数理解析研究所講究録
第 886 巻 1994 年 61-75

Algebraic independence by Mahler's method and power sums

日大文理 西岡 久美子 (Kumiko Nishioka)

巾級数が代数的数でとる値の代数的独立性を証明する際に巾和の下からの評価を使う場合がいくつかある。これらを整理し、どのように使われるかを簡単な場合を例にとって明らかにしたい。

§ Gap series.

次の様な巾級数を考える。

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}.$$

指数 $k!$ が非常に速く無限大に発散するので gap series と呼ばれる。α_1, α_2 $(0 < |\alpha_1|, |\alpha_2| < 1)$ に対して、α_1/α_2 が 1 の巾根である時、k が十分大きければ $\alpha_1^{k!} = \alpha_2^{k!}$ となる。従って $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$ は代数的従属である。そこで $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ $(0 < |\alpha_i| < 1)$ がこのような関係にないとき、つまり $i \neq j$ に対して α_i/α_j が 1 の巾根でない時、$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ が代数的独立であることを証明しよう。背理法で証明する。

$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ が代数的従属と仮定すると 0 でない多項式 $F \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ で

$$F(f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)) = 0$$

となるものが存在する。F はこのようなものの内 total degree が最小であるとする。$\frac{\partial F}{\partial X_i} = 0$ なら X_i が F の中に現れないということだから、その場合には α_i を除く事により、すべての i に対して $\frac{\partial F}{\partial X_i} \neq 0$ と仮定してよい。また $|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \cdots \geqq |\alpha_n|$ としてよい。すると $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ の total degree は F の total degree より小さいから

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)) \neq 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

である。

$$U = (f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n))$$
$$U_m = \left(\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1^{k!}, \cdots, \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_n^{k!}\right)$$

とおく。$\lim_{m\to\infty} U_m = U$ である。テーラー展開により、

(1) $$-F(U_m) = F(U) - F(U_m)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m)\left(\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_i^{k!}\right)$$
$$+ \sum_{\substack{J=(j_1,\cdots,j_n) \\ |J| = j_1+\cdots+j_n \geqq 2}} \frac{1}{J!}\frac{\partial^{|J|} F}{\partial X^J}(U_m)(U-U_m)^J$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m)\alpha_i^{m!} + O((|\alpha_1|^2)^{m!})$$

となる。Kは$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$を含む代数体とし、K上の素点全体の集合を$S_K$と表す。$\alpha \in K$に対して

$$h_K(\alpha) = h(\alpha) = \prod_{v \in S_K} \max(|\alpha|_v, 1)$$

と定義する。ここで$|\ |_v$は積公式が成り立つように正規化されているとする。

<u>基本不等式</u> $\alpha \in K^\times$と$v \in S_K$に対して

$$-\log h(\alpha) \leq \log|\alpha|_v$$

が成り立つ。

我々は$\sqrt{-1} \in K$とし、$|\ |_v = |\ |^2$（$|\ |$は通常の絶対値）としてこの不等式を使う。$h(\ )$は次の性質をもつ。

$\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_m \in K$に対して

(i) $h(\alpha) = 1 \iff \alpha$は1の巾根または0,

(ii) $h(\alpha) = h(\alpha^{-1})$, $h(\alpha^m) = h(\alpha)^m \quad (m \in \mathbb{Z})$,

(iii) $h(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) \leq m^{[K:\mathbb{Q}]} h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_m)$

$h(\alpha_1 \cdots \alpha_m) \leq h(\alpha_1) \cdots h(\alpha_m)$.

これらを使って

$$h(F(U_m)) \leq c_1^{(m-1)!}$$

となることがわかる。以下で$c_1, c_2, \cdots$はmによらない正定数を表す。一方(1)より

$$F(U_m) = O(|\alpha_1|^{m!})$$

であるから．基本不等式より十分大きなすべての m に対して $F(U_m) = 0$ でなければならない事がわかる。再び (1) より，

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m)\alpha_i^{m!} = O((|\alpha_1|^2)^{m!})$$

である。ここで次の形の巾和の下からの評価を使う。

補題（Nishioka [14], [15]）．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K^\times$ とし，$i \neq 1$ なら α_i/α_1 は 1 の巾根でないとする。Ω は自然数からなる無限集合とする。$k \in \Omega$ に対して、$A_1(k), \cdots, A_n(k) \in K$ は次の性質を持つとする。

(i) $A_1(k) \neq 0 \qquad (k \in \Omega)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in \Omega}} \log h(A_i(k))/k = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$.

