数理解析研究所講究録
第 887 巻 1994 年 55-71

無限次元 Bargmann 空間と white noise 汎関数の空間

熊本大学教養部　横井 嘉孝 (Yoshitaka Yokoi)

1　記号および基礎空間

E_0を、その内積が $(\cdot,\ \cdot)_0$である無限次元の可分 Hilbert 空間とし、E_0上には自己共役作用素 Dが稠密に定義されていて、$D > 1$ かつ D^{-1}は Hilbert-Schmidt 的であるとする。さらに、D^{-1}の固有値と固有ベクトルのなす固有系

$$\{(\lambda_j,\ \zeta_j);\ j\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}\ \ (\ D^{-1}\zeta_j\ =\ \lambda_j\zeta_j,\ j\ =\ 0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

に関して、次のことが満たされているとする。

1. $\{\zeta_j;\ j\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ は E_0の完全正規直交系である。
2. $1 > \lambda_j \geq \lambda_{j+1}\ (j\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$p \geq 0$ に対して、E_pで D^pの定義域を表すことにする。E_pは、$(\cdot,\ \cdot)_p \equiv (D^p\cdot,\ D^p\cdot)_0$を内積とする Hilbert 空間になっている。明らかに、$0 \leq p < q$ ならば $E_q \subset E_p$ である。全ての $p \geq 0$ に対して、$\{\zeta_j;\ j = 0,1,2,\cdots\} \subset E_p$ なので

$$E\ \equiv\ \bigcap_{p\geq 0}\ E_p$$

と置くと、Eは $E\ \neq\ \emptyset$ を満たし核型空間になっている。次に、$p \geq 0$ に対して、E_0を内積 $(\cdot,\ \cdot)_{-p} \equiv (D^{-p}\cdot,\ D^{-p}\cdot)_0$に関して完備化する。得られる Hilbert 空間を E_{-p}で表すことにする。$0 \leq p < q$ならば、$E_0 \subset E_{-p} \subset E_{-q}$ と見なすことが出来る。各 E_{-p}は E_pの共役空間になっており、これらの和集合の空間

$$E^*\ \equiv\ \bigcup_{p\geq 0}\ E_{-p}$$

は、核型空間 E の位相的共役空間となる。空間 E^* に Hilbert 空間族 $\{E_{-p};\ p \geq 0\}$ による帰納的極限位相を与えておく。なお、ここでは帰納的極限位相とは、各標準的単射 $\iota_{-p}: E_{-p} \longrightarrow E^*$ が連続となる E^* の最強の凸位相のこととする。この位相の 0-近傍の基底の要素としては、

$$U = \text{a.c.e.}\left(\bigcup_{p\geq 0}\{x \in E_{-p};\ \|x\|_{-p} < \gamma_p\}\right) \quad (\{\gamma_p;\ \gamma_p > 0,\ p \geq 0\})$$

の形のものをとれる。ここで、a.c.e. は absolutely convex envelope のことで、

$$\text{a.c.e}(X) = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j;\ x_j \in X,\ \alpha_j \in \mathbf{R}\,(j = 1, 2, \cdots, n),\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \leq 1\}$$

とする。

$x \in E^*$ の $\xi \in E$ に於ける値を $\langle x, \xi\rangle$ で表すと、これは $E^* \times E$ 上の連続的双線形形式となる。

$$|\langle x,\ \xi\rangle| \leq \|x\|_{-p}\ \|\xi\|_p,\ p \geq 0$$

また、D^p $(p \in \mathbf{R})$ は E においてだけではなく、E^* においても連続的に作用しており、次の関係を満たす。

$$\langle D^p x,\ \xi\rangle = \langle x,\ D^p\xi\rangle \text{ for any } x \in E^*, \text{ any } \xi \in E$$

$$D^p : E_q \xrightarrow[\text{isomorphism}]{\text{isometric}} E_{q-p} \quad (p,\ q \in \mathbf{R})$$

上記のようにして得られた Gel'fand の 3 つ組 $E \subset E_0 \subset E^*$ を (white noise calculus のための) 基礎空間と呼ぶことにする。

