数理解析研究所講究録
第 886 巻 1994 年 149-169

ふたつの素数の和について

三河寛／筑波大学
Mikawa H.

序

x 以下の偶数のうち ふたつの素数の和へ分割できないものの個数を $E(x)$ とする。

$$E(x) \ll 1 \tag{1}$$

と信じられている(イ)けれども 一般リーマン予想の下でさえ

$$E(x) \lll \sqrt{x} \tag{2}$$

程度のことしか言えない。すると (1) をもたらす まっとうな仮説をみつけること および (2) を仮定無しに証明することが一時的な目標となる。しかし やはりむずかしい。ここでは残念ながら大きく譲って 小さな $\theta>0$ に対し

$$E(x+x^{\theta})-E(x)=o(x^{\theta}) \tag{3}$$

を示すことを問題とする。もし $\theta<\frac{1}{2}$ なる θ について (3) が証明できるなら (2) の見地から 少しの意味はあることと言ってもよいだろう。

$\theta=1$ のとき (3) は実質上 三素数定理のことであり、そして $\frac{7}{12}<\theta\le 1$ の範囲で (3) を正当化するのは簡単である。この $\frac{7}{12}$

(イ) 書誌学としてよいのは
潘承洞－潘承彪：哥德巴赫猜想，科学出版社 1981.
Wang Yuan (ed.): Goldbach conjecture, World Scientific 1984.

はL函数の零点密度評価[ロ]に由来する。すると $\frac{1}{2}<\theta\leq 1$ が(3)の技術的限界のように思われる。しかし これは近頃越えられるようになった。[ハ]

この問題に関して考えたことをここに書残しておきたい。

(ロ) H.-E. Richert: Sieve methods, Tata 1976.
Chap. 6 および Chap 13 Note.

(ハ) G. Dufner: Binäres Goldbachproblem in kurzen Intervallen I, II, Studia Sci. Math. Hungarica (to appear).

H. Mikawa: On prime twins, Tsukuba J. Math. 15 (1991) 19-29.

H. Mikawa: On the exceptional set in Goldbach's problem, Tsukuba J. Math. 16 (1992) 513-543.

A. Perelli and J. Pintz:
On the exceptional set in the 2k-twin primes problem, Compositio Math. 82 (1992) 355-372.

A. Perelli and J. Pintz:
On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals, J. London Math. Soc. (2) 47 (1993) 41-49.

D. Wolke: Über das Primzahl-Zwillingsproblem, Math. Ann. 283 (1989) 529-537.

壱

自然数 $n>1$ の素因数分解を $\prod_p p^m$ としてパラメーター $z\geq 2$ に対し

$$n=\prod_{p<z}p^m\cdot\prod_{p\geq z}p^m=n^{(1)}n^{(2)}$$

とかく。空積は 1 とする。そして

$$\Phi_z(n)=\begin{cases}1, & n^{(1)}=1\\ 0, & n^{(1)}>1\end{cases},\quad \Psi_z(n)=\begin{cases}1, & n^{(2)}=1\\ 0, & n^{(2)}>1\end{cases}$$

$\Phi_z(1)=\Psi_z(1)=1$ と定めれば Φ、Ψ は共に完全乗法的となる。エラトステネスの篩とは

$$\Phi_z(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\Psi_z(d)$$

および

$$\left|\sum_{\substack{d|n\\ d>D}}\mu(d)\Psi_z(d)\right|\leq\sum_{\substack{d|n\\ D\leq d<Dz}}\mu^2(d)\Psi_z(d)\quad (D>1)\qquad (4)$$

のことである。(4) はブシュタブの公式[ニ]

$$\Phi_z(n)=1-\sum_{\substack{p|n\\ p<z}}\Phi_p(n)$$

から従う。また次の不等式が成立つ[ホ]；もし $x\to\infty$ のとき $z=z(x)\to\infty$ かつ $s=\frac{\log x}{\log z}\to\infty$ ならば

$$\sum_{n\leq x}\Psi_z(n)\ll x\exp\left(-\tfrac{1}{2}s\log s\right)\qquad (5)$$

$\sqrt{x}<n\leqq x$ が素数かどうかは $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ をみればよい。ブシュタフの公式から