このとき、$0 < \theta < 1$ とすると．十分大きなすべての $k \in \Omega$ に対して

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i(k)\alpha_i^k\right| > |\alpha_1|^k \theta^k$$

が成り立つ。

この補題は S-unit equation に関する Evertse の定理（[2], [3]）より証明される。

補題より

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m)\,\alpha_i^{m!}\right| > |\alpha_1|^{m!}\,\theta^{m!}$$

が十分大きなすべてのmに対して成り立つ。$|\alpha_1|\theta > |\alpha_1|^2$となるように$\theta\ (<1)$をとれば、これは(2)に矛盾する。従って次の定理が証明された。

定理 A (Nishioka [9], [13], [14]). $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$とする。$\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha_i|<1$ $(1\le i\le n)$とする。$f(\alpha_1),\cdots,f(\alpha_n)$が代数的独立であるための必要十分条件は任意の$\alpha_i/\alpha_j$ $(i\neq j)$が1の巾根でないことである。

もう少し精密な議論をすることにより次の定理が得られる。

定理 B. $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!+k}$とする。$\alpha_i\in\overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha_i|<1$ $(1\le i\le n)$とする。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$が相異なれば、$f(\alpha_1),\cdots,f(\alpha_n)$は代数的独立である。

上の2つの関数は単位円を自然境界に持つ巾級数であるが、次に整関数となる巾級数について考えよう。

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a^{k!} z^{k} \qquad (a\in\overline{\mathbb{Q}},\ 0<|a|<1)$$

とおく。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$とし、$f(\alpha_1),\cdots,f(\alpha_n)$の代数

的独立性を考えよう。$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ は代数的従属とする。

$$U = (f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n))$$

$$U_m = \left(\sum_{k=1}^{m-1} a^{k!}\alpha_1^{k}, \cdots, \sum_{k=1}^{m-1} a^{k!}\alpha_n^{k}\right)$$

とおき，$F \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ を前と同様にとる。テーラー展開により，

$$F(U_m) = F(U_m) - F(U)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U)\left(-\sum_{k=m}^{\infty} a^{k!}\alpha_i^{k}\right) + O\left((|a|^2)^{m!}c_3^{m}\right)$$

$$= -a^{m!}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U)\alpha_i^{m} + O\left((|a|^2)^{m!}c_3^{m}\right)$$

となる。前と同様に基本不等式を使う事により，十分大きなすべての m に対して $F(U_m)=0$ となることがわかる。従って，

(3) $$\sum_{i=0}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_i}(U)\alpha_i^{m} = O\left(|a|^{m!}c_3^{m}\right)$$

である。

定理（Turán [17]）．$b_1, \cdots, b_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}^{\times}$，$\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$ とする。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ。

$$\max_{1 \le y \le n} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i^{m+y}\right|}{\sum_{i=1}^{n} |b_i||\alpha_i|^{m+y}} \ge c_4 > 0.$$

この定理から、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が相異なれば、

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(U)\, \alpha_i^m \right| \geq c_5 |\alpha_1|^m$$

が無限に多くの $m \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことがわかる。これは(3)に矛盾する。よって次の定理が証明された。

定理 C (Nishioka [11]). $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k!} z^k$ ($a \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$, $0 < |a| < 1$) とする。このとき

$$f(\alpha) \qquad (\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times})$$

は代数的独立である。

§ Mahler の方法.

r を2以上の整数とし、

$$f_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{r^k}$$

とおくと、次の関数方程式をみたす。

$$f_r(z^r) = f_r(z) - z.$$

Mahler の定理 ([5]) より、$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なら $f_r(\alpha)$ は超越数であることがわかる。代数的独立性については次の定理が成り立つ。

定理. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha_i| < 1$ とする。$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が乗法的独立なら $f_r(\alpha_1), \cdots, f_r(\alpha_n)$ は代数的独立である。
(ここで $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が乗法的独立とは. $\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n} = 1$ が成り立つのは $i_1 = \cdots = i_n = 0$ であるときに限ることである。)

より精密な結果が Loxton and van der Poorten [4] で証明されている。この定理を証明するために次の定理を必要とする。

定理 (Mahler [6]). $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha_i| < 1$ $(1 \leq i \leq n)$ とし. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は乗法的独立とする。$g(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ に対し.

$$g(\alpha_1^{r^k}, \cdots, \alpha_n^{r^k}) = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つなら $g(z_1, \cdots, z_n) = 0$ でなければならない。

