数理解析研究所講究録
第 884 巻 1994 年 129-140

Galois representations attached to one-point-punctured elliptic curves (1 点抜き楕円曲線に付随する Galois 表現)

早大理工 角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)

0. 序

E を代数体 k 上定義された楕円曲線、O を E の k 有理点とし、$C = E\setminus\{O\}$ とおく。C に付随する副 l 外 Galois 表現

$$\varphi_C : G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1^{(l)}(C \otimes \bar{k}) \tag{0.0.1}$$

を考える。$\pi_1^{(l)}(C\otimes\bar{k})$ の重み filtration から G_k の中心的 filtration $\{G_k(m)\}_{m\geq 0}$ (言い換えれば k の体拡大の塔 $k = k(0) \subset k(1) \subset k(2) \subset \cdots$) が引起こる。本稿では、隣接商

$$\mathcal{G}^{(m)} = G_k(m)/G_k(m+1) \quad (m \geq 1) \tag{0.0.2}$$

(これは有限生成自由 Z_l- 加群となる) の階数について、

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m:\mathrm{even}}} \mathrm{rank}_{Z_l}\mathcal{G}^{(m)} \longrightarrow \infty$$

となることを Lie 環の derivation を計算することによって示す。

尚、Galois 表現の文脈に於けるこの型の定理は、$\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合には伊原[I] を萌芽として松本[M] によって知られている。

一般に自由 Lie 環の derivation の計算を実行するには次の難点がある。

(1) Jacobi 律により、一見非自明な線型関係式が沢山ある。
(2) Leibniz 則により、derivation を施す度に項数が増える。

この難点を次のようにして克服した。

(1) ⇒ 標準的な基底として「Hall 基底」を採った。
(2) ⇒ 適切な次数付けを導入して最低次数の項のみに着目した。

本稿は主に筆者の論文[T] の要約であるが、講演後に松本 (京大数理研)・中村 (東大数理) 両氏に最新の結果との関係について御教示頂いたことを最後に補足した。改めて両氏に感謝する。

1. 1点抜き楕円曲線の GALOIS 表現と主定理

1.1. k, E, O, C を前節の通りとする。$\bar{C} = C \otimes_k \bar{k}$ の副 l 基本群 $\pi_1 = \pi_1^{(l)}(\bar{C})$ は次なる表示を持つ階数 2 の副 l 自由群 Π と同型である。

$$\Pi = \Pi_{1,1} = \langle x, y, z \,|\, z = [x, y] \rangle_{\text{pro-}l} \tag{1.1.1}$$

更に O の惰性群を z が位相生成するように両者を同一視することが出来る。以下この表示と同一視を固定する。次に

$$\tilde{\Gamma}_{1,1} = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\Pi_{1,1} \,|\, \sigma(z) \sim z^{\alpha}, \alpha \in \boldsymbol{Z}_l^{\times}\} \tag{1.1.2}$$

$$\Gamma_{1,1}^{*} = \{\sigma \in \tilde{\Gamma}_{1,1} \,|\, \sigma(z) = z^{\alpha}, \alpha \in \boldsymbol{Z}_l^{\times}\} \tag{1.1.3}$$

$$\Gamma_{1,1} = \tilde{\Gamma}_{1,1}/\mathrm{Int}\Pi_{1,1} \subset \mathrm{Out}\Pi_{1,1} \tag{1.1.4}$$

($\sim$ は Π 内での共役) とおく。$\Gamma_{1,1}$ は自然に $\Gamma_{1,1}^{*}/\langle \mathrm{Int}(z) \rangle$ と同型である。(以下では種数と抜く点の数とを表す添字 $_{1,1}$ は、特に強調するとき以外は省略する。)

1.2. $\Pi_{1,1}$ の重み filtration は位相的降中心列 $\{\Pi(m)\}_{m \geq 1}$:

$$\Pi(1) = \Pi \tag{1.2.1}$$

$$\Pi(m+1) = \overline{[\Pi, \Pi(m)]} \quad (m \geq 1)$$

に他ならない。(重み filtration の一般論は[AK][K][NT] 等を参照のこと)

$$\mathrm{Gr}\Pi = \bigoplus_{m \geq 1} \mathrm{gr}^m \Pi = \bigoplus_{m \geq 1} \Pi(m)/\Pi(m+1) \tag{1.2.2}$$

