

## 区間解析を用いた非線形常微分方程式に対する 境界値問題の解の存在の数値的検証法

大石 進一 (Shin'ichi Oishi)

早稲田大学理工学部情報学科  
oishi@oishi.info.waseda.ac.jp

### 1 はじめに

本稿では次の非線形常微分方程式の境界値問題を扱う:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t), \quad t \in J = [-1, 1], \\ g(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし  $x$  は  $n$ -次元ベクトル,  $f(x, t)$  は  $n$ -次元ベクトル値関数である. また,  $g$  は  $n$ -次元ベクトル値汎関数である. 例えば,  $-1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ ,  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) を与えられた  $n \times n$  正方行列,  $b$  を  $n$ -次元定ベクトルとするとき

$$g(x) = \sum_{i=0}^N B_i x(t_i) - b \quad (2)$$

と選べば多点境界値問題となる. 特に,  $N = 0$ ,  $B_0$  を単位行列とすれば Cauchy 問題に,  $N = 1$  とすれば 2 点境界値問題となる. また,

$$g(x) = x(-1) - x(1) \quad (3)$$

と選べば周期的境界値問題となる.

通常, このような非線形境界値問題を解析的に解くことは難しいので, 数値計算により近似解  $c(t)$  を求めることが多い. しかし, 数値解が得られてもその近くに問題の真の解が存在するか否かや, 数値解がどの程度真の解に近いかについては必ずしも明らかでないことが多い. そこで, 近似解  $c(t)$  の近くに真の解が存在することの十分条件を明らかにし, 近似解  $c(t)$  と真の解との間のシャープな誤差評価を与えることは大変重要な数値解析の問題となる.

したがって, この問題は多くの著者によって研究されてきた. 中でも故占部実教授は簡易ニュートン法の収束定理である“Urabe の定理” [1] を用いて非線形境界値問題 (1) の解の存在定理を導いた [2]. これは 1966 年のことであり, 解の精度保証理論が注目されている現在から 30 年も前にこのような先駆的な研究が行われていたことは注目すべきことである. Urabe の結果は大変応用範囲が広く, Urabe 理論を用いて式 (1) の形の多くの問題に対してその数値解の誤差評価が Urabe, 篠原能材 [3], Norio Yamamoto, Fujii [4], Shintani and Hayashi [5] 及び Hayashi [6] らによって行われ, その有効性が実証されている. 更に, 本研究集会の研究代表者である山本哲朗教授は擬

距離空間の理論を用いて、式 (1) の数値解の誤差をベクトル  $x$  の各成分ごとに最大値ノルムで評価する、成分毎評価法を与え、シャープな誤差評価ができることを示している [7].

本稿では、この方法を更に進め、計算機によって、近似解  $c(t)$  と真の解  $x^*(t)$  の各  $t$  毎の誤差  $|c(t) - x^*(t)|$  の評価も可能であることを報告する. 具体的には、まず Krawczyk 作用素の無限次元への拡張が式 (1) に対する Urabe の簡易ニュートン作用素に対して定義可能であることを示す. 次に、Caprani, Madsen, Rall[8] らによって展開された区間関数の積分理論を用いて、Urabe の簡易ニュートン作用素を近似解  $c(t)$  を中心とする閉集合に作用させたときの像が計算機によりシャープに評価できることを示す. 本稿で示す手法の特徴をまとめると次のようになる:

1. 事後誤差評価を行う対象となる数値解  $c(t)$  に対しては連続性しか要求しない. したがって、離散変数法で得られた解を連続関数に補間した近似解や有限要素法で得られる区分的に滑らかな近似解などに適用可能であるなど適用範囲が広い.
2. 本手法は Urabe の簡易ニュートン作用素に対して、近似解  $c(t)$  を中心とする適当な閉集合上で、Banach の縮小写像原理の成立条件が満たされるか否かを計算機によって直接的に検証する手法である. したがって、非線形常微分方程式の右辺  $f(x, t)$  と境界条件  $g(x)$  及び近似解  $c(t)$  を検証ソフトウェアに入力するだけで、ほぼ自動的に検証が進められる. この意味で、個々の問題に対して、解析的な議論を個別に進める必要の極めて少ない自己検証的算法となっている.
3. 簡易ニュートン作用素の取り方を工夫する事により数学的に厳密な意味での近似解の精度保証ができる. すなわち、検証が成功したときには近似解  $c(t)$  の近傍に真の解が存在することが示せ、かつその近傍の大きさが厳密に評価できる.
4. 簡易ニュートン作用素の像を直接的に評価する手法で、過大評価された埋め込み定数などは用いないため、多くの場合シャープな評価が得られる. また、計算量を削減して大ざっぱな評価を行うこともできる.
5. 評価に利く部分としては離散化誤差の影響が大きく、丸め誤差の影響はこれに比して小さいため、既存の浮動小数点演算を利用した区間演算が活用でき、近似解を得る手間の数倍の手間でその精度保証ができると予想される.
6. 解の反復改良ができる.

このように本稿で述べる手法は多くの利点を有するものと考えられる. 本稿の最後ではこれらの点の幾つかを簡単な例により例証する.

