数理解析研究所講究録
第 884 巻 1994 年 46-53

Galois representations in the pro-l fundamental groups of punctured elliptic curves

東大数理　中村博昭 (Hiroaki Nakamura)

§1. 本稿では以下素数 l を固定します。代数体 k 上定義された双曲型代数曲線 C に付随する pro-l 外ガロア表現

$$\varphi_C : G_k \longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1(\overline{C})(l)$$

は曲線の代数的、数論的性質をたいへん良く反映している研究対象であることが最近ますます明らかになって来たように思います。(ここで G_k は k の絶対ガロア群、$\overline{C}$ はスカラー拡大 $C\otimes\overline{k}$ を表し、$\pi_1(\overline{C})(l)$ は副有限基本群の最大 pro-l 商群をあらわします。) もともとは伊原氏により $C=\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の場合に外ガロア表現 φ_C の巧妙な "メタアーベル変形" を用いて 2 変数べき級数環の乗法群への表現

$$G_{\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})} \longrightarrow \mathbb{Z}_l[[T_1,T_2]]^\times$$

が構成され、これの特殊値指標がヤコビ和量指標を補間する一方、係数指標が Soule 円指標で記述出来るという結論から、組合せ群論と整数論の間に興味深い結びつきが存在することが明らかになり、我々の出発点となったわけです (cf. [PGC], [IKY], [A], [C])。この場合に更にヤコビ和合同関係式への応用や円分体論の Vandiver 予想との関係が示される一方 ([M], [IK])、高種数の曲線 C の場合への準備が進められ ([AK], [K])、安定還元の場合の惰性群のモノドロミー表現の様子などが調べられました ([O]、本巻中の織田、玉川氏の記事参照)。

筆者は、前後して Grothendieck の予想へのアプローチを始め、その特殊な場合に到達するための一つの "良い" 問題意識として、

外ガロア表現の"トレリ像"を構成すること

を改めて認識するに至りました ([N],[NT],[JMS] など)。ここで言うトレリ像とは φ_C の非自明なガロア像のうち、曲線 C の非特異完備化 X のヤコビ多様体の l-進 Tate 加群や puncture 集合 $X-C$ へ自明に作用する部分の事です。このようなガロア像がどのくらい存在するのか、どう把握すべきなのかは当初全

く暗中模索でしたが、現在では $\mathrm{Out}\pi_1^{pro-l}$ (の副 l 写像類群の部分) に "重み" による良い座標付けが入り、それによる地図帳もある程度作成されているため、その地図帳上の何丁目の何番地に曲線のどの性質に由来するトレリ像がどのくらい来るか、或いは来ないかを調べれば有意義である、という所まで行き着きました ([AN],[NT2])。

この地図帳を手に世間を眺めると、Drinfeld-Ihara による種数 0 の場合のトレリ像の組紐塔による評価の問題 (本巻中の松本真氏の記事参照) や、織田氏による普遍モノドロミー哲学 (本巻中の氏の記事や朝田氏の記事、高尾 - 上野氏との記事参照)、森田氏による Johnson 準同型の研究 (同記事参照) などが一望の下に把握され、とても気持ちの良い景観を楽しむことも出来ます。勿論これだけではまだ見えてこない不思議な現象、筆者には良く分からない謎を周囲の優れた方々がいろいろ指摘して下さるので、楽しみはまだまだこれからです。

§2. さて、本稿では $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ と同じホモトピー型を持つもう一つの位相曲面上の代数構造 "楕円曲線マイナス一点" の場合を扱います。この場合に最初に注目したのは S.Bloch 氏 [B] であると思われ、角皆氏がこれを精確に解釈し再定式化しました ([T1] または本巻中の氏の記事参照)。まず E を k 上定義された楕円曲線とし、O をその原点、$E_0:=E-\{O\}$ とおきます。pro-l 基本群 $\pi_1(\overline{E}_0)(l)$ を簡単のため単に π_1 とかくことにします。この群は階数 2 の自由副 l 群