とおく。$m \geq 1$ に対し $\mathrm{gr}^m \Pi$ は有限生成自由 $\boldsymbol{Z}_l$ 加群で、$\mathrm{Gr}\Pi$ は $X = x \bmod \Pi(2), Y = y \bmod \Pi(2)$ で生成される自由 Lie 環となり、上の直和は全次数 $\tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(Y) = 1$ による斉次成分への分解と一致する。又、1 次部分への線型作用から自然に $GL(2) = GL(2, \boldsymbol{Z}_l)$ の作用が定まる。

1.3. Π の重み filtration に対応して $\tilde{\Gamma}, \Gamma^{*}, \Gamma$ の部分群を

$$\tilde{\Gamma}(m) = \left\{ \sigma \in \tilde{\Gamma} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma(x)x^{-1}, \sigma(y)y^{-1} \in \Pi(m+1) \\ \sigma(z) \overset{m}{\sim} z \end{array} \right\} \tag{1.3.1}$$

$$\Gamma^{*}(m) = \Gamma^{*} \cap \tilde{\Gamma}(m) \tag{1.3.2}$$

$$\Gamma(m) = \tilde{\Gamma}(m)\mathrm{Int}\Pi/\mathrm{Int}\Pi \tag{1.3.3}$$

($\overset{m}{\sim}$ は $\Pi(m)$ の元による共役) と定める。$\{\tilde{\Gamma}(m)\}_{m \geq 1}, \{\Gamma^{*}(m)\}_{m \geq 1}, \{\Gamma(m)\}_{m \geq 1}$ も中心的 filtration となり、次数商

$$\mathrm{gr}^m \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(m)/\tilde{\Gamma}(m+1), \quad \mathrm{gr}^m \Gamma^{*} = \Gamma^{*}(m)/\Gamma^{*}(m+1), \quad \mathrm{gr}^m \Gamma = \Gamma(m)/\Gamma(m+1)$$

は $m \geq 1$ のとき有限生成自由 $\boldsymbol{Z}_l$ 加群で、

$$(1.3.4) \qquad \mathrm{Gr}\tilde{\Gamma} = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\tilde{\Gamma}, \quad \mathrm{Gr}\Gamma^* = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\Gamma^*, \quad \mathrm{Gr}\Gamma = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\Gamma$$

は群の交換子から引起こる Lie 括弧 $[,]$ により次数 Lie 環となる。各次数商の階数は既知 ([NT] Corollary(1.16) 参照) で、$m \leq 3$ の時は $\mathrm{gr}^2\tilde{\Gamma} = \mathrm{gr}^2\Gamma^* \simeq \boldsymbol{Z}_l$ ($\mathrm{Int}(z)$ が生成) 以外は全て 0 であり、又、$m \geq 4$ の時自然に $\mathrm{gr}^m\Gamma \simeq \mathrm{gr}^m\Gamma^*$ である。Γ^* の共役作用から $\mathrm{Gr}\Gamma^*$ 上に自然に $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{Z}_l)$ の作用が定まる。

1.4. $\tilde{\Gamma}$ の Π への作用から、$\mathrm{Gr}\Pi$ に derivation として $\mathrm{Gr}\tilde{\Gamma}$ が作用する。$\sigma \in \mathrm{gr}^m\tilde{\Gamma}$ に対し $\mathrm{Gr}\Pi$ の derivation D_σ を

$$(1.4.1) \qquad D_\sigma : \begin{cases} X & \longmapsto \bar{\sigma}(x)x^{-1} \bmod \Pi(m+2) \\ Y & \longmapsto \bar{\sigma}(y)y^{-1} \bmod \Pi(m+2) \end{cases}$$

($\bar{\sigma} \in \tilde{\Gamma}(m)$ は σ の代表元) とすると well-defined で、$\sigma \mapsto D_\sigma$ により次数 Lie 環の単射準同型

$$(1.4.2) \qquad \mathrm{Gr}\tilde{\Gamma} \hookrightarrow \mathrm{DerGr}\Pi$$

を得る。但し $\mathrm{DerGr}\Pi$ の次数付けは $\mathrm{Gr}\Pi$ のから自然に引き起こる (§2)。$\mathrm{Gr}\tilde{\Gamma}$ の像は

$$(1.4.3)\ \mathrm{Der}^\flat\mathrm{Gr}\Pi = \{D \in \mathrm{DerGr}\Pi \,|\, D([X,Y]) = [T,[X,Y]] \ (\exists T \in \mathrm{Gr}\Pi)\}$$

の次数が正なる部分に一致し、$\mathrm{Gr}\Gamma^*$ は

$$(1.4.4) \qquad \mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi = \{D \in \mathrm{Der}^\flat\mathrm{Gr}\Pi \,|\, D([X,Y]) = 0\}$$