著者の研究室の柏木雅英氏は Krawczyk 作用素を用いて有限次元非線形方程式の解の計算機による検証システムを構築した (1994 年 3 月早稲田大学理工学研究科博士学位論文). このシステムは有限次元非線形方程式を記述する関数と近似解をプログラムの形で入力するだけで解の存在検証を行うものである. 本稿は非線形常微分方程式系の境界値問題を取り扱うときにも問題を記述

する関数  $f, g$  及び近似解  $c$  をプログラムとして記述して入力するだけで,  $c$  の近傍に真の解が存在するか否かをほぼ自動的に検証するプログラムが作成可能であることを示したものである. また, このような計算機上での検証を行うためには, 区間演算, 自動微分のインプリメンテーション, Chebyshev 展開の自動導出などかなりソフトウェア工学的にも難しい問題が存在する. この点に関しては著者の研究室では David I. Bell が作成した Calc というフリーソフト上にこれらの機能を展開している. Calc は operator overloading という object 指向言語の機能を備えた計算用簡易言語であるが, 柏木氏は精度保証付き数値計算に適した形に Calc を整備し, これを先程の検証システムを構築する際に利用している. 本稿での議論により, 区間関数の積分理論を用いれば, Calc のもつ以上で述べたような機能によって, 非線形常微分方程式系の境界値問題の解のほぼ自動的な存在検証システムの作成が可能であることが示される.

また, 本稿の内容は, 講演時の内容からは大きく発展しているが, そのときの問題意識の延長線上で得られたものであるのでここに報告させて頂く.

## 2 区間解析に基づく事後誤差評価法

本稿では問題 (1) に対し, 数値的な近似解  $c(t)$  が与えられているものとする. ただし, 近似解に対して連続性のみを仮定し, その滑らかさは要求しないことにする. この仮定は, 通常数値解法によって得られる近似解が必ずしも滑らかな関数でないことを反映させるためである. 例えば, 離散変数法によって得られた離散解を区分的に多項式補間したような近似解は区分的に滑らかな関数となる. この仮定の下で, 近似解  $c(t)$  の近くに式 (1) の真の解が存在するための十分条件を区間解析に基づき与える. 更に, 同時に  $c(t)$  と真の解の間のシャープな誤差評価も得られることを示す.

$X = C[-1, 1; V]$  で区間  $J = [-1, 1]$  上で連続な実  $n$ -次元ベクトル値関数  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  の作る Banach 空間を表す. ノルムはスケーリング最大値ノルム

$$\|x\|_u = \max_{t \in J} |x(t)|_u, \quad (4)$$

で与える. ただし,

$$|x(t)|_u = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i(t)|}{u_i}. \quad (5)$$

ここで,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  は定  $n$ -次元ベクトルで正の成分を持つものとする ( $u_i > 0$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ ).  $Y = X \times R^n$  を次のノルムをもつ Banach 空間とする:

$$\|y\|_Y = \max(\|u\|_c, \|e\|) \text{ for } y = (u, e) \in Y. \quad (6)$$

$D = C^1[-1, 1; V]$  を  $t$  について一回連続微分可能な実  $n$ -次元ベクトル値関数  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  の作る Banach 空間とする.  $C^1[-1, 1; M]$  で区間  $J$  上の一回連続微分可能な  $n \times n$  行列値関数で行列の作る Banach 空間とする. 以下, 断らない限り, ベクトルは  $n$ -次元ベクトル, 行列は  $n \times n$  行列を表すものとする.

以下、本稿では近似解  $c(t)$  は  $X$  の要素と仮定する。ここで、作用素  $F: D \subset X \rightarrow Y$  を次のように定義する：

$$Fx = \left( \frac{dx}{dt} - f(x, t), g(x) \right). \quad (7)$$

すると、境界値問題 (1) は次の作用素方程式に書きかえられる：

$$Fx = 0. \quad (8)$$

以下、 $f(x, t): X \rightarrow X$  と  $g(x): X \rightarrow R^n$  は連続 Fréchet 微分可能とする。  $f$  の  $x$  に関するヤコビ行列を  $f_x(x, t)$ 、  $g$  の  $x$  に関する Fréchet 微分を  $g'(x)$  で表わすものとする。このとき、  $F: D \rightarrow Y$  は Fréchet 微分可能となり、その Fréchet 微分  $DF(x): D \rightarrow Y$  は次のように与えられる：

$$DF(x)h = \left( \frac{dh}{dt} - f_x(x, t)h, g'(x)h \right). \quad (9)$$

ここで、  $h \in D$ 。

$f_x(c, t)$  と  $g'(c)$  を近似する区間  $J$  上で連続な実行列値関数  $\tilde{A}(t)$  とベクトル値線形汎関数  $l$  に対して次の線形作用素を定義する：

$$\tilde{L}h = \left( \frac{dh}{dt} - \tilde{A}(t)h, lh \right). \quad (10)$$

$\tilde{\Phi}(t)$  を次の線形斉次系の基本解行列とする：

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{A}(t)z. \quad (11)$$

ただし、

$$\tilde{\Phi}(-1) = I. \quad (12)$$

この基本解行列を解析的に求めることは一般には困難であり、数値計算により近似的にしか求められないことが多い。そこで  $\Phi(t) \in C^1[-1, 1; M]$  をその近似関数とする。以下、  $\Phi(t)$  は次の条件を満たすように規格化されているとする：

$$\Phi(-1) = I. \quad (13)$$

ここで、

$$A(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Phi^{-1}(t) \quad (14)$$

