数理解析研究所講究録
第 881 巻 1994 年 1-8

Jack の補題と Miller-Mocanu の補題について

和歌山大学・教育　福井　誠一 (Seiichi FUKUI)

Jack は[2]で次の補題を示して位数αの星型関数の問題を解いた。

<u>補題 1</u>. $w(z)$を単位円板内 $U=\{z;|z|<1\}$ で正則かつ $w(0)=0$ を満たす関数とする。このとき、円周$\{|z|=r\}$、$r<1$ 上の$|w(z)|$の最大値が $z=z_1$ でとれば、$z_1w'(z_1)=kw(z_1)$ が成立し、ここにkは実数で $k\geqq 1$ を満たす。

その後 Fukuiと Sakaguchi は[1]で次の様な補題を与え、簡単な証明をつけた。

<u>補題 2.</u> $w(z)=a_nz^n+\cdots\cdots$を$|z|<R$ で正則で、$a_n\neq 0$、$n\geqq 1$ (n は自然数) とする。円周$\{|z|=r<R\}$上の$|w(z)|$の最大値が $z=z_0$ でとれば、$\dfrac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}$は実数でかつ $\dfrac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}\geqq n$ を満たす。

Miller と Mocanu は補題 2 に先立って[3]で補題 1 を拡張して次の補題 3 を与え、完璧な証明をつけた。

<u>補題 3.</u> $g(z)=g_nz^n+g_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$を U で正則で $g(z)\not\equiv 0$ かつ $n\geqq 1$ とする。もし $z_0=r_0e^{i\theta}$ $(r_0<1)$ で $|g(z_0)|=\max\limits_{|z|\leq r}|g(z)|$ が満たされれば、次の関係が成立する。

$$\text{(1)}\qquad \frac{z_0\,g'(z_0)}{g(z_0)}=m,\qquad \mathrm{Re}\,\frac{z_0\,g'(z_0)}{g'(z_0)}+1\geqq m.$$

ここに、$m\geqq n\geqq 1$ を満たしている。

同じ論文([3]、Theorem 4)で彼らは次の補題を示した。

<u>補題 4.</u> a を複素定数として、$p(z)=a+p_n z^n+p_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$ を U で正則とし、$p(z)\not\equiv a$ かつ $n\geqq 1$ を満たすものとする。今 $z_0=r_0 e^{i\theta}$ $(0<r_0<1)$ で $\mathrm{Re}\, p(z_0) = \underset{|z|\leqq r}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{Re}\, p(z)$ が成立すれば、

$$(2)\qquad z_0 p'(z_0)\leqq -\frac{n\,|a-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}}\leqq -\frac{n\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}}{2},$$

$$(3)\qquad \mathrm{Re}\,\frac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)}+1>0、\quad \mathrm{Re}\, z_0{}^2 p''(z_0)+z_0 p'(z_0)\leqq 0$$

を満たす。

この特別な場合として、$a=1$、$\mathrm{Re}\, p(z_0)=0$ のとき

<u>補題 4'.</u> $p(z)=1+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則で $p(z)\equiv 1$ かつ $n\geqq 1$ とする。 今 $z_0=r_0 e^{i\theta}$ $(0<r_0<1)$ で $\mathrm{Re}\, p(z_0)=\underset{|z|\leqq r}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{Re}\, p(z)=0$ を満たせば、

$$(4)\qquad z_0 p'(z_0)\leqq -\frac{n\,|1-p(z_0)|^2}{2}=-\frac{n\{1+|p(z_0)|^2\}}{2}\leqq -\frac{n}{2}$$

が成立する。

このとき、補題 2 を仮定すれば、補題 4' が成立する。逆に、補題 4' を仮定すれば、補題 2 が成立する。この意味で Jack の補題と Miller と Mocanu の補題は同値であると言える。

<u>定理 1.</u> 補題 2 と補題 4' は同値である。

これを示すのには次のようにする。 まず、 $w(z)=\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ または

$p(z)=\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$ で $p(z)$ または $w(z)$ を定義する。

この関係式から $1-|w(z)|^2=\dfrac{4\,\mathrm{Re}\,p(z)}{|p(z)+1|^2}$ を得る。これは

$\mathrm{Re}\,p(z)>0,\ |z|<|z_0|=r<R \iff |w(z)|<1,\ |z|<|z_0|$ かつ

$\mathrm{Re}\,p(z_0)=0 \iff |w(z_0)|=1$ を示している。また、対数微分することによって

$z_0\,p'(z_0)=\dfrac{z_0\,w'(z_0)}{w(z_0)}\cdot\dfrac{2\,w(z_0)}{(1-w(z_0))^2}$ を得る。$\dfrac{z_0\,w'(z_0)}{w(z_0)}=m$、$w(z_0)=e^{i\theta}$

と置くことによって同値性を示すことができる。

補題 4 に関連してよく使われる結果を、もっと一般な形で次に与える。

<u>定理 2.</u> a を複素定数とする。 $p(z)=a+p_nz^n+\cdots\cdots$ を U で正則かつ

$\mathrm{Re}\,p(z)>\gamma$、$|z|<|z_0|$、$z_0\in U$ さらに $\mathrm{Re}\,p(z_0)=\gamma$ を満たすとする。このとき次の不等式が成立する。