$$\Pi_{1,1}=\{x,y,z\mid [x,y]z=1\}$$

と (z が原点 O 上の惰性群の生成元を与えるように) 同一視されます。我々の外ガロア表現

$$\varphi_{E_0}:G_k\longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1$$

の像は副 l 写像類群とよばれる z で生成される部分群の共役類 (つまり O 上の惰性群全体) をたもつ部分 $\Gamma_{1,1}\subset \mathrm{Out}\pi_1$ に含まれます。$\Gamma_{1,1}$ には自然な重み filtration

$$\Gamma_{1,1}\supset\Gamma_{1,1}(1)\supset\Gamma_{1,1}(2)\supset\cdots$$

がはいり、次の性質を持ちます。

(1) $\Gamma_{1,1}/\Gamma_{1,1}(1)\cong \mathrm{GL}(T_lE)\cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_l)$、

(2) それ以下の各次数商 $\mathrm{gr}^m\Gamma_{1,1}$ は有限生成の自由 $\mathbb{Z}_l$ 加群。

定義体 k の拡大体 $k(m)$ を $\varphi_{E_0}^{-1}(\Gamma_{1,1}(m))$ の固定体として導入すると

$$k(1)=k(E_{l^\infty})$$

が成り立ちます。外ガロア表現 φ_{E_0} の像のうち、$\Gamma_{1,1}(1)$ にはいるものがトレリ像であり、定義によりそれが沢山あることと体拡大の塔 $k(1)\subset k(2)\subset k(3)\subset$

$\cdots$ が非自明であることが対応しています。それをみるために我々は外ガロア表現の"メタアーベル変形"を、組合せ群論の技法により2変数べき級数環の加法群への filtration を保つ準同型

$$\gamma : \Gamma_{1,1}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]$$

を定義することで構成します。後に詳しく述べますが筆者はこれに φ_{E_0} を合成したガロア表現

$$\alpha = \gamma \circ \varphi_{E_0} : G_{k(E_{l^\infty})} \longrightarrow \mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]$$

の明示公式を得、その非零性を観察することでトレリ像をたくさん得ることができました。

§3. γ の組合せ群論的定義をします。各 $f \in \Gamma_{1,1}(1) \subset \mathrm{Out}\pi_1$ に対して、持ち上げ $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}\pi_1$ を z を固定するように取れますが、z の生成する巡回部分群が π_1 の中で自己正規化することより、その持ち上げは z^a $(a \in \mathbb{Z}_l)$ による共役を除いて決まります。$a \neq 0$ のとき、この共役は2次の重みを持ちますから、3次以上の重みをもつ持ち上げはあるとすれば一意的です。計算により、全ての $\Gamma_{1,1}(1)$ の元は4次以上の重みを持つ (即ち $\Gamma_{1,1}(1) = \Gamma_{1,1}(4)$) ことがわかるので、常に上のような $\tilde{f}$ が定まることになります。この持ち上げ $\tilde{f}$ は π_1 の生成元 x, y への作用できまりますから $s_1 = \tilde{f}(x)x^{-1}$ と $s_2 = \tilde{f}(y)y^{-1}$ の組 $(s_1, s_2) \in (\pi_1)^2$ が f の"座標"となるわけですが、$\tilde{f}$ は π_1 のアーベル化に自明に作用することから実際にはこの座標は交換子群の元の組 $\in (\pi_1')^2$ であり、これをさらに2階交換子群 π_1'' を法として考えた組を

$$(S_1, S_2) \in (\pi_1'/\pi_1'')^2$$

とします。ここで、π_1'/π_1'' は共役により完備群環 $\mathbb{Z}_l[[\pi_1/\pi_1']]$ 上階数1の自由加群であることが知られていて、その生成元として $Z := z \bmod \pi_1''$ がとれます。この完備群環は x, y の像を $1+T_1, 1+T_2$ とそれぞれ置くことにより2変数べき級数環 $\mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]$ と同一視されるので、

$$S_i = G_i(T_1, T_2) \cdot Z \qquad (i = 1, 2)$$

となる級数の組 (G_1, G_2) が決まります。これについて、$\tilde{f}$ が z を固定するという条件を書き下すと $G_1(T_1, T_2) \cdot T_2 = G_2(T_1, T_2) \cdot T_1$ となり、因数分解の一意性から