の中に写る。$\mathrm{Gr}\Pi$ への作用から $\mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi$ にも $\mathrm{GL}(2)$ が作用するが、このとき (1.4.2)は $\mathrm{GL}(2)$- 同変的である。$\mathrm{gr}^m\Gamma^*$ の $\mathrm{GL}(2)$- 既約分解は判っていて、特に最高の重みは $m-2$ で重複度 1 である。この既約成分を H_m とする。

1.5. さて、C に付随した副 l 外 Galois 表現

$$(1.5.1) \qquad \varphi_C : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Out}\Pi$$

を考察しよう。この像は、O の惰性群 $\langle z \rangle$ の共役類を変えないことから、Γ に含まれる。filtration の m 番目で切った表現

$$(1.5.2) \qquad \varphi_C(m) : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \Gamma/\Gamma(m)$$

の核の固定体を $k(m)$ とすることにより、体の塔 $\{k(m) = k_C(m)\}_{m\geq 0}$ が得られる。

$$(1.5.3) \qquad \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(m)) = \mathrm{Ker}\varphi_C(m) \quad (m \geq 1)$$

$\varphi_C(1)$ は E に付随する l 進表現に一致するので $k(1) = k({}_{l^\infty}E)$(E の l 幂分点の体) であり、$\{k(m)\}_{m\geq 1}$ は $k(1)$ の中心拡大の塔となる。そこで

(1.5.4) $$\mathcal{G} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(m)} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathrm{Gal}(k(m+1)/k(m))$$

とおけば、φ_C は自然に次数 Lie 環の単射準同型

(1.5.5) $$\mathrm{Gr}\varphi = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathrm{gr}^m\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Gr}\Gamma.$$

を引起こす。$m \leq 3$ のとき $\mathrm{gr}^m\Gamma = 0$ であるから、$k(1) = k(2) = k(3) = k(4)$、又、$m$ が奇数の時 $\mathcal{G}^{(m)} = 0$、即ち $k(m) = k(m+1)$([N] Proposition 4.2) となる。$m \geq 4$ において $\mathrm{gr}^m\Gamma$ と $\mathrm{gr}^m\Gamma^*$ とを同一視し、更に(1.4.2)と合成して単射準同型

(1.5.6) $$\varphi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi$$

を得る。これを外 Galois 表現 φ_C の Lie 化と呼ぶ。

1.6. φ_C 及び $\varphi_{\mathcal{G}}$ について、中村[N] は、代数体 k 上定義された任意の楕円曲線 E に対し $\mathcal{G} \neq 0$ を示した。これについて簡単に紹介する。Π の meta-abel 商 Π/Π'' ($\Pi'' = [[\Pi,\Pi],[\Pi,\Pi]]$) を考え、

(1.6.1)
$$\Psi^* = \{f \in \mathrm{Aut}\Pi/\Pi'' | f(\bar{z}) = \bar{z}^{\alpha}, \alpha \in \boldsymbol{Z}_l^{\times}\}$$

(1.6.2)
$$\Psi^*(m) = \{f \in \Psi^* | f \text{ が } \Pi/\Pi(m+1)\Pi'' \text{ に自明に作用}\}\ (m \geq 1)$$

とおく。自然な射影 $\Pi \to \Pi/\Pi''$ から引起こる準同型

(1.6.3) $$\gamma : \Gamma^* \longrightarrow \Psi^*$$

により、$\Gamma^*(m)$ は $\Psi^*(m)$ の中へ写り、従って次数 Lie 環の準同型

(1.6.4)
$$\mathrm{Gr}\gamma = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\gamma : \mathrm{Gr}\Gamma^* \longrightarrow \mathrm{Gr}\Psi^* = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\Psi^* = \bigoplus_{m\geq 1} \Psi^*(m)/\Psi^*(m+1)$$

(ここに $\mathrm{Gr}\Psi^*$ は可換 Lie 環とみる) が引起こる。$\mathrm{gr}^m\Gamma^*$ の時と同様に $\mathrm{gr}^m\Psi^*$ にも $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Z}_l)$ の作用が自然に定まり、$\mathrm{gr}^m\gamma$ は $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Z}_l)$- 同変的である。実際、$\mathrm{gr}^m\gamma$ は $\mathrm{gr}^m\Gamma^*$ の $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Z}_l)$ に関する重み最高の既約成分 H_m への射影と同一視出来る。

1.7. (1.5.1)と(1.6.3)とを合成して新たなGalois表現

(1.7.1) $$\psi = \gamma \circ \varphi_C^{(l)} : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \Psi^*/\langle \mathrm{Int}(\bar{z}) \rangle$$