(5) $$z_0\,p'(z_0)\leqq-\frac{n|a-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}}\leqq-\frac{n\,\mathrm{Re}(a-p(z_0))}{2},$$

(6) $$\mathrm{Re}\,\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\begin{cases}\leqq\dfrac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma>0)\\[2ex] \geqq\dfrac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma<0)\end{cases}$$

が成立する。ここに、$b=2\gamma-\bar{a}$ である。

証明. $z=0$ でも成立しなければならないから $\mathrm{Re}\,a>\gamma$ である。また、$\gamma>0$ なら $|b|<|a|$、$\gamma<0$ なら $|b|>|a|$ である。 さて、$w(z)$ を

(7) $$w(z)=\frac{p(z)-a}{p(z)-b}$$

で定義すると、$w(z)$は U で正則でかつ $w(z)=0$ を満たす。さらに、$w(z)=w_nz^n+\cdots\cdots$

の形で $p(z) = \dfrac{a - bw(z)}{1 - w(z)}$ と $b = 2\gamma - \bar{a}$ から

$$(8) \qquad 1 - |w(z)|^2 = \frac{|p(z)-b|^2 - |p(z)-a|^2}{|p(z)-b|^2} = \frac{4(\mathrm{Re}\, a - \gamma)\{\mathrm{Re}\, p(z) - \gamma\}}{|p(z)-b|^2}$$

が成立する。　これは仮定から $\mathrm{Re}\, p(z) > \gamma,\ |z| < |z_0|,\ z_0 \in U \iff$

$|w(z)| < 1,\ |z| < |z_0|,\ z_0 \in U$ かつ $\mathrm{Re}\, p(z_0) = \gamma \iff |w(z_0)| = 1$

を示している。これはまた、補題 2 の仮定を満たしているから $w(z_0) = e^{i\theta}$ $(\theta \in R)$、

$\dfrac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)} = m \geqq n$ と置くことができる。(7) を対数微分することにより

$$(9) \qquad \frac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)} = \frac{z_0\, w'(z_0)}{w(z_0)}\left\{\frac{w(z_0)}{1-w(z_0)} - \frac{bw(z_0)}{a-bw(z_0)}\right\}$$

$$= \frac{z_0\, w'(z_0)}{w(z_0)} \cdot \frac{(a-b)w(z_0)}{(1-w(z_0))(a-bw(z_0))} = m \cdot \frac{(a-b)e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})(a-be^{i\theta})},$$

$m \geqq n$ を得、また

$$z_0\, p'(z_0) = m \cdot (a-b)\frac{w(z_0)}{(1-w(z_0))^2} = \frac{m(\mathrm{Re}\, a - \gamma)}{\cos\theta - 1} < 0$$

$$\therefore z_0\, p'(z_0) = m \cdot \frac{-\{p(z_0)-a\}\{p(z_0)-b\}}{(a-b)} = -\frac{n|a - p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a - p(z_0)\}} \leqq -\frac{n\,\mathrm{Re}(a-p(z_0))}{2}$$

を得る。　また、(9) から $\mathrm{Re}\dfrac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)} = -\dfrac{m}{2} - m\,\mathrm{Re}\dfrac{be^{i\theta}}{a-be^{i\theta}}$ となり

$\gamma > 0$ なら　$|a| > |b|$ で $\dfrac{-|b|}{|a|+|b|} \leqq \mathrm{Re}\dfrac{be^{i\theta}}{a-be^{i\theta}} \leqq \dfrac{|b|}{|a|-|b|}$、

$\gamma < 0$ なら　$|b| > |a|$ で $\dfrac{|b|}{|a|-|b|} \leqq \mathrm{Re}\dfrac{be^{i\theta}}{a-be^{i\theta}} \leqq \dfrac{-|b|}{|a|+|b|}$

を得て、これから証明すべき不等式を得る。□

実際によく使われるのは、a が実数のときや、$a=1, \gamma=0$ のときである。

系 1. a を実数、$p(z)=a+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則とする。このとき、$\mathrm{Re}\, p(z)>\gamma$、$|z|<|z_0|$、$z_0 \in U$ かつ $\mathrm{Re}\, p(z_0)=\gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

$$(10) \qquad z_0 p'(z_0) \leqq -\frac{n|a-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}} \leqq -\frac{n(a-\gamma)}{2}$$

$$(11) \qquad \mathrm{Re}\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \leqq -\dfrac{n(a-\gamma)}{2\gamma} & \left(a>\gamma>\dfrac{a}{2}>0\right) \\ \leqq -\dfrac{n\gamma}{2(a-\gamma)} & \left(\dfrac{a}{2}>\gamma>0\right) \\ \geqq -\dfrac{n\gamma}{2(a-\gamma)} & (a>0>\gamma) \\ \geqq -\dfrac{n(a-\gamma)}{2\gamma} & (0>a>\gamma) \end{cases}$$

