数理解析研究所講究録
第 880 巻 1994 年 211-219

準 Newton 法を使用した主双対内点法の局所的収束の速さについて

矢部博（東京理科大学・工学部）(Hiroshi Yabe)
山下浩（数理システム）(Hiroshi Yamashita)

1 はじめに

非線形最適化問題

(1.1) $$\text{minimize} \quad f(x) \quad \text{subject to} \quad g(x)=0,\ x\geq 0, \quad x\in R^n, \quad g\in R^m$$

に対する内点法を考える。ペナルティ関数法に基づく内点法の研究は 1960 年代に遡るが，Karmarkar 法 [7] 以来，線形計画問題や 2 次計画問題に対する内点法の見直しがなされ理論的にも実用的にも非常に活発に研究されている。線形計画問題に対する内点法の中でも近年とくに主双対内点法が有望視されており，Kojima, Mizuno and Yoshise[8] の研究に端を発して多くの研究者によって大域的収束性（とくに多項式オーダ性）が示されている。さらに局所的収束性は Zhang, Tapia and Dennis[15] の研究に端を発し，Zhang and Tapia ら ([13],[14]) を中心に研究がなされている。

そうした状況の中で，非線形最適化問題の内点法の再検討はこれからの大きな課題である。大域的収束性に関して Yamashita[11] の研究がある。局所的収束性に関しては，線形計画問題に対する Zhang and Tapia らの結果を非線形最適化問題へ拡張して，Newton 法を用いた主双対内点法の局所的 2 次収束性が El-Bakry et al.[5] や Yamashita and Yabe [12] らによって示されている．さらに，準ニュートン法を用いた主双対内点法の局所的Q超 1 次収束性が Yamashita and Yabe [12] によって研究されている．

本論文では，[12] の結果を拡張し，射影ヘッセ行列を利用してQ超 1 次収束のための必要十分条件を与える．まず，2，3 節で [12] の内容を簡単に紹介し，4 節で主要な結果を述べる．

2 非線形最適化問題に対する主双対内点法

問題 (1.1) のラグランジュ関数を

(2.1) $$L(x,y,z)=f(x)-y^tg(x)-z^tx, \quad y\in R^m,\ z\in R^n \text{ はラグランジュ乗数}$$

としたとき，Karush-Kuhn-Tucker(K-K-T) 条件は次式で与えられる：

(2.2) $$r_0(x,y,z)\equiv\begin{pmatrix}\nabla_xL(x,y,z)\\ g(x)\\ XZe\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad x\geq 0, \qquad z\geq 0,$$

ただし，

$$X=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad Z=\mathrm{diag}(z_1,z_2,\cdots,z_n), \quad e=(1,1,\cdots,1)^t\ \in\ R^n,$$

$$\nabla_x L(x,y,z) = \nabla f(x) - A(x)^t y - z. \qquad (\ A(x) \text{ は } g(x) \text{ のヤコビ行列})$$

このとき相補性条件 $XZe=0$ を $XZe=\mu e$（μ は非負定数）で置き換えて，次の修正 K-K-T 条件を考える：

$$(2.3) \qquad r(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y,z) \\ g(x) \\ XZe-\mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x>0, \qquad z>0.$$

ここで，$r(x,y,z)$ は

$$r(x,y,z) = r_0(x,y,z) - \mu\hat{e}, \qquad \hat{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \in R^{2n+m}$$

と書けることに注意せよ．

主双対内点法は非線形方程式 (2.3) に対するニュートン法のことであり，とくに 3 番目の方程式 $XZe-\mu e=0$ に対するニュートン法が本質的である。$(\Delta x_k, \Delta z_k)$ を (x,z) に関するニュートンステップとしたとき，$XZe-\mu e=0$ に対するニュートン法は次式で与えられる。

$$(2.4) \qquad X_k^{-1}\Delta x_k + Z_k^{-1}\Delta z_k = \mu_k (X_k Z_k)^{-1} e - e.$$

そして次の点が非負条件に関して内点になるようにステップサイズが調整される。すなわち，

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_{xk}\Delta x_k > 0, \qquad z_{k+1} = z_k + \alpha_{zk}\Delta z_k > 0$$

