に対して近似解$v_h \in \mathcal{N}_h$を構成する。

アルゴリズム（ＩＰＭ）

hによらぬ$v_0 = v_{0,h} \in \mathcal{N} \cap L^\infty(\Omega)$から出発し、$v_{j,h} \mapsto v_{j+1,h} \in \mathcal{N}_h$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$を次のように定める。

1. $(\nabla w_h, \nabla \chi_h) = (f(v_{j,h}), \chi_h)$ $(\forall \chi_h \in V_h)$の解を$w_h \in V_h$とする。
2. w_hの定数倍で$\mathcal{N}_h$の元が唯一つ存在するのでそれを$v_{j+1,h}$とする。

反復列$\{v_{j,h}\}_{j=1}^\infty$のある適当な部分列はある元$v_h \in \mathcal{N}_h$に収束する。このv_hを$h > 0$に対する近似解とする。 □

このようにして定めた$\{v_h\}_{h>0}$に対して次が成り立つ。

定理　$\{v_h\}_{h>0}$の任意の部分列は、適当な不安定解v_0に（$H^1(\Omega)$と$L^\infty(\Omega)$のノルムに関して）収束する部分列$\{v_{h_k}\}_{k=1}^\infty$をもつ。
特に、$J(v_{h_k}) \to d$ならば、v_0はエネルギー最小解である。

注意1　『Ωが非凸多角形領域の場合、3角形分割の仮定に"acute type"を追加すれば、上記定理がそのまま成立する』ことが最近分かった。

注意2　[3]に数値計算の結果と考察を示してある。
実際の計算では丸め誤差が避けられないので、上の方法では、エネルギー最小解（の近似）以外の不安定解は捕らえられないようである。

定理の証明概略

☆ 記号と定義

$X = H_0^1(\Omega)$, $X_+ = \{v \in X \mid v \geq 0 \text{ in } \Omega\}$, $\mathrm{V_{h+}} = \{\mathrm{u_h} \in \mathrm{V_h} \mid \mathrm{u_h} \geq 0 \text{ in } \Omega\}$とおく。

作用素$\tilde{T} : X_+ \setminus \{0\} \to \mathcal{N}$を次のように定める。

1. $v \in X_+ \setminus \{0\}$に対して、
$-\Delta w = f(v)$ in Ω, $w = 0$ on $\partial\Omega$　の解を$w \in X_+$とする。
2. wの定数倍λwで$\mathcal{N}$に属するものが唯一つあるので、それを$\tilde{T}v$とする。

作用素 $T:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ は $T=\tilde{T}|_{\mathcal{N}}$ により定める。

Tの有限要素版を $T_h:\mathcal{N}_h\to\mathcal{N}_h$とする。

従って、アルゴリズム（ＩＰＭ）の反復列は、 $v_{j+1,h}=T_h v_{j,h}\quad(j\geq 1)$ と書ける。

☆ 反復列 $\{v_{j,h}\}$ および近似解 $\{v_h\}$ の性質

命題 1 jと h に無関係な定数 $r>0$ が存在して、

$$r\leq\|\nabla v_{j,h}\|_{L^2(\Omega)}\leq r^{-1}$$

が成り立つ。

証明 [2] と同様な議論による。 □

命題 2 $\{v_{j,h}\}$ は一様有界である： $\exists M>0,\quad \|v_{j,h}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq M$

証明 アルゴリズム（ＩＰＭ）より

$$(\nabla v_{j+1,h},\nabla\chi_h)=\lambda_{j+1,h}(f(v_{j,h}),\chi_h)\qquad(\forall\chi_h\in V_h)$$

となる正の数$\lambda_{j+1,h}$が一意的に存在する。

ここで特に $\chi_h=v_{j,h}$とおくと

$$\lambda_{j+1,h}=\frac{(\nabla v_{j+1,h},\nabla v_{j,h})}{\|\nabla v_{j,h}\|^2}\leq\frac{\|\nabla v_{j+1,h}\|}{\|\nabla v_{j,h}\|}\leq r^{-2}$$