とおく。  $A(t)$  は  $\tilde{A}(t)$  の近似関数と考えられる。すると

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad (15)$$

及び

$$\Phi(-1) = I \quad (16)$$

が成立する。これは $\Phi(t)$ が $A(t)$ によって定義される斉次系の厳密な基本解行列となっていることを示している。

注意 もともと、 $\bar{A}(t)$ は $f_x(c(t), t)$ の近似行列であったから、 $\bar{A}(t)$ に対する近似関数 $A(t)$ に関する厳密な基本解行列が分かることでも、以下の議論で示されるように、厳密な精度保証ができるようになる。これは、例えば Hayashi[6]が近似的な基本解行列しか求められないことを前提にして議論を進めているのに対して、一種の発想の転換であるが議論が単純化される利点がある。□

$A(t)$ を使って次の作用素を定義する：

$$Lh = \left( \frac{dh}{dt} - A(t)h, lh \right) \text{ for } h \in D. \quad (17)$$

$L^{-1}$ の存在に関する次の補題は Urabe[2]による：

補題 (Urabe)  $\Phi(t)$ を次の線形斉次系の基本解行列とする：

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z. \quad (18)$$

ただし、

$$\Phi(-1) = I. \quad (19)$$

$G = l[\Phi(t)]$ を行列でその列ベクトルが $l[\phi_i(t)]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ で与えられるものとする。ただし、 $\phi_i(t)$ はその列ベクトルが行列 $\Phi(t)$ の列ベクトルで与えられるものとする。このとき $G$ が正則であることと、式(10)によって定義される $L$ が線形逆作用素 $L^{-1}$ を持つことは同値となり、

$$L^{-1}(\phi, u) = H\phi + Su \quad (20)$$

が成立する。ただし、 $\phi \in X$ ,  $u \in R^n$ ,  $H$ は $X$ から $D \subset X$ への線形作用素で

$$H\phi = \Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)\phi(s)ds - \Phi(t)G^{-1}l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)\phi(s)ds] \quad (21)$$

と定義される。また、 $S$ は $R^n$ から $D$ への線形作用素で $Sv = \Phi(t)G^{-1}v$ と与えられる。□

本節では以下 $G$ は正則と仮定する。ここで、Urabe[2]が考えた簡易ニュートン作用素 $k: X \rightarrow X$

$$k(x) = L^{-1}(L - F)x = L^{-1}(f(x, t) - A(t)x, l(x) - g(x)). \quad (22)$$

を導入する。次の節で $x^* \in X$ が $k$ の不動点となるとき、それは自動的に $D$ の要素となって $Fx^* = 0$ を満たすことを示す。別の言い方をすると $k(x) = x$ は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - A(t)x &= f(x, t) - A(t)x \\ l(x) &= l(x) - g(x) \end{aligned} \quad (23)$$

と書かえられ、式 (1) と同値であることがわかる。

### 注意

1. 上式または  $k$  が定義できるためには  $x$  が  $C[-1, 1; V]$  の要素であればよい。
2. Fujii[4], Shintani-Hayashi[5], Hayashi[6] では式 (1) と同値な混合積分方程式として

$$\begin{aligned} x(t) - x(-1) - \int_{-1}^t f(x(s), s) ds &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

が考えられている。□

以下では  $G$  が正則という仮定の下で、式 (1) と同値な (23), または, Banach 空間  $X$  上の不動点問題  $k(x) = x$  を考えていく。

作用素  $k$  が近似解  $c(t)$  を含む閉集合上に不動点を持つことを計算機で検証するために Krawczyk 作用素を無限次元に拡張する。そのために、簡単に区間関数の理論を概観する。通常、区間解析では区間は実閉区間を指す：

$$X = [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}. \quad (25)$$

区間  $J$  上の区間関数  $Y(t)$  は

$$Y(t) = [\underline{y}(t), \overline{y}(t)]. \quad (26)$$

と定義される。実関数  $\underline{y}(t)$  と  $\overline{y}(t)$  は端点関数と呼ばれる。本稿では端点関数は  $C[-1, 1; V]$  の要素とする。また、区間関数  $Y(t)$  を  $y \in C[-1, 1; V]$  で  $\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \overline{y}(t)$  を満たすものの全体と考える。したがって、時に区間関数  $Y(t)$  と  $C[-1, 1; V]$  の部分集合  $\{y(t) \in C[-1, 1; V] | \underline{y}(t) \leq y(t) \leq \overline{y}(t)\}$  を同一視することがある。区間関数と区間関数の加減乗除は各点  $t$  ごとの加減乗除として定義する。区間関数の積分の理論は Caprani, Madsen, Rall[8] によって展開されている。彼らは

$$\int_{-1}^t Y(s) ds = \left[ \int_{-1}^t \underline{y}(s) ds, \int_{-1}^t \overline{y}(s) ds \right]. \quad (27)$$

という定義を与えている。ただし、 $\int$  は lower Darboux integral で  $\overline{\int}$  は upper Darboux integral である。

