数理解析研究所講究録
第881巻 1994年 152-158

関数がスパイラル型であるための条件について

坂口杲一 (奈良産業大学)

先の論文〔1〕で筆者はJackの補題とMiller-Mocanu の補題について考察し，これらの補題の応用として，関数が星型であるための十分条件について論じた。本論文では問題を敷延して、関数がスパイラル型であるための十分条件について考察する。なおその前に、関数がスパイラル型であるということの意味について一瞥しておく。

1. 準備

1°. スパイラル型な閉曲線

(ρ, ϕ) を極座標とする極座標平面上でスパイラル

(1.1) $$\rho \cdot e^{a\phi} = K \quad (a,\ K\text{は定数},\ K>0)$$

を考える。このスパイラルは，a＞0のときは，左旋回で極に近かずきながら極を無限回取り巻く。又a＜0のときは，右旋回で極に近かずきながら極を無限回取り巻く。

次にaが一定でKが変る場合を考える。この場合スパイラルは，形は変らいが位置が変る。a＞0のときは，Kが大きくなればスパイラルは左回転で移動し，a＜0のときは，Kが大きくなればスパイラルは右回転で移動する。そうしてKがある値K_0から$K_0 e^{2\pi a}$まで単調に増加又は減少すれば，スパイラルは極のまわりを1回転してもとの位置に戻る。その際に出来るスパイラル (1.1) の族を Sp(a)で表そう。

いま極を取り巻く単純閉曲線Cがあって，Cが Sp(a)に属する各々のスパイラルとただ1点でしか交らないとき，Cはスパイラル族 Sp(a)に関して星型である，あるいは単に極（原点）に関してスパイラル型 (spiral-lik) であるという。

2°. スパイラル型な関数

複素w平面上に，原点を極に，正の実軸を始線に見立てて，スパイラル(1.1.)を描くと，その複素方程式は

(1.2) $$|w|\ e^{a \arg w} = K \quad (K>0)$$

となる。

いま複素z平面上の開単位円板をUで表し，Uにおいて定義される解析関数 $f(z)= a_1 z+\cdots$, $a_1 \neq 0$，を考える。f(z)による円 $|z|=r\,(<1)$ の像を C_r とする。1より小さく，かつ1に十分近いすべてのrに対して C_r がスパイラル族 Sp(a)に関して星型であるとき，f(z)はUにおいて Sp(a)に関して星型であるという。しかしaの値を示す必要がないときは，単に原点に関してスパイラル型 (spiral-like) であるともいう。

C_r が Sp(a)に関して星型であるとき，C_r がスパイラル(1.2)を横切る点をf(z)，$z=re^{i\theta}$，とすると，

$$|f(z)|\ e^{a \arg f(z)} = K$$

である。両辺の対数をとると，

(1.3) $$\mathrm{Re}\{\log f(z)\} + a\ \mathrm{Im}\{\log f(z)\} = \log K$$

となる。$z=re^{i\theta}$ のθが増加すると，点f(z)を載せているスパイラル(1.2)のKの値は，1° で調べたように，$a>0$のときは大きくなり，$a<0$のときは小さくなる。それ故(1.3)の両辺をθで偏微分すると，

$$-\mathrm{Im}\{zf'(z)/f(z)\}+a\mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\}$$
$$=\{\partial K/\partial\theta\}/K \gtrless 0 \quad \text{for } a \gtrless 0$$

となる。書き直せば，

$$\mathrm{Re}\{(a+i)zf'(z)/f(z)\} \gtrless 0 \quad \text{for } a \gtrless 0$$

となるから，

(1.4) $\mathrm{Re}\{\pm(a+i)zf'(z)/f(z)\} > 0$ for $a \gtrless 0$, $|z|=r$

ここで

(1.5) $\alpha = \arg\{\pm(a+i)\}$, $a \gtrless 0$

とおけば，$a>0$ のときは $0<\alpha<\pi/2$，$a<0$ のときは $-\pi/2<\alpha<0$ であって，(1.4) は

(1.6) $\mathrm{Re}\{e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)\} > 0$, $|z| = r$

と~~ある~~なる。

更にC_r は原点を1回だけ取りまく単純閉曲線であるから，f(z)は $|z| \leqq r$ において原点以外には零点を持たない。それ故(1.6) の左辺は $|z| \leqq r$ で調和になり，調和関数の最小値の原理によって

(1.7) $\mathrm{Re}\{e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)\} > 0$, $|z| \leqq r$