となるように α_{xk}, α_{zk} が選ばれる。したがって，主双対内点法と方程式 (2.2) に対するニュートン法との本質的な違いは，

(1) 方程式 (2.3) に摂動項 $\mu_k e$ が含まれていること（これは非負条件の実行可能領域でのセンタリングの役目を果たす），

(2) 点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が非負条件に関して内点になるようにするために減速 (damping) をする必要があること，

である。このことに付け加えて，以下ではラグランジュ関数のヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(x_k, y_k, z_k)$ を近似することも考える．

以下，$w=(x,y,z)$ と表し $g(x)$ のヤコビ行列を $A(x) \in R^{m\times n}$ とすれば，非線形方程式 $r(w)=0$ に対する準ニュートン法は次のアルゴリズムで与えられる：

[Prototype Algorithm]
(0) 初期点 $(x_0, z_0) > 0$, y_0 を与える．
$k = 0, 1, 2, \cdots$, に対して以下の手順を繰り返す。

(1) $\mu_k \geq 0$ を与える．

(2) $\Delta w_k = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)^t$ に関する連立 1 次方程式 $J_k \Delta w_k = -r(w_k)$ を解く。ただし，

$$(2.5) \qquad J_k = \begin{pmatrix} G_k & -A(x_k)^t & -I \\ A(x_k) & O & O \\ Z_k & O & X_k \end{pmatrix}$$

であり，G_k は $\nabla_x^2 L(w_k)$ の近似行列である。

(3) ステップサイズ $\Lambda_k = \mathrm{diag}(\alpha_{xk}I_n, \alpha_{yk}I_m, \alpha_{zk}I_n)$ を求める。

(4) $w_{k+1} = w_k + \Lambda_k \Delta w_k$ として次の点を生成する。∎

ここで $G_k = \nabla_x^2 L(w_k)$ の場合がニュートン法である。なお $r_0(w)$ および $r(w)$ のヤコビ行列は次式で与えられる。

$$\nabla r_0(w) = \nabla r(w) = \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x,y,z) & -A(x)^t & -I \\ A(x) & O & O \\ Z & O & X \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

以下では，$w^* = (x^*, y^*, z^*)$ を K-K-T 点とし次の条件を仮定する。

(A1) f と g は 2 回連続微分可能である。
(A2) x^* は正規条件を満足する。
(A3) w^* で狭義の相補性条件が成り立つ。
(A4) w^* は 2 次の十分条件を満足する。
(A5) $\nabla^2 f(x)$ と $\nabla^2 g_i(x)$ は x^* で Lipschitz 連続である。

以上の仮定のもとで 行列 $\nabla r_0(w^*)$ (すなわち $\nabla r(w^*)$) が正則であることが示される。[Prototype Algorithm] においてパラメタ μ_k，ステップサイズおよび近似行列 G_k の決め方に選択の余地があるが，速い収束性を実現するためには次の条件が満足されなければならない。

(1) パラメタ μ_k は十分速くゼロに近づかなければならない，

(2) ステップサイズ $\alpha_{xk}, \alpha_{yk}, \alpha_{zk}$ は十分速く 1 に近づかなければならない，

(3) 行列 G_k はある意味でヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(w_k)$ に十分近くなければならない。

以上の条件を考慮して，本稿では次の 3 種類のアルゴリズムを提案しそれぞれの局所的収束性およびその収束速度について検討する。

[Algorithm A]
Zhang and Tapia ら ([13],[14],[15]) と同様に共通のステップサイズを選ぶ。すなわち，[Prototype Algorithm] において

$$\alpha_{xk} = \alpha_{zk} = \min\left\{1, \gamma_k \min_i \left\{-\frac{(x_k)_i}{(\Delta x_k)_i} \mid (\Delta x_k)_i < 0\right\}, \gamma_k \min_i \left\{-\frac{(z_k)_i}{(\Delta z_k)_i} \mid (\Delta z_k)_i < 0\right\}\right\},$$

$\alpha_{yk} = 1$，または，α_{xk} とし，パラメタ μ_k, γ_k は次式を満足するように選ばれる。

$$0 \le \mu_k \le \zeta_1 (x_k^t z_k)^{1+\tau_1}, \qquad 0 < 1 - \gamma_k \le \zeta_2 \|r_0(w_k)\|^{\tau_2},$$