注意 lower Darboux integral は各  $t$  において  $\underline{y}(t)$  より値の小さくなる階段関数の積分値の上限として定義される。同様に、upper Darboux integral は各  $t$  において  $\overline{y}(t)$  より値の大きくなる階段関数の積分値の下限として定義される。□

以下、区間関数の積分は彼らの定義を採用することにし、区間積分の評価には階段関数を用いた評価を用いることがある。

ベクトル値区間関数, 行列値区間関数はその成分が区間関数となるものとして定義される.  $Y(t)$  がベクトル値または行列値区間関数とするとき  $|Y(t)|$  は要素として  $|Y_i(T)|$  または  $|Y_{ij}(t)|$  をもつベクトル値または行列値関数とする. ただし,  $a$  と  $b$  を実数として, 区間  $[a, b]$  に対して,  $||[a, b]$  は次のように定義される:

$$|[a, b]| = \max(|a|, |b|). \quad (28)$$

また, Mid 関数は次のように定義される

$$\text{Mid}(Y(t)) = \frac{\bar{y}(t) + \underline{y}(t)}{2}. \quad (29)$$

以上が, 本稿で必要となる区間関数の理論の概要である.

ここで  $T(t)$  を  $\text{Mid}(T(t)) = c(t)$  となる区間関数とする. Krawczyk 作用素を無限次元に拡張した次の作用素を定義する:

$$K(T) = k(c) + M(T - c), \quad (30)$$

ただし,

$$M = L^{-1}(L - DF(T)) \text{ 及び } c = \text{Mid}(T). \quad (31)$$

とする. このとき, 次の定理が成立する:

**定理 1**  $T(t)$  を区間関数で  $\text{Mid}(T(t)) = c(t)$  を満たすものとする. もし,

$$K(T(t)) \subset T(t) \quad (32)$$

及び

$$\|M\|_u < 1, \quad (33)$$

が成立すると  $k$  の不動点  $x^*$  が唯一つ  $T(t) \subset X$  に存在する. この  $x^*$  は  $D$  に属し  $Fx^* = 0$  を満たす. 更に, この解は孤立解, すなわち,  $DF(x^*)$  は可逆である.  $\square$

**注意** 条件 (33) は  $K(T(t))$  が  $T(t)$  の真部分集合であれば自動的に満たされる. また, 条件 (33) は次の形で検証されることがある:

$$K(T(t)) - c(t) \subset T(t) - c(t). \quad \square \quad (34)$$

この定理の証明は次節で与える. 本節の残りでは  $M(T - c)$  を計算に都合がよいように変形しておく. そのために次の性質を注意する:

**性質**  $A$  を  $m \times n$  区間行列,  $B$  を  $n \times p$  区間行列とする.  $\text{Mid } B = 0$  であれば, 次が成り立つ:

$$AB = |A|B = [-|A||B|, |A||B|] = [-1, 1]|A||B|. \quad \square \quad (35)$$

ここで,  $\text{Mid}(T - c) = 0$  に注意する. この補題より, 任意の区間関数  $T(t)$  について

$$\begin{aligned}
 M(T(t) - c) &= \Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s) R(s) (T(s) - c(s)) ds \\
 &\quad - \Phi(t) G^{-1} l [\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s) R(s) (T(s) - c(s)) ds] \\
 &\quad + \Phi(t) G^{-1} (l - g'(T(t)))(T(t) - c(t)) \\
 &= [-1, 1] |\Phi(t)| \int_{-1}^t |\Phi^{-1}(s)| |R(s)| |T(s) - c(s)| ds \\
 &\quad - \Phi(t) G^{-1} l [ [-1, 1] |\Phi(t)| \int_{-1}^t |\Phi^{-1}(s)| |R(s)| |T(s) - c(s)| ds ] \\
 &\quad + \Phi(t) G^{-1} (l - g'(T(t)))(T(t) - c(t)), \tag{36}
 \end{aligned}$$

が成立する. ただし,

$$R(t) = Df(T(t), t) - A(t). \tag{37}$$

### 注意

1.  $M$  の上に示した形は文献 [7] において山本哲朗教授の導入した  $K$  という量に関する公式と非常に似た形になっている. そこでは, 区間解析は用いられていないし, 例えば絶対値記号  $|\cdot|$  の意味も違うが, 成分毎の評価を進めることによって, 自然な区間解析解釈ができるまでに議論が完成されているものと解釈できる.
2.  $c(t) \in C[-1, 1; V]$  及び  $\Phi(t) \in C^1[-1, 1; M]$  であれば  $M$  が well-defined であることに注意する. したがって, 広いクラスの数値計算スキームによって得られた  $c(t)$  及び  $\Phi(t)$  に対して  $M$  が well-defined となる.  $\square$

次に, 計算機により  $M$  を計算するための方法を示そう. 今,  $c(t)$  はその導関数が区分的に連続となる区分的に滑らかな関数であると仮定する. すると区間  $[-1, 1]$  の分割

$$[-1, 1] = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k, \quad (S_i \cap S_j = \emptyset \text{ if } i \neq j), \tag{38}$$