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)-\sum_{\substack{p\mid n\\ \frac{\sqrt{x}}{v}\leqq p<\sqrt{x}}}\Phi_p(n)$$

右辺の第2項は $v=\exp(2\sqrt{\log x})$ と撰べば気にする必要はないだろう。さらに

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)=\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\leqq p<\frac{\sqrt{x}}{v}}}\Phi_p(n)$$

第2項においては $\Phi_p(n)=\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$ だから

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n)=\Bigl(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\leqq p<\frac{\sqrt{x}}{v}}}1\Bigr)\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n) \tag{6}$$

$w=\exp(\sqrt[3]{\log x})$ として再びブシュタフの公式、そしてエラトステネスの篩を使えば

$$\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)=\Bigl(\sum_{\substack{d\mid n\\ d<\sqrt{v}}}+\sum_{\substack{d\mid n\\ \sqrt{v}\leqq d}}\Bigr)\mu(d)\Psi_w(d)-\sum_{\substack{p\mid n\\ w\leqq p<\sqrt[3]{x}}}\Phi_p(n)$$

(ニ) H. Halberstam: Lectures on the linear sieve, in Topics in analytic number theory. Texas Austin 1985, 165–220.
この論文の中の Basic lemma から(4)がわかる。

(ホ) K. Prachar: Primzahlverteilung, Springer 1957. Kap. V. §5.
Ju. V. Linnik: Dispersion method in binary additive problems, Leningrad 1961. (翻訳, A.M.S.) Chap. 1.

これを(6)に代入する。すると(6)において第1項は

$$[\mathrm{I}] \qquad \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\frac{x}{v}}}} \sum_{n=k\ell} a_k$$

と書き直せる。係数(a_k)は約数函数で押えられる。そして第2項は(5)から 無視できると思える。第3項は p, $\frac{n}{p}$ の係数が独立となるように細工して

$$[\mathrm{II}] \qquad \sum_{w \leq \ell < \sqrt[3]{x}} \sum_{n=k\ell} a_k b_\ell$$

のように書けるであろう。(b_ℓ)は素数の定義函数と思ってよい。このように $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部分は[I]および[II]の型に分解した。(ハ)

次に $2|n$, $x \leq \frac{X}{2} < n \leq X$ として

$$R_x(n) = \sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1 \leq x}} 1$$

を考える。p_1 を $\Phi_{\sqrt{x}}(m)$ でおきかえ そして分解する。[I]の型のものは

$$\sum_{\substack{k\ell+p=n \\ k\ell \leq x \\ k \leq \sqrt{\frac{x}{v}}}} a_k = \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\frac{x}{v}} \\ (k,n)=1}} a_k \sum_{\substack{n-x<p<n \\ p \equiv n \pmod{k}}} 1 \quad + 誤差$$

となり、$x \ggg X$ のときには平均素数定理で計算できる。

しかし[II]の型から生ずるものには全く手が出ない。ここで諦めて n に関して平均することを考える。$y=X^{\theta}$ $(0<\theta<1)$ $2|n$, $n\in\,]X-y, X]$ に対して

$$R_x(n) > \text{主項} + \text{誤差拡疑} \tag{7}$$

を示すことを目指す。この主項は常に $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ となる ある量で、誤差拡疑とは 2乗平均が小さいこと すなわち

$$\sum_{\substack{X-y<n\leq X\\ 2|n}} |\bullet|^2 = o\left(y\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2\right) \tag{8}$$

