数理解析研究所講究録
第 882 巻 1994 年 70-72

Rigidité et conjugaison topologique des groupes kleiniens topologiquement sages

Ken'ichi Ohshika

大鹿　健一（東工大）

1 Introduction

Le but de ce petit compte rendu est d'annoncer des résultats dans un article qui apparaîtra sous le même titre mais en anglais. Il est un problème des plus importants dans la théorie de groupe kleinien de classifier des groupes kleiniens à la conjugaison conforme près. On a bien compris la structure de l'espace des déformations quasi-conforme des groupes kleiniens grâce aux œuvres d'Ahlfors, Bers, Kra, Marden et Sullivan parmi des autres. Alors, c'est le problème important de classifier groupes kleiniens à la conjugaison quasi-conforme près. Lorsque deux groupes kleiniens Γ_1 et Γ_2 sont géométriquement finis, Marden a montré que l'un est une déformation quasi-conforme de l'autre si et seulement s'il y a un homéomorphisme de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1$ à $\mathbf{H}^3/\Gamma_2$ qui préserve les parties cuspidales. On veut trouver des informations, par exemple une sorte d'invariant, pour juger si un groupe kleinien en soit une déformation quasi-conforme d'un autre. Un candidat de telles informations est un invariant donné par les laminations terminales.

Thurston a conjecturé que pour deux groupes kleiniens géométriquement sages Γ_1, Γ_2, s'il y a un homéomorphisme $h : \mathbf{H}^3/\Gamma_1 \to \mathbf{H}^3/\Gamma_2$ qui préserve les parties cuspidales et applique les laminations terminales de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1$ à celles de $\mathbf{H}^3/\Gamma_2$, alors il y ait un homéomorphisme quasi-conforme $\omega : S^2 \to S^2$ tel que $\omega\gamma\omega^{-1} = h_\#(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_1$. Minsky a montré que cette conjecture est vraie si Γ_1 et Γ_2 sont indécomposable en un produit libre, et s'il y a une constante positive qui borne dessous les rayons d'injectivité de tous les points dans $\mathbf{H}^3/\Gamma_1$ et $\mathbf{H}^3/\Gamma_2$. L'un de notre théorème dans cet article est une généralisation du théorème de lamination terminale par Minsky dans le cas où Γ_1 et Γ_2 sont topologiquement sages mais peuvent être décomposable en un produit libre.

En utilisant son théorème de lamination terminale, Minsky a aussi montré que deux groupes kleiniens G_1, G_2 qui sont isomorphes à un groupe fondamental d'une surface fermée et topologiquement conjugués sont aussi quasi-conformément conjugués si le rayon d'injectivité est minoré par une constante positive aux tous points de $\mathbf{H}^3/G_1$ et $\mathbf{H}^3/G_2$. On va généraliser ce théorème aux cas où G_1 est topologiquement sage avec la même présupposition sur le rayon d'injectivité.

2 Les théorèmes principaux

Pour prouver le théorème de lamination terminale, Minsky a utilisé son théorème sur les structures hyperboliques des surfaces plissées tendant au bout d'une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est indécomposable [1] avec la présupposition sur le rayon d'injectivité. Nous allons généraliser le théorème-là aux cas des variétés hyperboliques topologiquement sages.

Théorème 2.1 *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 qui est topologiquement sage. Supposons qu'il y a une constante δ qui minore le rayon d'injectivité aux tous les points de M. Soit e un bout géométriquement infini de M. Alors, il y a un voisinage E de e, un rayon de Teichmüller L, et des constantes positives A, B comme les suivants.*

1. *Le voisinage E est homéomorphe à $S \times \mathbf{R}$ où S est une surface fermée de genre au moins 2.*

2. *Pour chaque surface plissée $f : S \to E$, la structure hyperbolique induite par f sur S est à la distance majorée par A de L.*

3. *Pour chaque point σ dans L, il y a une structure hyperbolique τ à la distance majorée par B de σ, et une surface plissée $f : S \to E$ qui induit la structure hyperbolique τ sur S.*

Le deuxième théorème est une généralisation du théorème de lamination terminale par Minsky.

Théorème 2.2 *Soient Γ_1, Γ_2 des groupes kleiniens topologiquement sages. Soient C_1, C_2 des cœurs topologiques de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1$, $\mathbf{H}^3/\Gamma_2$ respectivement tels que chaque* *composante de complément de C_1, C_2 est homéomorphe au produit direct d'une surface fermée et un intervalle ouvert. Supposons qu'il y ait une constante positive δ_0 qui borne dessous les rayons d'injectivités des points de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1, \mathbf{H}^3/\Gamma_2$. Supposons en plus qu'il y ait un homéomorphisme $h : \mathbf{H}^3/\Gamma_1 \to \mathbf{H}^3/\Gamma_2$ qui applique C_1 à C_2 tel que si $\lambda \subset C_1$ est une lamination terminale de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1$, l'image $h(\lambda)$ est aussi celle de $\mathbf{H}^3/\Gamma_2$. Alors, il y a un homéomorphisme quasi-conforme $\omega : S^2_\infty \to S^2_\infty$ tel que $\omega\gamma\omega^{-1} = h_\#(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_1 \cong \pi_1(\mathbf{H}^3/\Gamma_1)$.*

Le dernier théorème énonce qu'une conjugaison topologique des groupes kleiniens avec la présupposition sur les rayons d'injectivité induit une conjugaison quasi-conforme.

Théorème 2.3 *Soient Γ_1 un groupe kleinien topologiquement sage, et Γ_2 un autre groupe kleinien. Dans le cas où Γ_1 serait un groupe libre, on présuppose que Γ_2 est aussi topologiquement sage. Supposons qu'il y ait un homéomorphisme $f : S^2_\infty \to S^2_\infty$ tel que $f\Gamma_1 f^{-1} = \Gamma_2$. Supposons en plus que les rayons d'injectivité de tous les points de $\mathbf{H}^3/\Gamma_1, \mathbf{H}^3/\Gamma_2$ soient minorés par une constante positive ϵ_0. Alors, il y a un homéomorphisme quasi-conforme $\omega : S^2_\infty \to S^2_\infty$ tel que $\omega\gamma\omega^{-1} = f\gamma f^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_1$.*

Bibliographie

[1] Y. Minsky, *Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds*, Topology, **32**, (1993), 625-647

[2] Y. Minsky, *On rigidity, limit sets and end invariants of hyperbolic 3-manifolds* to appear in Journal of the A.M.S.

[3] K. Ohshika, *Topologically conjugate Kleinian groups*, preprint

[4] K. Ohshika, *Rigidity and topological conjugates of topologically tame Kleinian groups*, preprint