を考えることが出来る。そのLie化

(1.7.2) $$\mathrm{Gr}\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Gr}\Psi^*$$

は(1.5.5)と(1.6.4)との合成で得られる。[N]で示されたのは次の定理である。

定理 1.8 **([N] Corollary(4.15)).** For any elliptic curve E over a number field k, there is an integer N such that for every $m \equiv 2 \mod (l-1)l^{N-1}$ with $m > 2 + (l-1)l^{N-1}$,

$$\mathrm{gr}^m\varphi : \mathcal{G}^{(m)} \hookrightarrow \mathrm{gr}^m\Gamma$$

gives a nontrivial homomorphism. □

実際には、ψ の明示公式(loc.cit. Corollary (4.12))とそれに現れる ϑ 関数の等分値に関するKummer指標の非自明性とから、定理の条件を満たす m に対し $\mathrm{gr}^m\psi$ の非自明性を示した。$\tau_m \in \mathcal{G}^{(m)}$ を $\mathrm{gr}^m\psi$ による像が非自明になる元の1つとしよう。本稿の主定理は次である。

主定理. E を代数体 k 上定義された楕円曲線、$m_i (i = 1, \ldots, k)$ を定理1.8の条件を満たす自然数で $m_{k-1} \neq m_k$ とするとき、

$$[\tau_{m_1}, [\tau_{m_2}, [\cdots, [\tau_{m_{k-1}}, \tau_{m_k}] \cdots]]] \neq 0$$

が成り立つ。□

1.9. 証明の方針は、τ_m が定めるGrΠのderivationをうまく計算して0でない項を取り出すことである。$(\mathrm{gr}^m\psi)(\tau_m) \neq 0$ より $(\mathrm{gr}^m\varphi)(\tau_m) \in \mathrm{gr}^m\Gamma^*$ の H_m への射影は0でない。従って、必要ならGL(2)の作用で動かして、複次数に関する最低次の成分をとることにより、次で与えるderivation$D_m \in \mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi$ について、その反復Lie括弧 $[D_{m_1}, [D_{m_2}, [\cdots, [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}] \cdots]]] \neq 0$ を示すことに帰着する。

(1.9.1) $$D_m : \begin{cases} X \longmapsto (\mathrm{Ad}X)^m Y \\ Y \longmapsto \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^r [(\mathrm{Ad}X)^r Y, (\mathrm{Ad}X)^{m-1-r} Y] \end{cases}$$

この $D_m \in \mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi$ は、$\mathrm{Der}^*\mathrm{Gr}\Pi$ の全次数 m 次の成分のGL(2)に関する重み最高 $(m-2)$ の既約成分のうち複次数最低 $(m-1, 1)$ の元として定数倍を除いて特徴付けられる。計算の実際は§3で述べる。

系. 代数体 k 上定義された任意の楕円曲線 E に対し次が成り立つ。

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m:\mathrm{even}}} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_l} \mathcal{G}^{(m)} \longrightarrow \infty \qquad \square$$

2. 自由 LIE 環の HALL 基底と次数付け

本節では Lie 環での計算で重要な道具である Hall 基底と次数付けとについて一般化した形で述べる。詳しくは[B][H1][H2] 等を参照されたい。但し、そこでは derivation 環の次数付けには触れられていない。

2.1. 或る形式的な記号の集合 $S(\#S = \infty$ も可) に対し、形式的交換子の集合 $\mathcal{C}$ を帰納的に次で定める。

(1) $X \in S \Rightarrow X \in \mathcal{C}$
(2) $C, C' \in \mathcal{C} \Rightarrow [C, C'] \in \mathcal{C}$

2.2. 全順序的加法群 A に対し、次を満たす $\omega : \mathcal{C} \to A$ を 次数関数 (次数付け) という。

(1) 任意の $X \in S$ に対し $\omega(X) > 0$
(2) 任意の $C, C' \in \mathcal{C}$ に対し $\omega([C, C']) = \omega(C) + \omega(C')$

次数関数 ω は S での値で定まり、又、任意の $C \in \mathcal{C}$ に対し $\omega(C) > 0$ である。$\omega(C)$ を C の 次数 と呼ぶ。以下、次数付け ω を 1 つ取って固定する。

2.3. $\mathcal{C}$ 上の全順序 $<$ で次数付け ω と両立するものをとる、即ち $C, C' \in \mathcal{C}$ に対し

$$\omega(C) < \omega(C') \Longrightarrow C < C'$$

一般の議論にはこの仮定のみで充分だが、実際には ω と両立する S 上の全順序から次で定まる順序 $<$ を考えるのがよい。

(1) $\omega(X) = \omega(C)$ で $X \in S, C \in \mathcal{C} \setminus S \Rightarrow X < C$
(2) $\omega(C) = \omega(C')$ で $C = [C_1, C_2], C' = [C_1', C_2'], C_1 < C_1' \Rightarrow C < C'$