ただし，$\tau_1, \tau_2, \zeta_1, \zeta_2$ は正定数である。∎

[Algorithm B]
線形計画問題用のパッケージ OB1 ([9],[10]) と同様に主変数，双対変数で別々のステップサイズを選ぶ。すなわち，[Prototype Algorithm] において

$$\alpha_{xk} = \min\left\{1, \gamma_k \min_i \left\{-\frac{(x_k)_i}{(\Delta x_k)_i} \mid (\Delta x_k)_i < 0\right\}\right\},$$

$$\alpha_{zk} = \min\left\{1, \gamma_k \min_i \left\{-\frac{(z_k)_i}{(\Delta z_k)_i} \mid (\Delta z_k)_i < 0\right\}\right\},$$

$\alpha_{yk} = 1, \alpha_{xk}$，または，$\alpha_{zk}$ とし，パラメタ μ_k, γ_k は次式を満足するように選ばれる。

$$0 \leq \mu_k \leq \zeta_1 \min_i \{(x_k)_i (z_k)_i\} (x_k^t z_k)^{\tau_1}, \qquad 0 < 1 - \gamma_k \leq \zeta_2 \|r_0(w_k)\|^{\tau_2},$$

ただし，$\tau_1, \tau_2, \zeta_1, \zeta_2$ は正定数である。∎

[Algorithm C]
Yamashita[11] のアルゴリズムと同様の考えでステップサイズを選ぶ。すなわち，[Prototype Algorithm] において

$$\alpha_{xk} = \min \left\{ 1, \gamma_k \min_i \left\{ -\frac{(x_k)_i}{(\Delta x_k)_i} \mid (\Delta x_k)_i < 0 \right\} \right\},$$

とし，α_{zk} は $\alpha_{zk} \leq 1$ および各 i に対して次式を満足する最長のステップサイズとする。

$$\min \left\{ \frac{\mu_k}{M_{Lk}((x_k)_i + \alpha_{xk}(\Delta x_k)_i)}, (z_k)_i \right\} \leq (z_k)_i + \alpha_{zk}(\Delta z_k)_i \leq \max \left\{ \frac{M_{Uk}\mu_k}{(x_k)_i + \alpha_{xk}(\Delta x_k)_i}, (z_k)_i \right\},$$

ただし M_{Lk}, M_{Uk} は適当な正数である。そして $0 < \mu_k$ であることを除けば，$\alpha_{yk}, \mu_k, \gamma_k$ の選び方は [Algorithm B] と同じである。∎

以上の 3 種類のアルゴリズムに対して次の補助定理を得る。

[補助定理 1]
条件 (A1) から (A4) が成り立ち，点列 $\{w_k\}$ はアルゴリズム A, B, C で生成されると仮定する。このとき，ある $\varepsilon > 0, \delta > 0$ が存在して，

$$\|w_k - w^*\| \leq \varepsilon, \qquad \|G_k - \nabla_x^2 L(w^*)\| \leq \delta$$

ならば

$$\|\Lambda_k - I\| \leq c_1 \|r_0(w_k)\|^{\tau}, \qquad \mu_k \leq c_2 (x_k^t z_k)^{1+\tau_1}$$

となる。ただし，c_1, c_2 は正定数，アルゴリズム A, B では $\tau = \min\{1, \tau_2\}$, アルゴリズム C では $\tau = \min\{1, \tau_1\}$ である。∎

3 局所的収束性と収束速度

前節の補助定理を利用すれば，準ニュートン法を用いた主双対内点法の局所的Q超 1 次収束性が示される。

[定理 1]（準ニュートン法の局所的超 1 次収束性 [12]）
仮定 (A1) から (A5) が成り立つとし，点列 $\{w_k\}$ はアルゴリズム A, B, C のいずれかを用いた準ニュートン法で生成されるとする。さらに行列 $\{G_k\}$ は

$$\|G_{k+1} - \nabla_x^2 L(w^*)\|_M \leq (1 + \beta_1 \sigma_k) \|G_k - \nabla_x^2 L(w^*)\|_M + \beta_2 \sigma_k, \tag{3.1}$$