この定理を一般化1たものが Masser [8] により証明されている。ここでは Masser のアイデアに沿って証明をスケッチする。$g(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ とし.

$$g(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n \geq 0} c_{i_1 \cdots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$$

とおく。

$$A = \max\{|\alpha_1|^{i_1}\cdots|\alpha_n|^{i_n} \mid c_{i_1\cdots i_n} \neq 0\}$$

$$T = \{(i_1,\cdots,i_n) \mid |\alpha_1|^{i_1}\cdots|\alpha_n|^{i_n} = A\}$$

とおく。するとTは有限集合でkが十分大きいとき、

$$0 = g(\alpha_1^{r^k},\cdots,\alpha_n^{r^k})$$

$$= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in T} c_{i_1\cdots i_n}(\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n})^{r^k} + O(B^{r^k})$$

$$(0<B<A<1)$$

とかける。$\beta_i = \alpha_i/|\alpha_i|$ とおくと、

$$(4)\quad \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in T} c_{i_1\cdots i_n}(\beta_1^{i_1}\cdots\beta_n^{i_n})^{r^k} = O(\theta^{r^k})$$

$$(0<\theta<1)$$

である。自然数 $b_1,\cdots,b_s$ と多項式 $B_1(z),\cdots,B_s(z)\in$ $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$, 単項式 $U_1(z),\cdots,U_t(z)$, $V_1(z),\cdots,V_t(z)$ で次の性質を持つものがある。

(i) $|U_j(\alpha)| = |V_j(\alpha)| \qquad (1\leq j\leq t)$

(ii) $0 \neq \prod_{j=1}^{t}(U_j(z)-V_j(z))$

$$= \sum_{i=1}^{s} B_i(z)\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in T} c_{i_1\cdots i_n}(z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n})^{r^{b_i}}$$

(ii) と (4) より

$$\prod_{j=1}^{t}|U_j(\beta_1^{r^k},\cdots,\beta_n^{r^k}) - V_j(\beta_1^{r^k},\cdots,\beta_n^{r^k})| = O(\theta^{r^k})$$

であるから．ある j（$1 \le j \le t$）に対して．

$$|U_j(\beta_1^{r^k}, \cdots, \beta_n^{r^k}) - V_j(\beta_1^{r^k}, \cdots, \beta_n^{r^k})| = O(\theta^{\frac{r^k}{t}})$$

となる k が無限に存在する。このとき．

(5) $$\left|\frac{U_j}{V_j}(\beta_1^{r^k}, \cdots, \beta_n^{r^k}) - 1\right| = O(\theta^{\frac{r^k}{t}})$$

である。Bakerの定理（[1]）と (i) より．

$$\left|\frac{U_j}{V_j}(\beta_1^{r^k}, \cdots, \beta_n^{r^k}) - 1\right|$$

$$= \left|\frac{U_j}{V_j}(\alpha_1^{r^k}, \cdots, \alpha_n^{r^k}) - 1\right| \ge (r^k)^{-c_6}$$

が成り立つ。これは (5) に反する。定理が証明された。

次に $f_r(\alpha)$（$r \ge 2$）の代数的独立性を考える。関数 $f_r(z), f_{r^2}(z), \cdots, f_{r^n}(z)$ は変換 $z \to z^{r^{n!}}$ の下に関数方程式

$$f_{r^j}(z^{r^{n!}}) = f_{r^j}(z) - z - z^{r^j} - \cdots - z^{r^{n!-j}} \qquad (1 \le j \le n)$$

をみたし、$\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であることがわかる。Mahlerの定理（[7]）より．$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なら．$f_r(\alpha), \cdots, f_{r^n}(\alpha)$ は代数的独立であることがわかる。

$$\mathbb{N} - \{1\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i, r_i^2, \cdots\},$$

$$\log r_i / \log r_j \notin \mathbb{Q} \qquad (i \ne j),$$

となるように r_i を選ぶことができる。$f_{r_1}, \cdots, f_{r_n}$ は1つの変換 $z \to z^d$ に対して同時に関数方程式をみたす事はないので、Mahlerの定理を直接使う事はできない。しかし次の定理が証明される。

定理D (Nishioka [16]). $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なら

$$f_r(\alpha) \qquad (r \geq 2)$$

は代数的独立である。

(Loxton and van der Poorten [4] に上の定理が述べられているが証明には誤りがある。)