で  $c(t)$  が各部分区間  $S_i$  の上で滑らかとなるものが取れる. この分割を利用して, 次のような評価ができる:

$$\begin{aligned}
 M &\subset \Phi(t) \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(S_i) R(S_i) (T - c)(S_i) \\
 &\quad - \Phi(t) G^{-1} l [\Phi(t) \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(S_i) R(S_i) (T - c)(S_i)] \\
 &\quad + \Phi(t) G^{-1} (l - g'(T(t)))(T - c) \\
 &\subset \sum_{j=1}^k \Phi(S_j) \chi(t) \left\{ \sum_{i=1}^j \Phi^{-1}(S_i) R(S_i) (T - c)(S_i) \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -G^{-1}l[\Phi(t) \sum_{i=1}^k \Phi^{-1}(S_i)R(S_i)(T-c)(S_i)] \\
& +G^{-1}(l-g'(\sum_{j=1}^k T(S_j)\chi_j(t)))(\sum_{j=1}^k (T-c)(S_j)\chi_j(t))\} \quad (39)
\end{aligned}$$

ただし,  $\chi_j(t)$  は集合  $S_j$  の特性関数で,

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1 & t \in S_j \\ 0 & t \notin S_j \end{cases} \quad (40)$$

### 3 定理 1 の証明

本節では, 前節に示した定理 1 の証明をする. 後半部分は文献 [2] における Main Theorem の証明から直接的に導かれる.  $T(t)$  を区間関数で  $\text{Mid}(T(t)) = c(t)$  を満たすものとする. 次の条件が満たされていると仮定しよう:

$$K(T(t)) \subset T(t) \quad (41)$$

及び

$$\|M\|_c < 1. \quad (42)$$

このとき,  $k: X \rightarrow X$  が  $T$  上で縮小的で,  $k(T) \subset T$  を満たすことを証明しよう.

まず,  $K(T) \subset T$  であることを示す. 最初に  $M(T-c)$  が  $X$  において凸で閉であることを注意する. 更に,  $k: X \rightarrow X$  の Fréchet 微分  $Dk(x): X \rightarrow X$  が次のように与えられる:

$$Dk(x)y = L^{-1}(L - DF(x))y = L^{-1}(f_x(x, t)y - A(t)y, l(y) - g'(x)y). \quad (43)$$

したがって  $x \in T$  に対して

$$\begin{aligned}
k(x) &= k(c) + \int_0^1 Dk(sx + (1-s)c)(x-c)ds \\
&\subset k(c) + M(T-c) \subset K \quad (44)
\end{aligned}$$

となる. ただし, 次の性質を用いた:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 Dk(sx + (1-s)c)(x-c)ds \\
& \subset \overline{\text{co}}\{Dk(sx + (1-s)c)(x-c) | 0 \leq s \leq 1\}. \quad (45)
\end{aligned}$$

ただし,  $\overline{\text{co}}$  は閉凸包を取る演算とする. これは  $K(T) \subset T$  を示している.

また, 明らかに,  $x \in T$  であれば,

$$Dk(x) \in M. \quad (46)$$

したがって条件 (42) より, 次式を得る:

$$\|Dk(x)\|_u < 1 \text{ for all } x \in T. \quad (47)$$

こうして  $k: X \rightarrow X$  が  $T$  上で Banach の縮小原理の条件を満たすことが分かる。したがって、縮小写像原理より作用素  $k$  の不動点  $x^*$  が  $T(t) \subset X$  に唯一存在することが分かる。

$x^*$  が  $k$  の不動点であることより、

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)(f(x^*(s), s) - A(s)x^*(s))ds \\ &\quad - \Phi(t)G^{-1}l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)(f(x^*(s), s) - A(s)x^*(s))ds] \\ &\quad + \Phi(t)G^{-1}(l(x^*) - g(x^*)). \end{aligned} \quad (48)$$

これから、

$$\begin{aligned} \frac{dx^*(t)}{dt} &= A(t)x^*(t) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)(f(x^*(t), t) - A(t)x^*(t)) \\ &= f(x^*(t), t) \end{aligned} \quad (49)$$

及び

$$\begin{aligned} l(x^*) &= l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)(f(x^*(s), s) - A(s)x^*(s))ds] \\ &\quad - l[\Phi(t)]G^{-1}l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)(f(x^*(s), s) - A(s)x^*(s))ds] \\ &\quad + l[\Phi(t)]G^{-1}(l(x^*) - g(x^*)) \\ &= l(x^*) - g(x^*). \end{aligned} \quad (50)$$

$$= l(x^*) - g(x^*). \quad (51)$$

を得る。(49) と (51) は  $x^*$  が (1) の解であることを示している。

次に、(1) の解の  $T$  における唯一性を示そう。 $\tilde{x}$  を (1) の別の解とする。すると、

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t), t) = A(t)\tilde{x}(t) + \{f(\tilde{x}(t), t) - A(t)\tilde{x}(t)\}, \quad (52)$$

より、 $\tilde{x}(t)$  は次式を満たすことがわかる：

$$\tilde{x} = L^{-1}(f(\tilde{x}(t), t) - A(t)\tilde{x}(t), l(\tilde{x}) - g(\tilde{x})) = k(\tilde{x}). \quad (53)$$

すなわち、 $\tilde{x}$  は  $k$  の不動点となる。 $k$  は  $T$  において唯一の不動点をもつから、 $x^* = \tilde{x}$ 。