の意味である。

これが成立つ範囲の θ に対して(3)が言える。というのは、もし n がふたつの素数の和として表せないならば $R_x(n)=0$ すなわち

$$E(X)-E(X-y) \leq \sum_{\substack{X-y<n\leq X\\ 2|n\\ R_x(n)=0}} 1$$

すると誤差拡疑は主項を相殺するから その絶対値は主項程度 $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ の大きさになる。つまり

$$\sum_{\substack{n\\ R_x(n)=0}} \left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2 \ll \sum_{\substack{n\\ R_x(n)=0}} |\text{誤差拡疑}|^2$$

したがって

$$E(X)-E(X-y) = o(y)$$

となる。

式

区間 $]X-y, X]$, $y \leqq x$, の中の n が $n = p_1 + p$, $p_1 \leqq x$, と書けるなら いつでも $X - 2x < p < X$ だから

$$R_x(n) = \int_0^1 \left(\sum_{p_1 \leqq x} e^{2\pi i \alpha p_1} \right) \left(\sum_{X-2x<p\leqq X} e^{2\pi i \alpha p} \right) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

$$= \int_0^1 S(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, と有理数で近似したとき エラトステネスの篩を用いて

$$S(\alpha) \lll \frac{x}{\sqrt{q}} + x \exp\left(-\sqrt{\log x}\right) + \sqrt{qx}$$

とできる。(ト) この評価は $\log^B x < q < x \log^{-B} x$ (チ) のときには意味がある。$q < \log^B x$ のときには $S(\alpha)$ の期待される主部を $T(\alpha)$ として

$$S(\alpha) = T(\alpha) + 誤差$$

となる。$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \log^B x \ll 1$ ならば この誤差項は自明ではない。そこで

$$Q_1 = \log^B x, \quad Q = x Q_1^{-3}$$

(ヘ) 前出 Prachar の書, Kap. VI, Satz 6.1.

(ト) 同上

(チ) ある〈不特定の定数〉を表すのに 文字 B を用いる。
　記号 $\lll$ は $\ll \log^B x$ のことである。

と撰び
$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \le Q_1} \bigcup_{\substack{1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} I_{q,a}$$

$$I_{q,a} = I_{q,a}(Q) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ} , \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ} \right]$$

と書いて
$$U(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) - T(\alpha) , & \alpha \in \mathfrak{M} \\ S(\alpha) , & \alpha \notin \mathfrak{M} \end{cases}$$

と置けば α について一様に
$$U(\alpha) \ll x \log^{-B} x \tag{9}$$

と知れる。

ベッセルの不等式により
$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{X-y < n \le X \\ 2|n}} \left| \int_0^1 U(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \right|^2 \\ &\le \int_0^1 |U(\alpha) V(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\le \max_\alpha |U(\alpha)|^2 \cdot V(0) \\ &\ll x^3 \log^{-B} x \end{aligned} \tag{10}$$

誤差擬(8)となるには、この評価が $o(yx^2 \log^{-4} x)$ すなわち $x \lll y$ でなくてはならない。

一方、主項となるはずの
$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

は簡単な計算により

$$= \sum_{q \le Q_1} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d|q \\ (d,n)=1}} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{\substack{n-x<p<n-1 \\ p\equiv n \pmod d}} \log^{-1}(n-p) + 誤差$$

となる。この内側の和は $X-y<n\le X$, $x \lll y \le x$ だから n に関して平均をとる効果はない。そして $d \le Q_1 = \log^B x$ だから 算術級数定理の短区間版(1) が適用できる。このようにして 主項を書き出すためには

$$x \ge X^{\frac{7}{12}+\delta} \quad (\delta > 0)$$

であることが要請される。

結局

$$R_x(n) = \int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha + \int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha$$
$$= 主項 + 誤差擬$$

とするために

$$y \ggg x \ge X^{\frac{7}{12}+\delta}$$

なる制限が付いた。そして $y \ggg x$ の限定を除かないことには、つまりベッセルの不等式(10)を使う限りにおいて、これ以上のことは望めない。

---

(1) Prachar の書 Kap. IX. および Richert の冊子 Chap. 6.