系. 関数 $f_r(z)$ $(r \geq 2)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立である。

この定理の証明のためには次の定理が本質的である。

定理E. $e_i(k) = [k(\log r_1 / \log r_i)]$ とおく。
$0 < |\alpha| < 1$ で $g(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ とする。
十分大きなすべての k に対して $g(\alpha^{r_1^{e_1(k)}}, \cdots, \alpha^{r_n^{e_n(k)}}) = 0$ なら $g(z_1, \cdots, z_n) = 0$ でなければならない。

証明のスケッチ. $g(z_1,\dots,z_n)\neq 0$ とし,

$$g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i_1,\dots,i_n\geq 0} c_{i_1\cdots i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}$$

とおく。$(i_1,\dots,i_n)\neq(j_1,\dots,j_n)$ ならEvertseの定理より

$$|(i_1-j_1)r_1^{e_1(k)}+\cdots+(i_n-j_n)r_n^{e_n(k)}|\to\infty \quad (k\to\infty)$$

である。自然数列 $\{k_\ell\}_{\ell\geq 0}$ を選んで

$$\left|\frac{\alpha^{i_1r_1^{e_1(k)}+\cdots+i_nr_n^{e_n(k)}}}{\alpha^{j_1r_1^{e_1(k)}+\cdots+j_nr_n^{e_n(k)}}}\right|\longrightarrow 0 \text{ または } \infty \quad (\ell\to\infty)$$

とすることができる。これより定理が証明される。

定理Eは一般化されるが, そのためには次の補題を必要とする。この補題はやはりEvertseの定理を使って証明され, ちがったタイプのGap seriesの値の代数的独立性の証明に応用され得ると思う。

補題([16]). $\rho_1,\dots,\rho_n\in K^\times$ は1の巾根でないとする。$\{e_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$ $(1\leq i\leq n)$ は無限大に発散する自然数列で, $i\neq 1$ なら $\lim_{k\to\infty} e_1(k)/e_i(k)=\eta_i\notin\mathbb{Q}$ とする。$k\geq 1$ に対して $A_1(k),\dots,A_n(k)\in K$ は次の性質を持つとする.

(i) $A_1(k)\neq 0$ $\quad(k\geq 1)$,

(ii) $\lim_{k\to\infty}\log h(A_i(k))/e_i(k)=0$ $\quad(1\leq i\leq n)$.

このとき $0<\theta<1$ とすると, 十分大きなすべての k に

対して

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i(k)\rho_i^{e_i(k)}\right| > |\rho_1|^{e_1(k)}\theta^{e_1(k)}$$

が成り立つ。

参考文献

[1] Baker, A.: Transcendental Number Theory, Cambridge UP, 1975.

[2] Evertse, J.H.: On sums of S-units and linear recurrences, Comp. Math. 53(1984), 225-244.

[3] Evertse, J.H., Győry, K., Stewart, C.L. and Tijdeman, R.: S-unit equations and their applications, New Advances in Transcendence Theory, ed. by A. Baker, Cambridge UP (1988), 110-174.

[4] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: Algebraic independence properties of the Fredholm series, J. Austral, Math. Soc. Ser. A 26(1978), 31-45.

[5] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. 101(1929), 342-366.

[6] Mahler, K.: Uber das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veranderlichen inspeziellen Punktfolgen, Math. Ann. 103(1930), 573-587.

[7] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen, Math. Z. 32(1930), 545-585.

[8] Masser, D.W.: A vanishing theorem for power series, Invent,. math. 67(1982), 275-296.

[9] Nishioka, K.: Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series, Proc. Japan Academy 62(Ser.A)(1986), 219-222.

[11] Nishioka, K.: Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers, J. Number Theory 23(1986), 353-364.

[12] Nishioka, K.: Algebraic independence of three Liouville series, Arch. Math. 47(1986), 117-120.

[13] Nishioka, K.: Conditions for algebraic independence of certain power series of algebraic numbers, Comp. Math. 62(1987), 53-61.

[14] Nishioka, K.: Algebraic independence of certain power series, Seminaire de Theorie des Nombres de Paris (1987/1988), 201-212.

[15] Nishioka, K.: Evertse theorem in Algebraic independence, Arch. Math. 53(1989), 159-170.

[16] Nishioka, K.: Algebraic independence by Mahler's method and S-unit equations, to appear in Comp. Math.

[17] Turán, P.: On a New Method of Analysis and its Applications, John Wiley & Sons, 1984.