最後に、 $x^*$  が孤立解であることを示す。 $\Phi^*(t)$  を次の線形斉次系の基本解行列とする：

$$\frac{dy}{dt} = f_x(x^*(t), t)y, \quad (54)$$

ただし、 $\Phi^*(0) = I$ 。

$$G^* = l[\Phi^*(t)] \quad (55)$$

とおく。 $G^*$  は特異とする。すると non-trivial な定ベクトル  $v$  が存在して  $G^*v = 0$  を満たす。

$$y(t) = \Phi^*(t)v \quad (56)$$

とおくと,  $y(t)$  は次を満たす:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + (f_x(x^*(t), t) - A(t))y(t) \quad (57)$$

$$l[y] = 0. \quad (58)$$

したがって, Urabe の補題より

$$y(t) = L^{-1}((f_x(x^*(t), t) - A(t))y, 0). \quad (59)$$

明らかに, この式の右辺は  $M$  に属す. したがって,

$$\|y\|_c < \kappa \|y\|_c \quad (60)$$

がある  $\kappa < 1$  について成立する. これは  $y = 0$  を意味する. したがって,  $\Phi^*(t)$  が区間  $J$  上で正則なことより  $v = 0$  が従う. これは矛盾. よって,  $x^*$  が孤立解であることが分かった. *Q.E.D.*

#### 4 事後誤差評価アルゴリズム

本節では, 近似解  $c(t)$  が与えられたとき, どのように  $T(t)$  を選べばよいかを論ずる. この問題も含め, 近似解  $c(t)$  と非線形境界値問題 (1) を定義するための  $f(x, t)$ ,  $g(x)$  が与えられたときに自動的に真の解の存在検証をするためのアルゴリズムの大枠を示す:

##### 非線形境界値問題の解の検証アルゴリズム

1.  $f_x(c(t), t)$  の近似関数  $\tilde{A}(t)$  を選ぶ.
2. 次の線形斉次系の基本解行列の近似関数  $\Phi(t)$  を計算する:

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{A}(t)y. \quad (61)$$

ただし,  $\Phi(-1) = I$  で  $C^1[-1, 1; M]$  に属する関数とする.

3. 次の関数を計算する:

$$A(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (62)$$

4.  $Dg(c)$  の近似ベクトル値線形汎関数  $l$  を選び, 次の定義する:

$$Lh = \left( \frac{dh}{dt} - A(t), l(h) \right). \quad (63)$$

5.  $l[\Phi(t)]$  を計算する. もし, これが特異であれば失敗. そうでなければ,  $G = l[\Phi(t)]^{-1}$  を計算する.

6.  $L^{-1}F(c)$  の区間包囲を次式によって計算する :

$$L^{-1}F(c) = -(I - \Phi(t)Gl)\Phi(t) \int_{-1}^t (f(c(s), s) - A(s)c(s))ds - \Phi(t)G(l(x) - g(x)) + c(t) \quad (64)$$

または,  $c$  が 1 回連続微分可能であれば

$$L^{-1}F(c) = (I - \Phi(t)Gl)\Phi(t) \int_{-1}^t \left( \frac{dc(s)}{ds} - f(c(s), s) \right) ds \Phi(t)Gg(x). \quad (65)$$

を用いることができる.  $S(t)$  を計算の結果得られた  $L^{-1}F(c)$  の区間包囲とする.

7.  $\rho$  を 1 より大きな定数とする.

$$u = \max_{-1 \leq t \leq 1} |S(t)|. \quad (66)$$

とスケーリングベクトルを選ぶ. そして,

$$T(t) - c(t) = \rho[-u, u] \quad (67)$$

と取る.

8.  $M = L^{-1}(f_x(T(t), t) - A(t))$  とおき, 次の条件を検証する :

$$\begin{aligned} -L^{-1}F(c) + M(T - c) &\subset T - c \\ \|M\|_u &< 1. \end{aligned} \quad (68)$$

もし, これらの条件が成立していることが確認されれば, 式 (1) の孤立解が  $T(t)$  に唯一存在することがわかる.

ここで, 近似解の列  $c_n$  で  $n \rightarrow \infty$  のとき  $c_n \rightarrow x^*$  を満たすものが計算できると仮定しよう. ただし,  $x^*$  は (1) の真の孤立解とする. このとき, 上のアルゴリズムを各  $c_n$  に適用したとき, 有限回の内に次の条件を満たす区間関数  $T(t)$  が計算されることを示そう :

$$\begin{aligned} -L^{-1}F(c) + M(T - c) &\subset T - c \\ \|M\|_u &< 1. \end{aligned} \quad (69)$$

$S_n$  を  $L_n^{-1}F(c_n)$  の区間包囲で  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |S_n(t) - L_n^{-1}F(c_n)(t)| \rightarrow 0 \quad (70)$$