この順序を ω(と S 上の順序 $<$ と) に関する辞書式順序 と呼ぶ。以下では辞書式順序のみを扱う。

2.4. さて、標準交換子 (Hall 交換子) の集合 $\mathcal{B}$ を帰納的に次で定める。

(1) $X \in S \Rightarrow X \in \mathcal{B}$
(2) $C, C' \in \mathcal{B}, C < C'$ のとき、
  (a) $C' \in S \Rightarrow [C, C'] \in \mathcal{B}$
  (b) $C' = [C_1, C_2]$(仮定により $C_1, C_2 \in \mathcal{B}, C_1 < C_2), C \geq C_1$
  $\Rightarrow [C, C'] = [C, [C_1, C_2]] \in \mathcal{B}$

2.5. 単位的可換環 R を係数環として S の元で生成される自由 Lie 環を $\mathcal{L}$ とする。記号 [,] を $\mathcal{L}$ 内での Lie 括弧と見ることにより、$\mathcal{C}$ の元は $\mathcal{L}$ の元と見做せ、$\mathcal{L}$ は R- 加群として $\mathcal{C}$ で生成される。次の定理は本質的に M.Hall による。

定理 **2.6.** $S, \mathcal{C}, A, \omega, <, \mathcal{B}, R, \mathcal{L}$ を上の通りとするとき、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の R- 加群としての基底を成す。 □

この基底 $\mathcal{B}$ を $(S, A, \omega, <)$ に関する Hall 基底 と呼ぶ。

2.7. $a \in A$ に対し、$\omega(C) = a$ なる $C \in \mathcal{B}$ が張る部分 R 加群を $\mathcal{L}^{(a)}$ と書く。$\mathcal{C}$ の元は同じ次数の $\mathcal{B}$ の元の線型結合で表されるので、$\omega(C) = a$ なる $C \in \mathcal{C}$ が張る、といっても同じである。これにより ω に関する $\mathcal{L}$ の次数付け

(2.7.1) $$\mathcal{L} = \bigoplus_{a \in A} \mathcal{L}^{(a)}$$

が定まる。$a \leq 0$ ならば $\mathcal{L}^{(a)} = 0$ である。斉次成分への射影を $p^{(a)} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{(a)}$ とする。$f \in \mathcal{L}$ について高々有限個を除いて $p^{(a)}(f) = f^{(a)} = 0$ であり、$f = \sum_{a \in A} f^{(a)}$(実質有限和) と書ける。$f^{(a)} \neq 0$ なる最小の $a \in A$ を f の次数と呼ぶ (便宜上 $\omega(0) = \infty$ としておく)。

<u>補題</u> **2.8.** (1) $a, a' \in A \Rightarrow [\mathcal{L}^{(a)}, \mathcal{L}^{(a')}] \subset \mathcal{L}^{(a+a')}$
(2) $a \in A$ と $f, g \in \mathcal{L}$ とに対し

$$p^{(a)}([f,g]) = \sum_{a_1+a_2=a} [p^{(a_1)}(f), p^{(a_2)}(g)]$$

(3) 特に、$\omega(f) = a, \omega(g) = a'$ ならば $\omega([f,g]) \geq a + a'$、且つ

$$p^{(a+a')}([f,g]) = [p^{(a)}(f), p^{(a')}(g)] \qquad \square$$

2.9. $\mathcal{L}$ の derivation 全体は $[D, D'] = DD' - D'D$ により Lie 環 $\mathcal{D}$ を成す。$\mathcal{D}$ の次数付けを考えよう。

(2.9.1) $$\mathcal{D}^{(a)} = \{D \in \mathcal{D} \big| D(\mathcal{L}^{(a')}) \subset \mathcal{L}^{(a+a')} \ (\forall a' \in A)\}$$

とおく。

<u>命題</u> **2.10.** 全ての $D \in \mathcal{D}$ は一意に収束和 (実質有限和とは限らない)

$$D = \sum_{a \in A} D^{(a)} \qquad (D^{(a)} \in \mathcal{D}^{(a)})$$

で表される。ここに、「収束和」とは任意の $f \in \mathcal{L}$ に対し有限個の $a \in A$ を除いて $D^{(a)}(f) = 0$ となることであり、又、斉次成分 $D^{(a)}$ は $f \in \mathcal{L}^{(a')}$ に対し