参

$$\int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha$$

を $2|n$, $n\in\,]X-y,\,X]$ に関して２乗平均するのであった。このとき $n\alpha \pmod 1$ が相殺をひきおこすことになる。α を分母 q の有理数で近似するなら $n \pmod q$ である。すなわち n の動く長さ y より q が大きいなら もはや相殺は期待できない。したがって前章でのパラメーター Q を

$$Q = yQ_1^{-3}$$

に取替えておく。

単位区間を長さ $\dfrac{1}{\Delta}$, $\Delta \asymp y\log^{-B} x$, の小区間どもに分割し順番に並べて I_j $(1\leqslant j\leqslant J)$ とする。J は偶数にできる。まず奇数の j だけ集めたものについて計算する。

$$\sum_{\substack{X-y<n\leqslant X\\ 2|n}} \left|\sum_{j:\mathrm{odd}} \int_{I_j} UV(\alpha)e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha\right|^2$$

$$\ll \sum\sum_{j,k:\mathrm{odd}} \int_{I_j}\int_{I_k} |UV(\gamma_1)||UV(\gamma_2)|\min\left(y, \frac{1}{\|\gamma_1-\gamma_2\|}\right) d\gamma_1\,d\gamma_2$$

$j=k$ なら $\min(\ ,\ )$ の項を yととる。$j\neq k$ なら I_j と I_k との間に偶数番の小区間があるから

$$\|\gamma_1-\gamma_2\|^{-1} \ll \Delta$$

したがって

$$\ll y\sum_{j:\mathrm{odd}}\left(\int_{I_j}|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2+\Delta\left(\sum_{j:\mathrm{odd}}\int_{I_j}|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2$$

$$\leqslant y\sum_{j}\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma\int_{I_j}|V(\alpha)|^2d\alpha+\Delta\left(\int_0^1|UV(\gamma)|d\gamma\right)^2$$

$$\leqslant y\max_j\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma\cdot\int_0^1|V(\alpha)|^2d\alpha+\Delta\int_0^1|U(\gamma)|^2d\gamma\int_0^1|V(\alpha)|^2d\alpha$$

$$\ll yx\left(\max_j\int_{I_j}|U(\gamma)|^2d\gamma+x\log^{-B}x\right)$$

偶数の j についても同じである。したがって (9) に代えて小区間 I_j での積分を $\ll x\log^{-B}x$ と押えればよいことになった。I_j は $\mathfrak{M}$ の $I_{q,a}$ を２つ含むことはないから件の積分は

$$=\max_j\left(\int_{I_j\cap\mathfrak{M}}+\int_{(I_j\cup\mathfrak{M})\setminus\mathfrak{M}}\right)|U(\gamma)|^2d\gamma$$

$$\leqslant\max_{\substack{(a,q)=1\\ q\leqslant Q_1}}\int_{-1/qQ}^{+1/qQ}\left|(S-T)\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^2d\beta$$

$$+\max_{\alpha\notin\mathfrak{M}}\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}|S(\alpha+\beta)|^2d\beta \qquad (11)$$

ここで一時的に一般の形にして (a_n) を複素数、$2\leqslant\Delta\leqslant\frac{x}{2}$ として次の積分を考える。

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\Big|\sum_{x<n\leq 2x} a_n e^{2\pi i\beta n}\Big|^2 d\beta \tag{12}$$

これはプランチェレルの関係式により次の三通りに書換えられる。

$$\sum_{|r|\leq\Delta}(\Delta-|r|)\sum_{x<n\leq 2x}\bar{a}_n a_{n+r} \tag{13}$$

$$\int_x^{2x}\Big|\sum_{t<n\leq t+\Delta} a_n\Big|^2 dt \tag{14}$$

$$\Delta^2 x^{2\sigma-1}\int_{\sigma-i\frac{x}{\Delta}}^{\sigma+i\frac{x}{\Delta}}\Big|\sum_n a_n n^{-s}\Big|^2 |ds| \tag{15}$$