を満たすとしよう. ただし,  $L_n$  は  $c_n$  に上記アルゴリズムを適用したときの  $L$  であるとする. また,  $M_n$  と  $T_n$  を  $S_n$  に付随する  $M$  と  $T$  としよ.  $\text{Mid}(T_n - c_n) = 0$  に注意する. このとき,  $-L_n^{-1}F(c_n) + M_n(T_n - c_n) \subset T_n - c_n$  を示すためには, 次を示せば十分である

$$|S_n(t)| + |M_n(T_n(t) - c_n(t))| < \rho u_n. \quad (71)$$

ここで,  $|S_n(t)| \leq u_n$  であることと  $\|M_n\|_{u_n} = \|M_n|_{u_n}\|_{u_n}$  を注意する. こうして, 問題は

$$u_n + \|M_n\|_{u_n} u_n < \rho u_n, \quad (72)$$

または

$$\|M_n\|_{u_n} < \rho - 1. \quad (73)$$

を示すことに帰着した. もし,  $\rho = 2$  とするとこの条件は条件  $\|M_n\|_{u_n} < 1$  と一致する. したがって, 以下  $\rho = 2$  とする. 以下の議論は  $\rho > 1$  であれば同様に成立する.

以下,  $\|L_n - DF(x^*)\| \rightarrow 0$  が  $n \rightarrow \infty$  において成立すると仮定する. この仮定の下で  $\|M_n\|_{u_n} < 1$  が十分大きな  $n$  について成立することを示そう. そのために,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|M_n\|_{u_n} \rightarrow 0$  となることを示そう. 十分大きな  $n$  で  $\|DF(x^*)^{-1}\|_{u_n} \|L_n - DF(x^*)\|_{u_n} < 1$  が満たされているとき

$$\|L_n^{-1}\|_{u_n} \leq \frac{\|DF(x^*)^{-1}\|_{u_n}}{1 - \|DF(x^*)^{-1}\|_{u_n} \|L_n - DF(x^*)\|_{u_n}} \leq \gamma \quad (74)$$

となる. ただし,  $\gamma$  は  $n$  によらない定数.

一方,

$$\begin{aligned} \|T_n - x^*\|_{u_n} &\leq \|T_n - c_n\|_{u_n} + \|c_n - x^*\|_{u_n} \\ &\leq \rho(\|L_n^{-1}F(c_n)\|_{u_n} + \|S_n - L_n^{-1}F(c_n)\|_{u_n}) + \|c_n - x^*\|_{u_n} \\ &\leq \rho(\gamma\|F(c_n)\|_{u_n} + \|S_n - L_n^{-1}F(c_n)\|_{u_n}) + \|c_n - x^*\|_{u_n} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (75)$$

これから,

$$\|DF(T_n) - DF(x^*)\|_{u_n} \rightarrow 0. \quad (76)$$

以上の議論より,

$$\begin{aligned} \|M_n\|_{u_n} &= \|I - L_n^{-1}DF(T_n)\|_{u_n} \\ &\leq \gamma\|L_n - DF(T_n)\|_{u_n} \\ &\leq \gamma(\|L_n - DF(x^*)\|_{u_n} + \|DF(x^*) - DF(T_n)\|_{u_n}) \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (77)$$

これは所望の結果である.

## 5 検証例

本節では, 検証の例として次の非線形方程式

$$\frac{dx^2}{dt^2} + x + (x - t)^3 = t + 1, \quad t \in [-1, 1]. \quad (78)$$

を考える。境界条件として

$$x(-1) = -0.9, x(1) = 1.1 \quad (79)$$

を付ける。この例は Urabe [2] による。この方程式はつぎのような連立系に書き直される：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - (x_1 - t)^3 + t + 0.1 \end{cases} \quad (80)$$

および

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(-1) \\ x_2(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

ここで、

$$c(t) = (t + 0.1, 1), \quad (82)$$

$$A\tilde{t}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

とし、 $\Phi(t)$  を Urabe の Chebyshev 展開法 [9] を用いて計算した。区間  $[-1, 1]$  を 10 等分して、式 (39) を用いて  $K$  の区間包囲を求めた。この際、 $S$  を  $[-1, 1]$  の部分区間とするとき  $R(S)$  等の区間包囲の計算には 3 次のテイラー展開を利用した。これらの条件の下で前節のアルゴリズムを適用した結果、スケーリングベクトルは  $u = (0.00490, 0.00672)$  と与えられ

$$T(t) = c(t) + \{x \in X \mid |x_1(t)| \leq 0.00490, |x_2(t)| \leq 0.00672\} \quad (84)$$