$$G_i(T_1, T_2) = H(T_1, T_2) T_i \qquad (i = 1, 2)$$

となる級数 $H(T_1, T_2) \in \mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]$ が定まります。初めの $f \in \Gamma_{1,1}(1)$ に対して、この $H(T_1, T_2)$ を対応させることによって写像

$$\gamma : \Gamma_{1,1}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]$$

を定義します。これが加法群への準同型であることや、filtration を保つこと、$GL_2(\mathbb{Z}_l)$ の自然な作用で両立していることなどが確かめられます。

§4. ガロア群 $G_{k(E_{l^\infty})}$ の元 σ に対して $\alpha = \gamma \circ \varphi_{E_0}$ による像を $\alpha_\sigma(T_1, T_2)$ と書くことにして、その明示公式を記述するための支度をします。代数閉包 $\overline{k}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込みを固定します。楕円曲線 E の第1種微分の基底 ω をとり、その周期格子を $\mathfrak{L} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ とします (但し ω_1, ω_2 は ω の $x, y \in \pi_1$ に沿った周期で、$\tau = \omega_1/\omega_2$ は上半平面にくるように生成元 x, y は取っておく)。格子 $\mathfrak{L}$ に対して $\tau = \omega_1/\omega_2$ とおきテータ関数

$$\theta(z) = \exp \frac{6\pi z(z-\bar{z})}{\Im(\tau)} \cdot q_\tau (q_z^{1/2} - q_z^{-1/2})^{12} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \{(1 - q_\tau^\nu q_z)(1 - q_\tau^\nu q_z^{-1})\}^{12}$$

を考えます。この関数は格子 $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ の l べき分点上で $k(E_{l^\infty})$ に値をとります。今

$$\varepsilon_N^{ij} = \prod_{\substack{0 \le a,b < l^N \\ l \nmid (a,b)}} \theta\left(\frac{a\tau + b}{l^N}\right)^{a^i b^j}.$$

とおくと、これは適当な分配則をみたすため、

$$(\sigma - 1)(\varepsilon_N^{ij})^{1/l^N} = \zeta_N^{\kappa_{ij}(\sigma) \bmod l^N} \qquad (N \ge 1)$$

により $\kappa_{ij}(\sigma) \in \mathbb{Z}_l$ が定まります。こうして我々に必要なガロア指標 $\kappa_{ij} : G_{k(1)} \to \mathbb{Z}_l$ が得られました。本稿で報告する主定理を述べます。

定理 (**[N2] Theorem 4.12**). *In the ring* $\mathbb{Q}_l[[U_1, U_2]]$ *with* $U_i = \log(1 + T_i)$ $(i = 1, 2)$, *we have*

$$\alpha_\sigma(T_1, T_2) = \sum_{\substack{m \ge 2 \\ even}} \frac{1}{1 - l^m} \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \ge 0}} \kappa_{ij}(\sigma) \frac{U_1^i U_2^j}{i!j!} \qquad (\sigma \in G_{k(E_{l^\infty})}).$$

ガロア指標の性質から、ある自然数 $N \ge 1$ が存在し、$(l-1)l^{N-1}$ の倍数からなる4つ組 (i, j, u, v) に対し

$$\kappa_{i0} + \kappa_{0j} - \kappa_{uv} : G_{k(1)} \to \mathbb{Z}_l$$

は開準同型を与えるため ([N2] 3.12)、特に $i = j = m-2$, $u = (l-1)l^{N-1}$, $v = m - 2 - u$ と置くことにより次のようにトレリ像を得ることができます。