そして (a_n) の性質に応じて種々な手法を適用できる。とはいうものの　上手に使えば道具は何んでもよく　結果は同じとも言える。

懸案の (11) に戻る。まず後者からみる。

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\Big|\sum_{p\leq x} e^{2\pi i(\alpha+\beta)p}\Big|^2 d\beta \quad (\alpha\notin\mathfrak{M})$$

このときには $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, $Q_1<q\leq Q$ なる有理数が存在する。第一章でのように素数 p を [I] と [II] とに展開する。[I] は (13) から

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\Big|\sum_{\substack{k\leq\sqrt{\frac{x}{U}}}}\sum_{k\ell\leq x} a_k e^{2\pi i(\alpha+\beta)k\ell}\Big|^2 d\beta$$

$$\ll \sum_{|r|\leqq\Delta}(\Delta-|r|)e^{2\pi i\alpha r}\sum\sum\sum\sum_{\substack{k_1l_1-k_2l_2=r\\ k_1l_1,\ k_2l_2\leqq x\\ k_1,\ k_2\leqq\sqrt{\frac{x}{v}}}} a_{k_1}a_{k_2}$$

$r>0$ のとき 内側の和は

$$\sum\sum_{\substack{k_1,\ k_2\leqq\sqrt{\frac{x}{v}}\\ (k_1,k_2)|r}} a_{k_1}a_{k_2}\left(\frac{x+O(r)}{[k_1,k_2]}+O(1)\right)$$

そして r に関して和をとると

$$\lll \Delta x+x\sum\sum_{\substack{k_1,\ k_2\leqq\sqrt{\frac{x}{v}}\\ (k_1,k_2)\leqq\Delta}}\frac{|a_{k_1}a_{k_2}|}{[k_1,k_2]}\left|\sum_{\substack{0<r<\Delta\\ (k_1,k_2)|r}}(\Delta-r)e^{2\pi i\alpha r}\right|+\Delta^3+\Delta^2\frac{x}{v}$$

$$\lll \Delta x+x\Delta\left(\frac{\Delta}{q}+q\right)+\Delta^3+\Delta^2\frac{x}{v}$$

となって障りは無い。 [II] については(ヌ)やはり (13) より

$$\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left|\sum\sum_{\substack{kl\leqq x\\ v\leqq l<\sqrt[3]{x}}} a_k b_l e^{2\pi i(\alpha+\beta)kl}\right|^2 d\beta$$

$$\lll \max_{v<L<\sqrt[3]{x}}\Delta^2\int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta}\left(\sum_{l_1\asymp L}|b_{l_1}|^2\right)\left(\sum_{l\asymp L}\left|\sum_{kl\leqq x}a_k e^{2\pi i(\alpha+\beta)kl}\right|^2\right)d\beta$$

$$\ll \max_{v<L<\sqrt[3]{x}} L\cdot\sum\sum_{\substack{|lr|\leqq\Delta\\ l\asymp L}}(\Delta-|lr|)e^{2\pi irl}\sum\sum_{\substack{k_1-k_2=r\\ k_1l,\ k_2l\leqq x}} a_{k_1}a_{k_2}$$

(ヌ) 記号 $\asymp$ は $\gg$ かつ $\ll$ の意味である。

$k\neq 0$ のとき　k を停めて ℓ の和を実行し 振動因子 $e^{2\pi i k\ell}$ を巻き込めば

$$\lll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} L\left(\Delta X + \Delta\frac{X}{L}\left(\frac{\Delta}{q}+\frac{\Delta}{L}+q\right)\right)$$

$$< \sqrt[3]{x}\,\Delta X + \Delta X\left(\frac{\Delta}{q}+\frac{\Delta}{w}+q\right)$$

したがって、

$$\sqrt[3]{x} \lll \Delta \lll y \tag{16}$$

ならば (11) の第2の積分に関しては望む評価が得られる。そして (16) の下で (11) の第1の積分を扱うのは易しい。これを次章でみることにする。

四

$S(\alpha)$ の代りに $S^+(\alpha)=\sum_{n\le X}\Lambda(n)e^{2\pi i\alpha n}$ を考える。すると

$$S^+\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\bmod q)}\chi(a)\tau(\bar{\chi})\sum_{n\le X}\chi(n)\Lambda(n)e^{2\pi i\beta n}+\text{誤差}$$