従って $\{\lambda_{j,h}\}$ は一様有界である。

$v_{j+1,h}\in\mathcal{N}_h$は

$$-\Delta u=\lambda_{j+1,h}f(v_{j,h})\quad\text{in }\Omega,\quad u=0\quad\text{on }\partial\Omega$$

の有限要素解であるので

$$\exists C_1>0\quad\text{s.t.}\quad\|v_{j+1,h}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_1\lambda_{j+1,h}\|f(v_{j,h})\|_{L^2(\Omega)}\tag{3}$$

Trudinger の不等式より

$$\exists\gamma>0\quad\text{s.t.}\quad\|u\|_{L_{\phi^*}(\Omega)}\leq\gamma\|\nabla u\|\quad(\forall u\in \mathring{W}_0^{1,2}(\Omega))\tag{4}$$

但し、$\phi(s) \equiv \exp(s^2) - 1$, $\| u \|_{L_{\phi^*}(\Omega)} \equiv \inf\{k > 0; \int_\Omega \phi(\frac{u}{k})dx \leq 1\}$
である。
命題 1 と (4) より

$$\| v_{j+1,h} \|_{L_{\phi^*}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{r}$$

$0 < \eta < \frac{r}{\gamma}$ を満たすηを固定すると $f(s)$ の仮定より

$$\exists C_\eta > 0 \quad \text{s.t.} \quad f(s)^2 \leq C_\eta(\exp(\eta s^2) - 1) \quad (0 \leq \forall s < \infty) \tag{5}$$

(3) と (5) より

$$\| v_{j+1,h} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \cdot r^{-2} \cdot \sqrt{C_\eta}$$

が成り立つ。 □

$$-\Delta w = f(v_h) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad w = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{6}$$

の解を $w = w^{(h)} \in X_+$ とする。その有限要素解が $v_h \in \mathcal{N}_h$ である。
通常の誤差評価と命題 2 より

$$\exists C_2 > 0 \qquad \| w - v_h \|_{L^2(\Omega)} + h \| \nabla(w - v_h) \|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2$$

が成り立つ。

命題 3 (6) の解 $w^{(h)}$ に対して、$\lambda w^{(h)} \in \mathcal{N}$ を満たす唯一の正の数λを$\lambda^{(h)}$と書くと

$$\lim_{h \to 0} \lambda^{(h)} = 1$$

が成り立つ。

証明　$w^{(h)}$を簡単のため w と書く。
　$\lambda^{(h)} w \in \mathcal{N}$は

$$\int_\Omega \frac{f(\lambda^{(h)} w)}{\lambda^{(h)} w} w^2 dx = \| \nabla w \|^2 \tag{7}$$

と同等である。
(7) を満たす$\lambda^{(h)} > 0$ の一意存在は知られている ([2]) ので

「$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < h < h_0 \text{ and } |\lambda - 1| \geq \varepsilon \Longrightarrow \int_\Omega \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx \neq \| \nabla w \|^2$ 」

を示せばよい。

$\lambda \geq 1+\varepsilon$のとき

$$\frac{f(\lambda s)}{\lambda s} \geq \frac{\lambda^p f(s)}{\lambda s} \geq (1+\frac{p-1}{2}\varepsilon)\frac{f(s)}{s}$$