系 ([N2] **Corollary 4.15).** *For any elliptic curve E over a number field k, there is an integer N such that for every $m \equiv 2 \mod (l-1)l^{N-1}$ with $m > 2+(l-1)l^{N-1}$,*

$$\mathrm{gr}^m\varphi : \mathrm{Gal}(k(m+1)/k(m)) \hookrightarrow \mathrm{gr}^m\Gamma_{1,1}$$

gives a nontrivial homomorphism. □

前述のように副 l 写像類群の重み次数 Lie 環 $\bigoplus_{m=1}^{\infty}\mathrm{gr}^m\Gamma_{1,1}$ には良い座標がはいります。これを使って上で得られたトレリ像を次々と交換子を取って計算して行くときどのくらいつぶれずに残るか？という問題がありますが、これについては角皆氏が(伊原－松本氏の種数0のときの方法を一般化した)計算道具一式を開発され、たくさん非自明な物が ($\ker(\gamma)$ の部分に)残ることを示しました。(本巻中松本氏、角皆氏の記事参照 cf. also [T2])。これは外ガロア像がアーベル群から“ほど遠い”ことを定量的に示したものと解釈することができ、興味深い結果です。(ちなみに A.Grothendieck は“遠アーベル代数多様体”という未定義用語を導入して、この仮想のクラスに属す多様体の数論的基本群を研究することを提唱しています。双曲型曲線はその典型例とされていて、上の様な現象も“遠アーベル性”の重要な要素と考えられるようになってきました。cf. [G], [JMS]) 次数商加群 $\mathrm{gr}^m\Gamma_{1,1}\otimes\mathbb{Q}_l$ には自然に $SL(2,\mathbb{Q}_l)$ が作用しますので、これで既約表現分解を計算することができます。そこには m が偶数 >2 の時、重複度1で $m-2$ 次の自然表現の対称テンソル表現があらわれ、これが γ で2変数べき級数環に落ちる部分です。以前からこの分解表([NT2])の $m = 6, 10, 14, \ldots$ の部分に $SL(2)$- 固定成分が現れていて一部の人々から注目を集めていましたが、最近、織田氏により導入された“普遍モノドロミー表現”[O2] をモジュライ空間達の幾何学的相関関係によって連結させる方法が効を奏し、この部分に $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ に由来するトレリ像がそっくり現れていることがあきらかになりました。(正確にいうとトレリ像のなす次数 Lie 環の $\mathrm{Gal}(k(1)/k)\cap SL(2)$-coinvariant 商として現れています)。実はこれはアフィン曲線のモジュラスによらずに恒常的に存在しているトレリ像となっていて大変神秘的な結論であると筆者は思います。これについては本巻中の高尾・上野氏との共同報告とそこの引用文献を参照して下さい。ここで得られたトレリ像の応用として Grothendieck 予想の特別な場合に対する肯定的な結果などが得られますが、本稿ではトレリ像に焦点を置いていますので省略することにします。興味のある方は論文 [N2] を参照して下さい。

§5. 比較のために $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の場合を復習しておきましょう([ICM] 参照)。この場合も $\pi_1 = \pi_1(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}-\{0,1,\infty\})(l)$ は階数2の自由副 l 群ですが、惰性群の入り方が楕円曲線マイナス原点のときとは違っているため副 l 写像類群 $\Gamma_{0,3}\subset\mathrm{Out}\pi_1$ の様子は $\Gamma_{1,1}$ とは違い、重み filtration

$$\Gamma_{0,3}\supset\Gamma_{0,3}(1)\supset\Gamma_{0,3}(2)\supset\cdots$$

は、次の性質を持ちます。

(1) $\Gamma_{0,3}/\Gamma_{0,3}(1) \cong \mathbf{G}_m (\cong \mathbb{Z}_l^\times)$、

(2) それ以下の各次数商 $\mathrm{gr}^m\Gamma_{0,3}$ は有限生成の自由 $\mathbb{Z}_l$ 加群だが、m が奇数のときはゼロ。

外ガロア表現 $\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \Gamma_{0,3}$ から拡大体 $\mathbb{Q}(m)$ を $\varphi^{-1}(\Gamma_{0,3}(m))$ の固定体として導入すると

$$\mathbb{Q}(1) = \mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$$

が成り立ちます。このとき π_1 の"メタアーベル化"から自然な準同型

$$\gamma : \Gamma_{0,3}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_l[[T_1, T_2]]^\times$$