χ が主指標のとき $\chi(n)\Lambda(n)$ を $\chi(n)\Lambda(n)-1$ で置換えることを # で表し、$T(\alpha)$ に対応するものを $T^+(\alpha)$ とかけば

$$\int_{-1/qQ}^{+1/qQ}\left|(S^+-T^+)\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^2 d\beta \tag{17}$$

$$\ll \int_{-1/qQ}^{+1/qQ}\left|\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(q)}\chi(a)\tau(\bar{\chi})\sum_{n\le X}{}^{\#}\chi(n)\Lambda(n)e^{2\pi i\beta n}\right|^2 d\beta+\text{誤差}$$

右辺の積分は三角不等式により

$$\leq \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |\tau(\bar{\chi})| \left(\int_{-1/qQ}^{+1/qQ} \left| \sum_{n \leq x}^{\#} \chi(n) \Lambda(n) e^{2\pi i \beta n} \right|^2 d\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

ここで (14) と L函数の零点による $\sum_n \Lambda(n)$ の表示式を使う(ル)と上の積分は

$$\ll \frac{1}{(qQ)^2} \int_1^x \left| \sum_{t < n \leq t + qQ}^{\#} \chi(n) \Lambda(n) \right|^2 dt$$

$$\lll \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{2\sigma - 1} N_\chi\left(\sigma, \frac{x}{qQ}\right) d\sigma + \text{誤差}$$

故に (17) は

$$\lll \max_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1} x^{2\sigma - 1} \frac{1}{q} \left(\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \sqrt{N_\chi\left(\sigma, \frac{x}{qQ}\right)} \right)^2 + \text{誤差} \qquad (18)$$

そして、$Q \geqslant x^{\frac{1}{6} + \delta}$ $(\delta > 0)$ ならば 自明でない評価を与えることができる。

また (14) の代りに (15) を使ってもよい。まず [I] と [II] とに分解しておく。[I] に関してはとりたてて問題となる事は無いであろう。[II] について (18) に対応するものは

$$\max_{w < L < \sqrt[3]{x}} \frac{1}{q} \left(\sum_{\substack{\chi (\mathrm{mod}\, q) \\ \chi \neq \chi_0}} \left(\int_{\frac{1}{2} - i\frac{x}{qQ}}^{\frac{1}{2} + i\frac{x}{qQ}} \left| \sum_{k \asymp \frac{x}{L}} \frac{\chi(k) a_k}{k^s} \right|^2 \left| \sum_{l \asymp L} \frac{\chi(l) b_l}{l^s} \right|^2 |ds| \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

(ル) 以下の計算と記号については 前出 P氏とR氏の本を参照

(b_ℓ) は素数の定義函数と思ってよかったから $\ell \leqq \log^B L$ の範囲でなら 任意の定数 A について

$$\left|\sum_{\ell \asymp L} \frac{\chi(\ell) b_\ell}{\ell^s}\right|^2 \ll L \log^{-A} L$$

とできるはずである。すると

$$\lll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} \log^{-A} L \cdot L \sum_{\chi} \int \left|\sum_{k}\right|^2 |ds|$$

$$\ll \max_{w<L<\sqrt[3]{x}} \log^{-A} L \cdot L \left(\ell\left(\frac{x}{\ell Q}\right) + \frac{x}{L}\right)$$

$$< \log^{-A} x \cdot \left(x \frac{\sqrt[3]{x}}{Q} + x\right)$$

これは $Q \geqslant \sqrt[3]{x}$ なら目的に適う。そして $Q \lll y$ であったから (16) の下に (11) の第1の積分を押えるには十分である。