を満足すると仮定する。ただし，β_1, β_2 は正定数で

$$\sigma_k = \max(\|w_{k+1} - w^*\|, \|w_k - w^*\|)$$

である。このとき，$\nu \in (0,1)$ に対してある正数 $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ と $\delta = \delta(\nu)$ が存在して

$$\|w_0 - w^*\| < \varepsilon, \qquad \|G_0 - \nabla_x^2 L(w^*)\|_M < \delta$$

ならば $\{w_k\}$ は w^* に収束して，かつ，

(3.2) $$\|w_{k+1}-w^*\| \le \nu \|w_k - w^*\|, \quad k \ge 0$$

が成り立つ。
さらに，以下の (a),(b),(c),(d) は同値である。
(a) 行列 $\{J_k\}$ は次式を満足する

(3.3) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(J_k - \nabla r_0(w^*))(w_{k+1}-w_k)\|}{\|w_{k+1}-w_k\|} = 0.$$

(b) 点列 $\{r_0(w_k)\}$ は次式を満足する

(3.4) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|r_0(w_{k+1})\|}{\|w_{k+1}-w_k\|} = 0.$$

(c) 点列 $\{w_k\}$ は w^* にQ超1次収束する，すなわち，

(3.5) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|w_{k+1}-w^*\|}{\|w_k - w^*\|} = 0.$$

(d) 行列 $\{G_k\}$ は次式を満足する

(3.6) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(G_k - \nabla_x^2 L(w^*))(x_{k+1}-x_k)\|}{\|w_{k+1}-w_k\|} = 0. \quad \blacksquare$$

ここで，(3.1) は bounded deterioration property [2] であり，(3.3) は Dennis-Moré 条件 [4] に対応する。

4 射影ヘッセ行列と超1次収束性

前節では，点 (x_k, y_k, z_k) 全体が K-K-T 点 (x^*, y^*, z^*) にQ超1次収束するための必要十分条件を述べたが，このままではその一部分がQ超1次収束することにはならない。一般に，点 (x_k, y_k, z_k) 全体が K-K-T 点 (x^*, y^*, z^*) にQ超1次収束しても，その一部分はR超1次収束することまでしか保証されない。そこで本節では，一部分 (x_k, z_k) が (x^*, z^*) にQ超1次収束するための必要十分条件を与える。なお，本節で述べる結果は，制約条件付き最適化問題に対する準ニュートン法のQ超1次収束性に関する Boggs, Tolle and Wang [1] や Coleman [3] らの研究に対応する。
等式制約関数 $g(x)$ のヤコビ行列 $A(x)$ に対して，$A^-(x) \in R^{n\times m}$ を

$$A(x)A^-(x) = I$$

を満足する一般化逆行列のひとつとする。また，この $A^-(x)$ に対して，$B(x) \in R^{(n-m)\times n}$ は

$$B(x)A(x)^t = O$$

を満足し，かつ，x^*の近傍で x について微分可能なフルランク行列とする。こうした行列 $B(x)$ が存在することは Goodman[6] によって証明されている。このとき，行列

$$\begin{pmatrix} (A^-(x))^t \\ B(x) \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

が正則行列になることが容易に示される。

まず，

$$r(w)=\begin{pmatrix} r_L \\ r_E \\ r_C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y,z) \\ g(x) \\ XZe-\mu e \end{pmatrix}=0 \tag{4.1}$$

に対する準ニュートン法を考えよう。このとき，[Prototype Algorithm] で述べたように準ニュートン方程式は

$$J_k \Delta w_k = -r(w_k)$$

となる。これは次の方程式と同値である。

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^-(x_k))^t \\ B(x_k) \end{pmatrix} & & O \\ & I & \\ O & & I \end{pmatrix} J_k \Delta w_k = -\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^-(x_k))^t \\ B(x_k) \end{pmatrix} & & O \\ & I & \\ O & & I \end{pmatrix} r(w_k).$$

この方程式を具体的に書き下せば，次のようになる。

$$y_k+\Delta y_k=(A^-(x_k))^t(G_k\Delta x_k+\nabla f(x_k)-(z_k+\Delta z_k)), \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} B(x_k)G_k & -B(x_k) \\ A(x_k) & O \\ Z_k & X_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B(x_k)(\nabla f(x_k)-Z_k) \\ g(x_k) \\ X_kZ_ke-\mu_k e \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