(2.10.1) $$D^{(a)}(f) = p^{(a+a')}(D(f))$$

で与えられる derivation である。 $\square$

<u>定義</u> **2.11.** $D \in \mathcal{D}$ に対し、$D^{(a)} \neq 0$ なる $a \in A$ の下限 (存在すれば) を D の <u>次数</u> と呼び $\omega(D)$ で表す。

<u>補題</u> **2.12.** (1) $a, a' \in A \Rightarrow [\mathcal{D}^{(a)}, \mathcal{D}^{(a')}] \subset \mathcal{D}^{(a+a')}$
(2) $a \in A$ と $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ とに対し、

$$[D_1, D_2]^{(a)} = \sum_{a_1+a_2=a} [D_1^{(a_1)}, D_2^{(a_2)}]$$

(3) 特に、$\omega(D_1) = a, \omega(D_2) = a'$ ならば $\omega([D_1, D_2]) \geq a + a'$、且つ

$$[D_1, D_2]^{(a+a')} = [D_1^{(a)}, D_2^{(a')}] \qquad \square$$

3. $C = E \setminus \{O\}$ に付随した DERIVATION の計算

前節の一般論の下に、1 点抜き楕円曲線の外 Galois 表現から生ずる GrΠ の derivation D_m に関する計算を具体的に行なう。この節では $\mathcal{L}$ を $S_0 = \{X, Y\}$ が生成する自由 Lie 環とし、係数環 R は標数 0 の整域とする。特に $R = \boldsymbol{Z}_l$ のとき $\mathcal{L}$ は GrΠ と同型である。

3.1. $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(S_0)$ を S_0 上の形式的交換子の集合とする。先づ $\mathcal{L}$ に基本的な次数付けを 2 つ導入する。

3.1.1. **全次数** $\tilde{\omega}$. 値群は $A = \boldsymbol{Z}$ とし、

$$\tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(Y) = 1$$

で定める。$X < Y$ から定まる辞書式順序による Hall 基底を $\tilde{\mathcal{B}}$ とする。

3.1.2. **複次数** ω_0. 値群は $A = \boldsymbol{Z}^{\oplus 2}$ で逆引き辞書式順序 (右側から順に比較する、即ち

$$(a, b) < (c, d) \Longleftrightarrow b < d \text{ 又は } (b = d, a < c)$$

とする) を入れておき、

$$\omega_0(X) = (1, 0), \quad \omega_0(Y) = (0, 1)$$

で定める。辞書式順序で Hall 基底 $\mathcal{B}_0$ を定める。

3.2. 上の次数付けだけでは我々の計算に対して非力なので、次のことを考える。$\mathcal{L}^{\#}$ を Y について 1 次以上の項から成る部分 Lie 環、即ち複次数 ω_0 に関して

$$\mathcal{L}^{\#} = \bigoplus_{a \geq (0,1)} \mathcal{L}^{(a)} \tag{3.2.1}$$

とおく。「消去定理」([MKS]Chap.5 §6, [B]§2.9) により次が成立する。

<u>命題</u> **3.3.** $\mathcal{L}^{\#}$ は $S_1 = \{V_n = (\mathrm{Ad}X)^n Y | n = 0, 1, 2, \cdots\}$ で生成される自由 Lie 環である。 $\square$

3.4. 4以上の偶数 m に対して次で定まる $\mathcal{L}$ の derivation D_m の反復 Lie 括弧を計算するのであった。

$$(3.4.1)\qquad D_m : \begin{cases} X & \longmapsto (\mathrm{Ad}X)^m Y \\ Y & \longmapsto \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^r [(\mathrm{Ad}X)^r Y, (\mathrm{Ad}X)^{m-1-r} Y] \end{cases}$$

改めて $D_m([X,Y]) = 0$ に注意しておく。

定理 3.5. $m_1, \ldots, m_k$ を4以上の偶数とする。$m_{k-1} \neq m_k$ ならば

$$[D_{m_1}, [D_{m_2}, [\cdots [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}] \cdots]]] \neq 0 \qquad \square$$

3.6. 証明は、$\mathcal{L}^\#$ に以下の次数付け ω を導入して、最低次の項を実際に計算してなされる。$S_1 = \{V_n = (\mathrm{Ad}X)^n Y | n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が $\mathcal{L}^\#$ の自由生成系であった。値群を $A = Z^{\oplus 4}$(逆引き辞書式順序) とし、次数付け $\omega : \mathcal{C}_1 \to A$ を