このように $x \geqslant X^{\frac{7}{12}+\delta}$（主項、第二章）かつ $y \geqslant x^{\frac{1}{3}+\delta}$（誤差横走、第三章、第四章）なる条件の下に (7)(8) が言えることをみた。つまり (3) は

$$\Theta > \frac{7}{36}$$

ならば成立つ。

伍

支配的条件(16)の根拠は 第一章で $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部を

$$\Big(1-\sum_{\substack{p\mid n\\ \sqrt[3]{x}\le p<\sqrt{x}}} 1\Big)\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$$

と書いた際の $\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$ のパラメーター にある。そこでは最も単純なエラトステネスの篩を用いて 素数を切開したのであるが 別の〈素数の分解〉が よい限界を与えるかもしれない。(ヲ) あるいは 別の手法による残余項の取扱いが よい結果をもたらすのかもしれない。(ワ)

(ヲ) Linnik の書 Chap. VII. (7.2.4).

D. R. Heath-Brown: Sieve identities and gaps between primes, Astérisque 94 (1982) 61-65.

G. Kolesnik: Primes of the form $[n^c]$, Pacific J. Math. 118 (1985) 437-447.

R. C. Vaughan: Sommes trigonométriques sur les nombres premiers, C.R. Acad. Sci. Paris A 285 (1977) 981-983.

(ワ) おそらく

$$\sum_{r<\Delta}\sum_{n<x}\tau_3(n)\tau_3(n+r)$$

$$\int_x^{2x}\Big|\sum_{t<n\le t+\Delta}\tau_3(n)\Big|^2 dt$$

$$\int_{\frac12-iT}^{\frac12+iT}\Big|\sum_{n<N}n^{-s}\Big|^6|ds|$$

程度のものが計算できる手法でなくてはならないだろう。
また第四章のアプローチは(11)の第2積分にも有効である。

この最終章では試みに [I] の条件 $k\le\sqrt{x}$ をそのままにしつつ [II] の区間 $w\le \ell<\sqrt[3]{x}$ の $\sqrt[3]{x}$ をより小さくできないかを考える。もしそうできるならばここに持合わせている手法のままで直ちに (3) に反映するであろう。これは要するに

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Biggl(\sum_{\substack{d|n\\ d<\sqrt{x}}} f(d)\Biggr)\Phi_z(n)$$

と表せということであるが $z<\sqrt[3]{x}$ とできそうもない。そこで「=」を「>」で置換える。(7) のためにはこれで十分である。[カ] ブシュタフの公式から

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n)=\Phi_z(n)-\sum_{\substack{p|n\\ z\le p<\sqrt{x}}}\Biggl(\Phi_z(n)-\sum_{\substack{q|n\\ z\le q<p}}\Phi_q(n)\Biggr)$$

$$=\Biggl(1-\sum_{\substack{p|n\\ z\le p<\sqrt{x}}}1\Biggr)\Phi_z(n)+\sum\sum_{\substack{pq|n\\ z\le q<p\\ pq<\sqrt{x}}}\Phi_q(n)+\sum\sum_{\substack{pq|n\\ z\le q<p<\sqrt{x}\\ \sqrt{x}\le pq}}\Phi_q(n)$$

$$=\Biggl(1-\sum_{\substack{p|n\\ z\le p<\sqrt{x}}}1+\sum\sum_{\substack{pq|n\\ z\le q<p\\ pq<\sqrt{x}}}1\Biggr)\Phi_z(n)-\sum\sum\sum_{\substack{pqr|n\\ z\le r<q<p\\ pq<\sqrt{x}}}\Phi_r(n)+\sum\sum_{\substack{pq|n\\ z\le q<p<\sqrt{x}\\ \sqrt{x}\le pq}}\Phi_q(n)$$

この操作を続けていくと

(カ) A. Balog : On sums over primes, Banach Center Publ. 17 (1985) 9-19.