ここで，方程式 (4.3) が (x,z) に関するニュートン方程式に対応していないことに注意されたい。したがって，このままでは収束性の解析が難しい．

そこで，方程式 (4.1) を変形してから準ニュートン法を適用することを考えよう。すなわち，式 (4.1) は次の方程式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A^-(x))^t \\ B(x) \end{pmatrix} r_L &= 0, \\ r_E &= 0, \\ r_C &= 0. \end{aligned}$$

と同値なので，次式を得る。

$$\begin{aligned} y &= (A^-(x))^t(\nabla f(x)-z), && (4.4)\\ B(x)r_L=B(x)(\nabla f(x)-z) &= 0, && (4.5)\\ g(x) &= 0, && (4.6)\\ XZe-\mu e &= 0. && (4.7) \end{aligned}$$

ここで，式 (4.4) は (x,z) が求まれば y が決まることを示している。他方，方程式 (4.5),(4.6),(4.7) は (x,z) だけに依存する方程式なので，このとき準ニュートン方程式は

$$\tilde{J}(x_k,z_k)\begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix} = -\tilde{r}(x_k,z_k) \tag{4.8}$$

となる。ただし，

$$\tilde{r}(x,z)=\begin{pmatrix} B(x)(\nabla f(x)-z) \\ g(x) \\ XZe-\mu e \end{pmatrix},\ \tilde{J}(x,z)=\begin{pmatrix} \dot{B}(x)r_L+B(x)\nabla_x^2 L(w) & -B(x) \\ A(x) & O \\ Z & X \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

であり，$\dot{B}(x)$ は $B(x)$ の x に関する微分を表す。また，

$$y_k = (A^-(x_k))^t(\nabla f(x_k) - z_k), \qquad w_k = (x_k, y_k, z_k)$$

とする。特に，K-K-T 点 (x^*, z^*) では $\dot{B}(x^*)r_L(w^*) + B(x^*)\nabla_x^2 L(w^*) = B(x^*)\nabla_x^2 L(w^*)$ となり，さらに行列

$$\tilde{J}(x^*, z^*) = \begin{pmatrix} B(x^*)\nabla_x^2 L(w^*) & -B(x^*) \\ A(x^*) & O \\ Z^* & X^* \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

は正則行列になる。ここで，準ニュートン法の考え方を用いて $\dot{B}(x_k)r_L(w_k) + B(x_k)\nabla_x^2 L(w_k)$ を行列 H_kで近似することが考えられる。したがって，ヤコビ行列 $\tilde{J}(x_k, z_k)$ を

$$\tilde{J}(x_k, z_k) \approx \begin{pmatrix} H_k & -B(x_k) \\ A(x_k) & O \\ Z_k & X_k \end{pmatrix}$$

で近似し，かつ，点 (x_k, z_k) が (x^*, z^*) に 1 次収束することを仮定すれば，前節と同様の議論が出来て，次の系が得られる。

[系]
点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が (x^*, z^*) に 1 次収束すると仮定する。このとき，次の 3 つの事柄は同値である。

(1) 点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が (x^*, z^*) に Q 超 1 次収束する。

(2) 次の式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| \left(\begin{pmatrix} H_k & -B(x_k) \\ A(x_k) & O \\ Z_k & X_k \end{pmatrix} - \tilde{J}(x^*, z^*) \right) \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix} \right\|} = 0. \tag{4.11}$$

(3) 次の式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(H_k - B(x^*)\nabla_x^2 L(w^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\left\| \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix} \right\|} = 0. \tag{4.12}$$ ∎

式 (4.3) と [系] を用いて以上のことを整理すれば，結局，準ニュートン法を用いた主双対内点法に関する次の収束定理が得られる。

[定理 2]
仮定 (A1) から (A4)，および (A6) が成り立つとし，点列 $\{w_k\}$ はアルゴリズム A, B, C のいずれかを用いた準ニュートン法で生成されるとする。点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が (x^*, z^*) に 1 次収束すると仮定し，行列の列 $\{G_k\}$ は

$$\begin{pmatrix} B(x_k)G_k & -B(x_k) \\ A(x_k) & O \\ Z_k & X_k \end{pmatrix}$$

が正則になるように生成されるものとする。このとき，次の 3 つの事柄は同値である。

(1) 点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が (x^*, z^*) に Q 超 1 次収束する。