が得られる。

以上により，C_r が Sp(a)に関して星型であるらば，(1.5) のαに対して(1.7) が成り立つことが分かった。

こんどは逆にUにおける解析関数 $f(z)=a_1z+\cdots$, $a_1 \neq 0$, が(1.5) のαに対して(1.7) を満たすものと仮定する。このとき(1.6) が成り立つが，(1.6) は上で示したように，「z ($|z|=r$) の偏角θが大きくなれば，点 f(z) が Sp(a) に属するスパイラル (1.2)を，a の正負に応じてKが増加又は減少する方向に順次横切って，原点のまわりを回転する」ことを表す。この際θが0から2πまで変ると f(z) は原点を取り巻いて閉曲線C_rを描くが，(1.7) によって f(z) は $|z| \leqq r$ において原点以外には零点を持たいから，C_r が原点を取り巻く回数はただ1回である。それ故C_r は Sp(a)に関して星型な単純閉曲線になる。加えて (1.7) により，$|z| \leqq r$ において $f'(z) \neq 0$ であることも分かるので，Darvoux の定理によって f(z) は $|z| < r$ において単葉である。

以上の議論が，いくらでも1に近い $r(<1)$に対しても適用できるような場合

を考えて，我々は次の定理を得る。

定理A．$f(z)=a_1z+\cdots$，$a_1\neq 0$，を開単位円板U上で解析的であるとする。$f(z)$がUにおいて単葉で，かつスパイラル族 Sp(a)に関して星型であるための必要十分条件は

(1.8) $$\mathrm{Re}\{e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)\}>0,\quad z\in U$$

である。ただしαは (1.5)で定まる実数である。

注．定理Aの関数を 原点に関してα-starlike 又はα-spirallike などとも呼ぶが，αを示す必要がないときは，単に 原点に関して spiral-like であるともいう。

3°．補題

補題A．関数 $h(z)=1+c_pz^p+c_{p+1}z^{p+1}+\cdots$ が $|z|\leqq|z_1|$ において解析的で，2つの条件

(1.9) $$\mathrm{Re}\ h(z)>0,\quad |z|<|z_1|,$$

(1.10) $$\mathrm{Re}\ h(z_1)=0$$

を満たすときは，$z_1h'(z_1)$は負の実数であって

(1.11) $$-z_1h'(z_1)\geqq p\,|h(0)-h(z_1)|^2/2$$

である。ここで勿論 $h(0)=1$ である。

これは筆者が〔1〕で示した Lemmaであって，Miller-Mocanu の Lemmaの1つの一般化である。これを更に一般化して次の補題が得られる。

補題B．関数 $h(z)=c_0+c_pz^p+c_{p+1}z^{p+1}+\cdots$，$\mathrm{Re}\ c_0>0$，が $|z|\leqq|z_1|$ において解析的で，上の2つの条件(1.9)，(1.10) を満たせば，$z_1h'(z_1)$は負の実数であって，

(1.12) $$-z_1h'(z_1)\geqq p\,|c_0-h(z_1)|^2/2\,\mathrm{Re}\ c_0$$

である。

何故ならば，この場合かんすう

$$H(z)=\{h(z)-i\,\mathrm{Im}\,h(0)\}/\,\mathrm{Re}\,h(0)=1+bz^{p}+\cdots$$

を考えれば，$H(z)$は補題Aの $h(z)$ と同じ仮定を満たすから

$$-z_1H'(z_1)\geqq p\,|\,H(0)-H(z_1)\,|^2/\,2$$

が成り立つ。これを書き直せば (1.12) となる。

2. 定理

以上の準備のもとに関数が spiral-likeであるための十分条件を導こう。

定理1. $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$ を開単位円板Uにおいて解析的で，$f(z)/z\neq 0$ とする。もしも $|\,\alpha\,|<\pi/2$ なる実数αに対して

(2.1) $\quad |\,p\tan\alpha+\mathrm{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}\,|<\sqrt{p(p+2)+p^2\tan^2\alpha},\ z\in U$

ならば，$f(z)$はUにおいて，原点に関してαースパイラル型である。

証明. $h(z)=e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)$ とおくと，$h(z)$は $h(z)=e^{i\alpha}+c_pz^p+\cdots$ の形の展開式を持ち，かつUにおいて解析的で，$\mathrm{Re}\,h(0)=\cos\alpha>0$ である。