G. Harman : On the distribution of αp modulo one, J. London Math. Soc. (2) 27 (1983) 9-18.

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{x}}} \mu(d)\Phi_z(n) + \sum_{\substack{d|n \\ \sqrt{x} \leq d < \sqrt{x}\,p(d)}} \mu(d)\Phi_z(d)\Psi_{\sqrt{x}}(d)\Phi_{p(d)}\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (19)$$

ただし d の最小素因数を p(d) と書いている。前述の手法では触れないものが右辺の第2項に集約されたものの、これを直接調べるには骨が折れそうである。しかし第1項は容易である。次の関係式を知っている。[(3)]

$$\mu(n)=1 \quad のとき \quad \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} \mu(d) = 0$$

また この和は、n が $p>\sqrt{n}$ なる素因数をもつとき $d<\sqrt{n}$ は制限として働かなくなるから、やはり 0 となる。つまり (19) の第1項は 奇数個の $\sqrt{x}$ より小さな素数から成るものを取残していると思ってよい。(19) を $z=\sqrt[6]{x}$ と撰んで使ってみると

---

(3) I.M.Vinogradov：整数論入門，共立出版 1959，第2章問題25．
ちなみに 奇のパリティを消す重みは

$$\begin{matrix}\mu(n)=-1 \\ n \neq \mathrm{prime}\end{matrix} \quad のとき \quad \sum_{\substack{d|n \\ d<\sqrt{n}}} \mu(d)\left(1-\frac{\log d}{\log\sqrt{n}}\right) = 0$$

A.I.Vinogradov による。未発表の原稿の中で氏が用いたものである。1991年 本橋氏から電話でおしえていただいた。

$$\sum_{\substack{m+p=n \\ m\le x}} \Bigl(\sum_{\substack{d|n \\ d\le \sqrt{\frac{x}{v}}}} \mu(d) \Bigr) \Phi_{\sqrt[6]{x}}(n) \tag{20}$$

$$= \sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1\le x}} (+1) + \sum_{\substack{p_1p_2p_3+p=n \\ \sqrt[6]{x}\le p_3<p_2<p_1<\sqrt{x} \\ p_1p_2p_3\le x}} (-2) + \sum_{\substack{p_1p_2p_3p_4p_5+p=n \\ \sqrt[6]{x}\le p_5<p_4<p_3<p_2<p_1<\sqrt{x} \\ p_1p_2p_3p_4p_5\le x}} (+6) + \text{誤差}$$

左辺には都合の良いものしかない。その主項は 右辺の期待される主項と同じはずであるから 対応する定数を C_3、C_5 として 左辺は

$$= \frac{\mathfrak{S}(n)\,x}{\log X \log x}\left(1-2C_3+6C_5\right)+\text{誤差擬}$$

とできる。右辺の第1項は $R_x(n)$ である。第2項は無視、つまり ≤ 0 とする。第3項はスイッチング・トリック(タ) によって上から押えることができる。したがって 右辺は

$$\le R_x(n)+0+K\cdot 6C_5\frac{\mathfrak{S}(n)\,x}{\log X \log x}+\text{誤差}$$

ただし K は $\frac{\log X}{\log x}$ に依る定数である。故に

(タ) Pan Ch.-d.: A new mean value theorem and its applications, in Recent progress in analytic number theory. vol. 1. Academic 1981, 275-287.

$$R_x(n) > \frac{\mathfrak{S}(n)\,x}{\log X \log x}\left(1-2C_3-6(K-1)C_5\right)+\text{誤差擬}$$

この主項の係数は 幸いにも >0 となる。つまり (3)は

$$\frac{7}{72}=\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}<\theta\leqq 1$$

の範囲で成立つ。

$z=\sqrt[7]{x}$ と撰んでみる。すると $1-2C_3<0$ となってしまう。すなわち (20)の右辺第2項すべてを 0 で置換えるわけにはいかない。そして みっつの素数の積と直面するにはあまりにも非力である。

跋

ここに書きつけた事には 細部の検証が残されている。〈できるはずである〉〈思われる〉あたりが何やらあやしい。それでも いずれは全て正当化できると楽観して居る。

二月廿七日