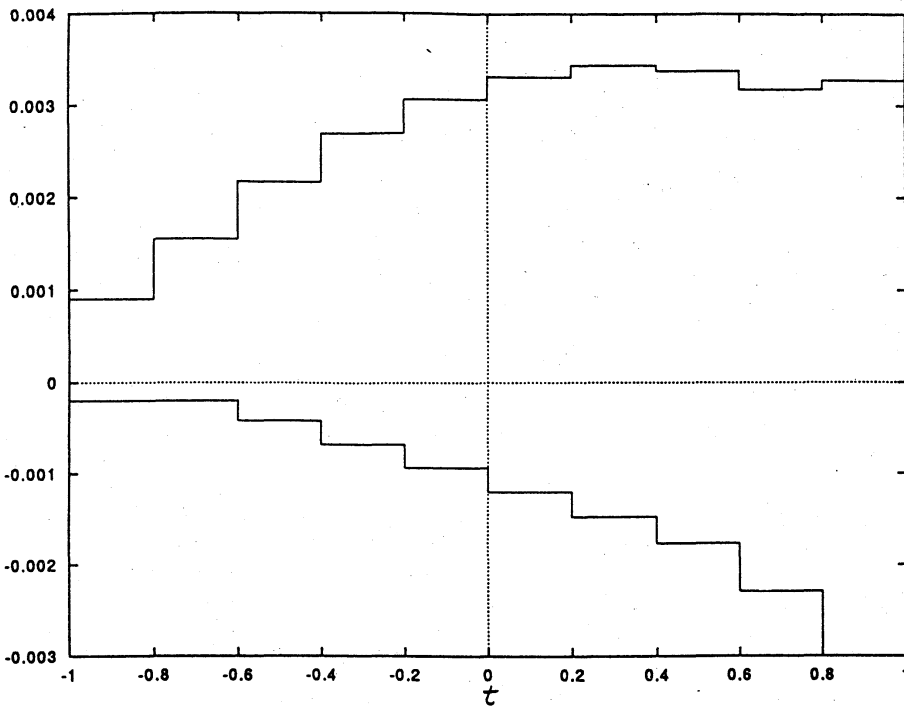
となった。図 1 に示すように  $K(T) - c$  が  $T - c$  の真部分集合となることが確認されたので、 $K(T)$  に真の解が存在し、 $T$  内で唯一であることが示された。

## 参考文献

- [1] M.Urabe: "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems", Arch. Rational Mech. Anal., **20**, (1965) pp.120-152.
- [2] M.Urabe: "An Existence Theorem for Multi-Point Boundary Value Problems", Funkcialaj Ekvacioj, **9** (1966), pp.43-60.
- [3] 篠原能材: "数値解析の基礎", 日新出版 (1978).
- [4] M.Fujii: "An a posteriori error estimation of the numerical solution by step-by step methods for system of ordinary differential equations", Bull. Fukuoka Univ. Ed., **23** (1973), pp.35-44.
- [5] H.Shintani and Y.Hayashi: "A posteriori error estimates and iterative methods in the numerical solution of systems of ordinary differential equations", Hiroshima Math. J., **8** (1978), pp.101-121.

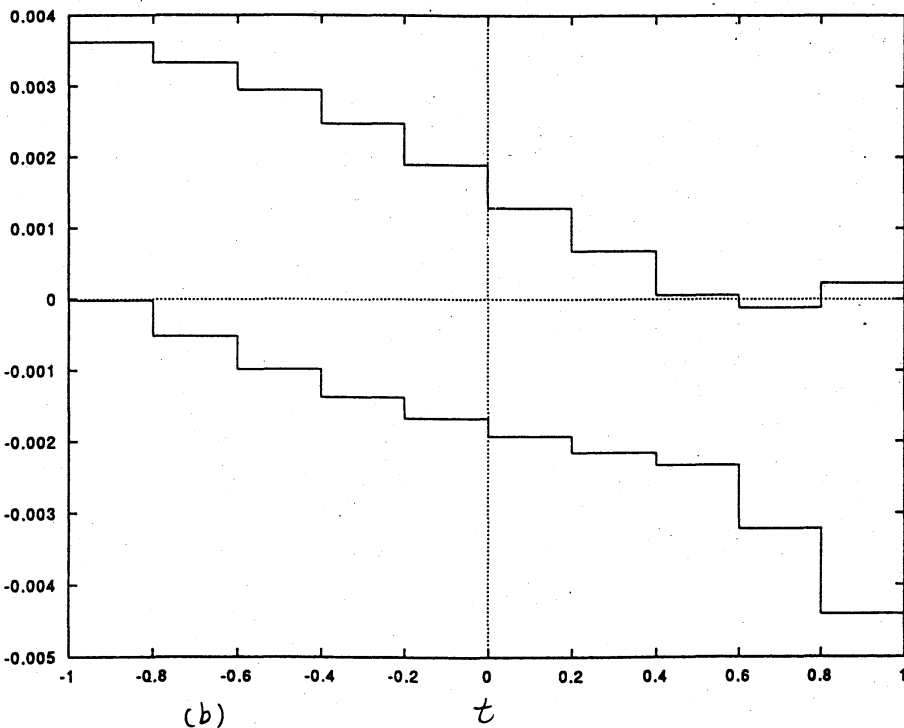
- [6] Y.Hayashi: "On a posteriori error estimation in the numerical solution of system of ordinary differential equations", Hiroshima Math. J., **9** (1979), pp.201-243.
- [7] T.Yamamoto: "An Existence Theorem of Solution to Boundary Value Problems And Its Application To Error Estimates", Math. Japonica, **27** (1982), pp.301-318.
- [8] O.Caprani, K.Madsen and L.B.Rall: "Integration of Interval Functions", SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), pp.321-341.
- [9] M.Urabe: "Numerical Solution of Multi-Point Boundary Value Problems in Chebyshev Series Theory of the Method", Numerische Mathematik, **9** (1967), pp.341-366.

K(T) - c の 1 成分



(a)

K(T) - c の 2 成分



(b)

図 1.  $K(T) - c$  の 区間包圍 (a) は 1 成分, (b) は 2 成分