が構成され([PGC]), これは filtration を左辺の $2k$次 の部分をそれぞれ右辺の $1 + (k$次$)$ の部分に移すようにたもちます。ここで Anderson/Coleman/伊原・金子・行成の明示公式 ([A],[C],[IKY]) は各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})}$ にたいして $J_\sigma(T_1, T_2) = \gamma \circ \varphi(\sigma)$ とおくと

$$J_\sigma(T_1, T_2) = \exp \sum_{\substack{m \geq 3 \\ odd}} \frac{\chi_m(\sigma)}{1 - l^{m-1}} \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} \frac{U_1^i U_2^j}{i!j!}$$

と表示できることを主張しています。ここで $U_i = \exp(1 + T_i)$ $(i = 1, 2)$ であり、$\chi_m : G_{\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})} \to \mathbb{Z}_l$ は円 l 単数の系から構成される指標で、各奇数 $m \geq 3$ に対して自明でなく (cf.[So])、これより $\mathrm{gr}^{4k+2}\Gamma_{0,3}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ に入るトレリ像が得られるわけです。前節の種数 1 のときの $\alpha_\sigma(T_1, T_2)$ の明示公式は、証明は異質ですが、この公式の類似を追求する過程で得られたものです。

References

[A] G.Anderson, *The hyperadelic gamma function*, Invent. Math. **95** (1989), 63–131.

[AK] M.Asada, M.Kaneko, *On the automorphism groups of some pro-l fundamental groups*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 137–159.

[AN] M.Asada, H.Nakamura, *On graded quotient modules of mapping class groups of surfaces*, Israel J. Math. (to appear).

[B] S.Bloch, *letter to P.Deligne, 1984.*

[C] R.Coleman, *Anderson-Ihara theory: Gauss sums and circular units*, Adv. Stud. in Pure Math. **17** (1989), 55–72.

[G] A.Grothendieck, *letter to G.Faltings, 1983.*

[IK] H.Ichimura, M.Kaneko, *On the universal power series for Jacobi sums and the Vandiver conjecture*, J. of Number Theory **31** (1989), 312–334.

[PGC] Y.Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations, and complex multiplications*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[ICM] Y.Ihara, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proc. ICM, Kyoto (1990), 99–120.

[IKY] Y.Ihara, M.Kaneko, A.Yukinari, *On some properties of the universal power seires for Jacobi sums*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 65–86.

[K] M.Kaneko, *Certain automorphism groups of pro-l fundamental groups of punctured Riemann surfaces.*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **36** (1989), 363–372.

[KL] D.S.Kubert, S.Lang, *Modular units*, Springer, 1981.

[M] H.Miki, *On the l-adic expansion of certain Gauss sums and its applications*, Adv. Studies Pure Math. **12** (1987), 87–118.

[N] H.Nakamura, *Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus*, J. Math. Sciences, Univ. of Tokyo **1** (to appear).

[N2] —–, *On exterior Galis representaions associated with open elliptic curves*, Univ. of Tokyo, preprint **93-17**.

[N3] —–, *Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups*, RIMS, preprint **976** (1994).

[JMS] —–, 副有限基本群のガロア剛性, 数学 '論説', 岩波書店 (to appear).

[NT] H.Nakamura, H.Tsunogai, *Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class groups*, J. Reine Angew. Math **441** (1993), 115–144.

[NT2] H.Nakamura, H.Tsunogai, *Atlas of pro-l mapping class groups and related topics*, in preparation.

[NTU] H.Nakamura, N.Takao, R.Ueno, *Some stability properties of Teichmüller modular function fields of pro-l weight structures*, Math. Ann. (to appear).

[O] T.Oda, *A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve II,*, J. Number Theory (to appear).

[O2] T.Oda, *The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves,*, Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9.-15. Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint MPI/93-57.

[So] C.Soulé, *On higher p-adic regulators*, Springer Lect. Note in Math. **854** (1981), 372–401.

[T1] H.Tsunogai, *On the automorphism group of a free pro-l meta abelian group and an application to Galois representations*, Math. Nachr (to appear).

[T2] H.Tsunogai, *On some derivations of Lie algebras related to Galois representations*, preprint.