(2) 次の式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(B(x_k)G_k - B(x^*)\nabla_x^2 L(w^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\left\|\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix}\right\|} = 0. \tag{4.13}$$

(3) 次の式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|B(x_k)(G_k - \nabla_x^2 L(w^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\left\|\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix}\right\|} = 0. \tag{4.14}$$ ∎

さらに，$B(x)$ を直交基底（すなわち $B(x)B(x)^t = I$）に選べば

$$P(x) = B(x)^t B(x) = I - A(x)^t (A(x)A(x)^t)^{-1} A(x) \tag{4.15}$$

は $Range(A(x)^t)$ の直交補空間への正射影行列になる。この事実を利用すれば，次の定理が得られる。

[定理 3]
定理 2 の仮定につけ加えて，$B(x)$ として

$$B(x)B(x)^t = I$$

を満たす行列を選ぶ。このとき，次の 2 つの事柄は同値である。

(1) 点列 $\{(x_k, z_k)\}$ が (x^*, z^*) に Q 超 1 次収束する。

(2) 次の式が成り立つ。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|P(x_k)(G_k - \nabla_x^2 L(w^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\left\|\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ z_{k+1} - z_k \end{pmatrix}\right\|} = 0. \tag{4.16}$$ ∎

参考文献

[1] P.T.Boggs, J.W.Tolle and P.Wang, On the local convergence of quasi-Newton methods for constrained optimization, *SIAM J. on Control and Optimization*, 20 (1982), pp.161-171.

[2] C.G. Broyden, J.E. Dennis, Jr. and J.J. Moré , On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods, *J. Inst. Math. Appl.*, 12 (1973), pp.223-245.

[3] T.F.Coleman, On characterizations of superlinear convergence for constrained Optimization, in *Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations*, E.L.Allgower and K.Georg, eds., Lectures in Applied Mathematics, 26, American Mathematical Society, Rhode Island, 1990, pp.113-133.

[4] J.E. Dennis, Jr. and J.J. Moré , A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods, *Math. Comp.*, 28 (1974), pp.549-560.

[5] A.S.El-Bakry, R.A.Tapia, T.Tsuchiya and Y.Zhang, *On the formulation of the primal-dual Newton interior-point method for nonlinear programming*, Technical Report TR92-40, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, Texas, USA, December 1992.

[6] J.Goodman, Newton's method for constrained optimization, *Mathematical Programming*, 33 (1985), pp.162-171.

[7] N.Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4 (1984), pp.373-395.

[8] M.Kojima, S.Mizuno and A.Yoshise, A primal-dual interior-point algorithm for linear programming, in *Progress in Mathematical Programming, Interior-Point and Related Methods*, N.Megiddo ed., Springer-Verlag, New York, 1989, pp.29-47.

[9] I.J.Lustig, R.E.Marsten and D.F.Shanno, Computational experience with a primal-dual interior point method for linear programming, *Linear Algebra and its Appl.*, 152 (1991), pp.191-222.

[10] K.A.McShane, C.L.Monma and D.F.Shanno, An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming, *ORSA J. on Computing*, 1 (1989) pp.70-83.

[11] H.Yamashita, *A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization*, Technical Report, Mathematical Systems Institute Inc., Tokyo, Japan, April 1992 (revised May 1992).

[12] H.Yamashita and H.Yabe, *Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for constrained optimization*, Technical Report, Mathematical Systems Institute Inc., Tokyo, Japan, June 1993.

[13] Y.Zhang and R.A.Tapia, Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior-point methods for linear programming revisited, *J. Optimization Theory and Applications*, 73 (1992), pp.229-242.

[14] Y.Zhang and R.A.Tapia, A superlinearly convergent polynomial primal-dual interior-point algorithm for linear programming, *SIAM J. Optimization*, 3 (1993), pp.118-133.

[15] Y.Zhang, R.A.Tapia and J.E.Dennis,Jr., On the superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point linear programming algorithms, *SIAM J. Optimization*, 2 (1992), pp.304-324.