(3.6.1)
$$\omega(V_0) = (1,0,0,0),\ \omega(V_1) = (1,1,0,0),\ \omega(V_2) = (1,1,1,0),$$
$$\omega(V_i) = (1,1,1,1) \quad (i \geq 3)$$

で定める。ω とそれに同調する S_1 の順序

$$(3.6.2)\qquad V_0 < V_1 < V_2 < \cdots < V_i < \cdots$$

とから、$\mathcal{L}^\#$ の Hall 基底 $\mathcal{B}$ が定まる。

補題 3.7. D_m の S_1 の元への作用は次の通り。

$$D_m(V_0) = \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^r [V_r, V_{m-1-r}]$$
$$D_m(V_1) = 0$$
$$D_m(V_2) = -[V_1, V_m]$$
$$\begin{aligned} D_m(V_i) &= -\sum_{r=1}^{i-1} \binom{i-1}{r-1} [V_r, V_{m+i-1-r}] \\ &= -[V_1, V_{m+i-2}] - (i-1)[V_2, V_{m+i-3}] \\ &\quad - \binom{i-1}{2} [V_3, V_{m+i-4}] - \cdots - (i-1)[V_{i-1}, V_m] \quad (i \geq 3) \qquad \square \end{aligned}$$

3.8. D_m を ω に関する斉次成分に分解する。上の補題の両辺の各項の次数を比較して次を得る。

$$D_m = D_m^{(1,1,0,0)} + D_m^{(1,1,1,0)} + (\text{高次の項}) \tag{3.8.1}$$

特に $\omega(D_m) = (1,1,0,0)$。始めの 2 項は

$$D_m^{(1,1,0,0)} : \begin{cases} V_0, V_1, V_2 \longmapsto 0 \\ V_i \longmapsto -[V_1, V_{m+i-2}] \quad (i \geq 3) \end{cases} \tag{3.8.2}$$

$$D_m^{(1,1,1,0)} : \begin{cases} V_0, V_1, V_2 \longmapsto 0 \\ V_i \longmapsto -(i-1)[V_2, V_{m+i-3}] \quad (i \geq 3) \end{cases} \tag{3.8.3}$$

となる。derivation の最低次の成分を実際に計算すれば次の命題を得る。

命題 **3.9.** $m_1 \neq m_2$ ならば $[D_{m_1}, D_{m_2}] \neq 0$。実際、$\omega([D_{m_1}, D_{m_2}]) = (2,2,1,0)$ で、

$$[D_{m_1}, D_{m_2}]^{(2,2,1,0)} : \begin{cases} V_0, V_1, V_2 \longmapsto 0 \\ V_i \longmapsto (m_2 - m_1)[V_1, [V_2, V_{m_1+m_2+i-5}]] \neq 0 \quad (i \geq 3) \end{cases} \qquad \square$$

これを出発点として帰納法で次が得られ、主定理が証明される。

命題 **3.10.** $m_{k-1} \neq m_k$ ならば $[D_{m_1}, [D_{m_2}, [\cdots [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}] \cdots]]] \neq 0$。実際、$\omega([D_{m_1}, [D_{m_2}, [\cdots [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}] \cdots]]]) = (k,k,1,0)$ で、

$$\begin{aligned} &[D_{m_1}, [D_{m_2}, [\cdots [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}] \cdots]]]^{(k,k,1,0)} \\ &\qquad = [D_{m_1}^{(1,1,0,0)}, [D_{m_2}^{(1,1,0,0)}, [\cdots [D_{m_{k-1}}, D_{m_k}]^{(2,2,1,0)} \cdots]]] \end{aligned}$$

$$: \begin{cases} V_0, V_1, V_2 \longmapsto 0 \\ V_i \longmapsto (m_k - m_{k-1})[V_1, [(\mathrm{Ad}V_1)^{k-2} V_2, V_{m_1+\cdots+m_k+i-2k-1}]] \neq 0 \quad (i \geq 3) \end{cases} \qquad \square$$

主定理の系は次から得られる。これは、m が大きくなるとき、同じ全次数 m であって複次数の異なるものが沢山作れることから従う。

系 **3.11.** m_1, m_2 を 4 以上の相異なる偶数とし、D_{m_1}, D_{m_2} を(1.9.1)で定めた $\mathcal{L}$ の derivation、$\boldsymbol{D}$ を D_{m_1}, D_{m_2} が生成する $\mathcal{D}$ の部分 Lie 環とする。$\mathcal{L}$ の全次数 $\tilde{\omega}$(3.1.1)に関する $\boldsymbol{D}$ の斉次分解を