いま $\mathrm{Re}\,h(z)>0$, $z\in U$, が成り立たないものと仮定すると，$\mathrm{Re}\,h(z)>0$ for $|\,z\,|<|\,z_1\,|$, $\mathrm{Re}\,h(z_1)=0$ となる z_1 がUの中に存在する。このとき $h(z_1)=iu$, $z_1h'(z_1)=v$ とおくと，補題Bによって，u, v は実数で

(2.2)
$$\begin{aligned}-v&\geqq p\,|\cos\alpha+i\sin\alpha-iu|^2/\,2\cos\alpha\\&=p(1-2u\sin\alpha+u^2)/\,2\cos\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ。なお (2.1) により $f'(z)\neq 0$, $z\in U$, なので，$u\neq 0$ である。

さて $h(z)$の定義から

(2.3) $\quad 1+zf''(z)/f'(z)=z\,h'(z)/h(z)+e^{-i\alpha}h(z)$

となるので，

$$\begin{aligned}|\,p\tan\alpha+\mathrm{Im}\{z_1f''(z_1)/f'(z_1)\}\,|&=|\,p\tan\alpha+\mathrm{Im}\{z_1h'(z_1)/h(z_1)\\&\quad+e^{-i\alpha}h(z_1)\}\,|=|\,p\tan\alpha-v/u+u\cos\alpha\,|\\&=|\,up\tan\alpha-v+u^2\cos\alpha\,|/\,|\,u\,|\qquad(*)\end{aligned}$$

ここで (2.2) から得られる不等式

$$up\tan\alpha - v \geqq p(1+u^2)/2\cos\alpha$$

を用いると,

$$(*) \geqq \{p(1+u^2)/2\cos\alpha + u^2\cos\alpha\}/|u|$$

$$= \{p/|u|\cos\alpha + |u|(p+2\cos^2\alpha)/\cos\alpha\}/2$$

$$\geqq \sqrt{p^2\sec^2\alpha + 2p} = \sqrt{p(p+2)+p^2\tan^2\alpha}$$

となる。しかしこれは(2.1) に反する。それ故(2.1) の下では上記のような z_1 は存在しない。よって

$$\mathrm{Re}\{e^{i\alpha} zf'(z)/f(z)\} > 0, \quad z \in U$$

が成り立つ。

定理２. $f(z) = z + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots$ をUにおいて解析的で, $f(z)/z \neq 0$ とする。もしも

(2.4) $$|\alpha| < \mathrm{Sin}^{-1}[\sqrt{p(p+2)}/(p+1)]$$

なる実数αに対して

(2.5) $$|(p+1)\sin\alpha + \mathrm{Im}\{e^{i\alpha} zf''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{p(p+2)}, \quad z \in U$$

ならば, $f(z)$はUにおいて, 原点に関してαースパイラル型である。

証明. ここでも関数 $h(z) = e^{i\alpha} zf'(z)/f(z) = e^{i\alpha} + c_p z^p + \cdots$ に対して, 定理１の証明において仮定したのと同様の z_1 の存在を仮定し, $h(z_1) = iu$, $z_1h'(z_1) = v$ とおくと, u, v は実数であって, (2.3) により

$$|(p+1)\sin\alpha + \mathrm{Im}\{e^{i\alpha} z_1f''(z_1)/f'(z_1)\}|$$

$$= |(p+1)\sin\alpha + \mathrm{Im}\{-e^{i\alpha} + e^{i\alpha} z_1h'(z_1)/h(z_1) + h(z_1)\}|$$

$$= |p\sin\alpha - v\cos\alpha/u + u|$$

$$= |up\sin\alpha - v\cos\alpha + u^2|/|u| \qquad (*)$$

ここで(2.2) から得られる不等式

$$up\sin\alpha - v\cos\alpha \geqq p(1+u^2)/2$$

を用いると,

$$(*) \geqq \{p/|u|+(p+2)|u|\}/2 \geqq \sqrt{p(p+2)}$$

となる。これは(2.5) に反する。よって(2.5) の下では

$$\mathrm{Re}\{e^{i\alpha} zf'(z)/f(z)\} > 0, \quad z \in U$$

が成り立つ。（ 注．条件(2.4) が必要なわけは，もしもこれがなかったならば，z=0 において(2.5) が満たされないことが起り得るからである。）

参考文献

〔1〕 坂口杲一，関数が星型であるための十分条件について，京都大学数理解析研究所講究録，No.821(1993)，41-46