従って

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx - \|\nabla w\|^2 \\
\geq\ & (1+\frac{p-1}{2}\varepsilon)(f(w),w) - \|\nabla w\|^2 \\
=\ & (1+\frac{p-1}{2}\varepsilon)\{(f(w),w)-(f(v_h),v_h)\} + \frac{p-1}{2}\varepsilon(f(v_h),v_h) + (\|\nabla v_h\|^2 - \|\nabla w\|^2) \\
\geq\ & -(1+\frac{p-1}{2}\varepsilon)\ |(f(w),w)-(f(v_h),v_h)| + \frac{p-1}{2}\varepsilon \|\nabla v_h\|^2 - |\ \|\nabla w\|^2 - \|\nabla v_h\|^2\ | \\
\geq\ & \frac{p-1}{2}\varepsilon r^2 - \mathrm{const}.h
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\exists h_0 = h_0(\varepsilon) > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < h < h_0 \text{ and } \lambda \geq 1+\varepsilon \Longrightarrow \int_\Omega \frac{f(\lambda w)}{\lambda w} w^2 dx > \|\nabla w\|^2$$

$\lambda \leq 1-\varepsilon$のときも同様。 □

命題 4 $\lim_{h\to 0} \|Tv_h - T_h v_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$

証明 命題1、3と等式

$$Tv_h - T_h v_h = \lambda^{(h)}(w^{(h)} - v_h) + (\lambda^{(h)} - 1)v_h$$

より成り立つ。 □

定理の証明にはいる。

命題1から $\{v_h\}_{h>0}$の任意の部分列に対して、$H_0^1(\Omega)$ で弱収束する部分列 $\{v_{h_k}\}_{k=1}^\infty$がとれる：

$$v_{h_k} \rightharpoonup w \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega) \tag{8}$$

Rellich の定理から

$$v_{h_k} \to w \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{9}$$

(9) と命題 2 から

$$\| w \|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \tag{10}$$

従って

$$f(v_{h_k}) \to f(w) \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{11}$$

$$F(v_{h_k}) \to F(w) \quad \text{in } L^1(\Omega) \tag{12}$$

が成り立つ。

$$B(v) \equiv \frac{1}{2}(f(v), v) - \int_\Omega F(v)dx \qquad (v \in X_+)$$

とおくと、(11)(12) より

$$d \leq J(v_{h_k}) = B(v_{h_k}) = \frac{1}{2}(f(v_{h_k}), v_{h_k}) - \int_\Omega F(v_{h_k})dx \to B(w)$$

ゆえに $w \neq 0$ である。

命題 5 $v_0 = \tilde{T}w$とおくと、v_0は (1)(2) の不安定解で

$$v_{h_k} \to v_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ。

証明　$\tilde{T}$が完全連続である ([2]) ことと命題 4 および等式

$$v_{h_k} - v_0 = (T_{h_k} v_{h_k} - T v_{h_k}) + (T v_{h_k} - \tilde{T} w)$$

より　$v_{h_k} \to v_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$ が成り立つ。

また、

$$T v_0 - v_0 = (T v_0 - T v_{h_k}) + (T v_{h_k} - \tilde{T} w) \to \overset{0}{\cancel{w}} \quad (k \to \infty)$$

より　$T v_0 = v_0 \in \mathcal{N}$、従って v_0は不安定解である。 □

命題 6　$\| v_{h_k} - v_0 \|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ が成り立つ。

証明

$$-\Delta u = f(v_0) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の解が $v_0 \in \mathcal{N}$である。その有限要素解を $w_{h_k} \in \mathcal{N}_{h_k}$ とすると、例えば [4]p.172 より

$$\| v_{h_k} - v_0 \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| v_{h_k} - w_{h_k} \|_{L^\infty(\Omega)} + \| w_{h_k} - v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$\leq C \, \| f(v_{h_k}) - f(v_0) \|_{L^2(\Omega)} + \| w_{h_k} - v_0 \|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

□

参考文献

[1] Nehari, Z., *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans.Amer.Math.Soc. 95 (1960), 101-123.

[2] Mizutani, A., and Suzuki, T., *On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic equations*, (to appear)

[3] 水谷 明, *On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic boundary value problems*, 数理解析研究所講究録 834 (1993), 1-12.

[4] Ciarlet, Ph.G., "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland (1978)