$$\boldsymbol{D} = \bigoplus_{m \geq 1} \boldsymbol{D}^{(m)}.$$

とすると、m が $\gcd(m_1, m_2)$ の倍数をとりながら $m \to \infty$ となるとき、

$$\mathrm{rank}_R \boldsymbol{D}^{(m)} \to \infty$$

が成り立つ。 $\square$

4. 最新の結果との関係

これまで論じてきたのは曲線 C を 1 つ固定したときに付随して定まる Galois 表現であったが、これに対し、種数 g と抜く点の数 n を固定してその moduli の上の普遍的な曲線を考えて定まる Galois 表現 (普遍 monodromy 表現) の考察が提唱されるようになった (織田[O] など)。これについては、本巻中の中村・高尾・上野 3 氏の報告に詳しいと思うので、ここでは特に本稿の結果と関連の深い部分のみに触れる。

g, n を自然数で $2-2g-n<0$ とし、$M_{g,n}$ を完備非特異な種数 g の代数曲線とその上の順序付き n 点との $\boldsymbol{Q}$ 上の moduli stack とするとき、この上の種数 g の n 点付き曲線の普遍族を考えることにより、自然な表現

$$\phi_{g,n}: \pi_1(M_{g,n}) \longrightarrow \Gamma_{g,n} \subset \mathrm{Out}\Pi_{g,n} \tag{4.0.1}$$

が得られ、$\Gamma_{g,n}$ の重み filtration に付随して体の塔

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_{g,n}(0) \subset \boldsymbol{Q}_{g,n}(1) \subset \boldsymbol{Q}_{g,n}(2) \subset \cdots \tag{4.0.2}$$

が得られるのであった。このとき

$$\boldsymbol{Q}_{0,3}(m) \subset \boldsymbol{Q}_{g,n}(m) \subset \boldsymbol{Q}_{1,1}(m) \quad \left(\begin{matrix} g \geq 0, n \geq 1, \\ 2-2g-n<0 \end{matrix}\right) \tag{4.0.3}$$

となる (中村 - 高尾 - 上野 (本巻中) 及び[NTU][N2] 参照)。これは、$\mathbf{P}^1 \backslash \{0,1,\infty\}$ の場合と共に 1 点抜き楕円曲線の場合が特に重要であることを示唆している。

ところで、$\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の場合は既に松本[M] により次数商の階数について本稿と同様のことが知られている。(前節までの手法でこの結果の別証を与えることが出来る。) 一方、任意の 1 点抜き楕円曲線 C に対する $\boldsymbol{Q}_C(m)$ は $\boldsymbol{Q}_{1,1}(m)$ を含んでいるので、これを併せると主定理の系が出てしまう。然し、GL(2) の作用を比較すると、(4.0.3)によって $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ から来るものと本稿で構成した沢山の非自明元とは異なることが判るので、本稿の結果は依然意味があると言えよう。

References

[AK] Asada,M., Kaneko,M., On the automorphism groups of some pro-l fundamental groups, Adv. Stud. Pure Math. 12 (1987), 137–159.

[B] N.Bourbaki, Eléments de mathématiques; Groupes et algèbres de Lie; Chap. 2, Algèbres de Lie libres, Hermann, Paris, 1972.

[H1] M.Hall,Jr., A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 575–581.

[H2] ———, The theory of groups, Macmillian, 1959.

[I] Ihara,Y., The Galois representation arising from $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, in "Galois Groups over $\mathbb{Q}$", Publ. MSRI 16 (1989), 299–313.

[K] Kaneko,M., Certain automorphism groups of pro-l fundamental groups of punctured Riemann surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 36 (1989),363–372.

[MKS] W.Magnus, K.Karrass, D.Solitar, Combinatorial Group Theory, Interscience, 1966.

[M] Matsumoto,M., On the galois image in the derivation algebra of π_1 of the projective line minus three points, RIMS preprint 962 (1994).

[N] Nakamura,H., On exterior Galois representations associated with open elliptic curves, UTMS 93-17.

[N2] Nakamura,H., Coupling of Universal Monodromy Representations of Galois-Teichmüller Modular Groups, RIMS preprint 976, (1994).

[NT] Nakamura,H.,Tsunogai,H., Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class group, J. reine angew. Math. 441 (1993), 115–144.

[NTU] Nakamura,H.,Takao,N.,Ueno,R., Some Stability Properties of Teichmüller Modular Function Fields with Pro-l Weight Structures, RIMS preprint 973, (1994).

[O] Oda,T.,The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves, Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9.-15. Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint MPI/93-57.

[T] Tsunogai,H., On some derivations of Lie algebras related to Galois representations, preprint, 1994.