系 2. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則かつ $\mathrm{Re}\, p(z)>\gamma$、$|z|<|z_0|$、$z_0 \in U$ かつ $\mathrm{Re}\, p(z_0)=\gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

$$(12) \qquad z_0 p'(z_0) \leqq -\frac{n|1-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{1-p(z_0)\}} \leqq -\frac{n(1-\gamma)}{2}$$

$$(13) \qquad \mathrm{Re}\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \leqq -\dfrac{n(1-\gamma)}{2\gamma} & \left(1>\gamma>\dfrac{1}{2}\right) \\ \leqq -\dfrac{n\gamma}{2(1-\gamma)} & \left(\dfrac{1}{2}>\gamma>0\right) \\ \geqq -\dfrac{n\gamma}{2(1-\gamma)} & (0>\gamma) \end{cases}$$

系 3. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則かつ $\mathrm{Re}\ p(z)>0$、$|z|<|z_0|$、$z_0\in U$ かつ $\mathrm{Re}\ p(z_0)=0$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

(14) $$z_0\,p'(z_0)\leqq-\frac{n|1-p(z_0)|^2}{2}=-\frac{n\{1+|p(z_0)|^2\}}{2}\leqq-\frac{n}{2}$$

(15) $$\frac{z_0\,p'(z_0)}{p(z_0)}=i\,k\,n.$$

ここに、(15) の左辺は純虚数、また k は実数で $|k|\geqq 1$ を満たす。

(14) は補題 4′ の結果であり、(15) は Nunokawa [4] の結果である。

定理 2 の証明と同じアイデアで次の定理 3 が示される。よって結果のみを示し証明は省略する。

定理 3. a を複素定数とする。$p(z)=a+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則かつ $\mathrm{Re}\ p(z)<\gamma$, $|z|<|z_0|$, $z_0\in U$ さらに $\mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma$ を満たすとする。このとき次の不等式が成立する。

(16) $$z_0\,p'(z_0)\geqq-\frac{n|a-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}}\geqq-\frac{n\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}}{2}$$

(17) $$\mathrm{Re}\,\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\begin{cases}\geqq\dfrac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma>0)\\[2ex] \leqq\dfrac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma<0)\end{cases}$$

が成立する。ここに、$b=2\gamma-\bar{a}$ で $\mathrm{Re}\ a<\gamma$ ある。

定理 2 と同様で、$\gamma>0$ なら $|a|<|b|$、$\gamma<0$ なら $|a|>|b|$ である。特に、a が実数のときや、a=1 のときは次のようになる。

系 4. a を実数、$p(z)=a+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則とする。このとき、$\mathrm{Re}\,p(z)<\gamma$, $|z|<|z_0|$, $z_0\in U$ かつ $\mathrm{Re}\,p(z_0)=\gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。このとき $a<\gamma$ で

$$(18)\qquad z_0\,p'(z_0) \geqq -\frac{n\,|a-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{a-p(z_0)\}} \geqq -\frac{n\,(a-\gamma)}{2}$$

$$(19)\qquad \mathrm{Re}\,\frac{z_0\,p'(z_0)}{p(z_0)}\begin{cases} \geqq -\dfrac{n(a-\gamma)}{2\,\gamma} & (\gamma>0) \\[2ex] \leqq -\dfrac{n\gamma}{2(a-\gamma)} & \left(\dfrac{a}{2}<\gamma<0\right) \\[2ex] \leqq -\dfrac{n(a-\gamma)}{2\,\gamma} & \left(a<\gamma<\dfrac{a}{2}<0\right). \end{cases}$$

系 5. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots\cdots$ を U で正則かつ $\mathrm{Re}\,p(z)<\gamma$, $|z|<|z_0|$, $z_0\in U$ かつ $\mathrm{Re}\,p(z_0)=\gamma$ が満たされれば、$\gamma>1$ で次の不等式が成立する。

$$(20)\qquad z_0\,p'(z_0) \geqq -\frac{n\,|1-p(z_0)|^2}{2\,\mathrm{Re}\{1-p(z_0)\}} \geqq -\frac{n\,(1-\gamma)}{2}$$

$$(21)\qquad \mathrm{Re}\,\frac{z_0\,p'(z_0)}{p(z_0)} \geqq -\frac{n(1-\gamma)}{2\,\gamma}.$$

ここでは、定理や系の応用については触れないでおく。

参考文献

[1] S.Fukui and K.Sakaguchi, An extension of a theorem of S.Ruscheweyh, Bull.Fac.Edu.Wakayama Univ.Nat.Sci.,29(1980),1-3.

[2] I.S.Jack, Functions starlike and convex of order α, J.London Math. Soc.,(2)3(1971),469-474.

[3] S.S.Miller and P.T.Mocanu, Second order differential inequalities in the complex plane, Journal of Mathematical analysis and applications 65,(1978),289-305.

[4] M.Nunokawa, On properties of non-Carathéodory functions, Proceedings of the Japan Academy, vol.68,Ser.A,No.6(1992),152-153.

930 Sakaedani Wakayama-city 640 Japan
Department of Mathematics
Faculty of Education
Wakayama University