次に、$p \in \mathbf{R}$ に対して、$H_p \equiv E_p + \sqrt{-1}E_p$ と置き、$z = x + \sqrt{-1}y,\ w = u + \sqrt{-1}v \in H_p$ に対して、

$$(z,\ w)_p \equiv (x,\ u)_p + (y,\ v)_p + \sqrt{-1}\{-(x,\ v)_p + (y,\ u)_p\}$$

と置く。H_p は、$(z,\ w)_p$ を内積とする $\mathbf{C}$ 上の Hilbert 空間になる。H_p を E_p の複素化と呼ぶことにする。$p \geq 0$ の時、$z = x + \sqrt{-1}y \in H_{-p}$ と $\zeta = \xi + \sqrt{-1}\eta \in H_p$ とに対して、次のように定義すれば、H_{-p} は H_p 上の連続線形汎関数全体の空間になっていることが容易に判る。

$$\langle z,\ \zeta\rangle \equiv \langle x,\ \xi\rangle - \langle y,\ \eta\rangle + \sqrt{-1}(\langle x,\ \eta\rangle + \langle y,\ \xi\rangle)$$

明らかに、

$$|\langle z,\ \zeta\rangle| \leq \|z\|_{-p}\ \|\zeta\|_p$$

が成立する。前と同じように、

$$H \equiv \bigcap_{p \geq 0} H_p, \quad H^* \equiv \bigcup_{p \geq 0} H_{-p}$$

と置く。Hに $\{H_p;\ p \geq 0\}$ の射影極限位相を考えると、H^*は核型空間 H の位相的共役空間を実現している。また、H^*には $\{H_{-p};\ p \geq 0\}$ の帰納的極限位相を入れておく。a.c.e. などを考える時の係数体は $\mathbf{C}$ である。

三つ組 $H \subset H_0 \subset H^*$ を無限次元 Bargmann 空間の基礎空間と呼ぶことにする。

$z = x + \sqrt{-1}y\ (x,\ y \in E^*)$ に対して、

$$D^p z = D^p x + \sqrt{-1} D^p y \text{ for } z = x + \sqrt{-1}y,\ x,\ y \in E^*$$

と置いて D^pを H^*上へ拡張する。D^pの H^*での作用は複素化以前と同様に Hのみならず H^*上で連続的であり、

$$\langle D^p z,\ \zeta \rangle = \langle z,\ D^p \zeta \rangle \text{ for any } z \in H^*, \text{ any } \zeta \in H$$

$$D^p : H_q \xrightarrow[\text{isomorphism}]{\text{isometric}} H_{q-p} \quad (p,\ q \in \mathbf{R})$$

が成立する。

後で使う記号・定数等を示しておく。

$$t_0 = -\frac{\log 2}{2 \log \lambda_0}, \text{ i.e., } \lambda_0^{2t_0} = 1/2,$$

$$s_0 = \inf\{s;\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2s} < \infty\},$$

$$p_0 = \max(t_0,\ s_0)$$

$$\mathcal{P}(E^*) = \{\text{finite sums of } c\textstyle\prod_j \langle x,\ \xi_j \rangle;\ \xi_j \in E,\ c \in \mathbf{C}\}$$

$$\mathcal{P}(H^*) = \{\text{finite sums of } c\textstyle\prod_j \langle z,\ \xi_j \rangle;\ \xi_j \in H,\ c \in \mathbf{C}\}$$

Xを $\mathbf{C}$ または $\mathbf{R}$ 上の核型空間、Hilbert 空間またはそれらの位相的双対空間とする。

$X^{\widehat{\otimes} n}$: Xの n 重対称テンソル積

$x_1,\ \cdots,\ x_n \in X$に対して、

$\widehat{\otimes}_{j=1}^{n} x_j$: $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$の対称化,

$$\mathcal{N} = \{\text{all sequences of nonnegative integers}\},$$

$$\mathcal{N}_0 = \{\vec{n} = (n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots);\ \vec{n} \in \mathcal{N},\ n_j = 0 \text{ for almost all } j\},$$

$\vec{n},\ \vec{k} \in \mathcal{N}_0$に対して、

$$\vec{n} \geq \vec{k} \iff n_j \geq k_j \text{ for all } j,$$

$$\vec{n} \wedge \vec{k} = (n_0 \wedge k_0,\ n_1 \wedge k_1,\ n_2 \wedge k_2,\ \cdots),$$

$$\vec{n}! = \prod_j n_j!\ ,\ \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \prod_j \begin{pmatrix} n_j \\ k_j \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots,\quad p\vec{n} = (pn_0,\ pn_1,\ pn_2,\ \cdots)\quad (p \in \mathbf{R})$$

とする。さらに、D^{-1}の固有系 $\{(\lambda_j,\ \zeta_j)\}_{j=0}^{\infty}$ に対して、

$$\lambda^{p\vec{n}} = \prod_j \lambda_j^{pn_j},$$

$$\zeta^{\widehat{\otimes}\vec{n}} = \widehat{\otimes}_{n_j \neq 0}\ \zeta_j^{\widehat{\otimes}n_j} = \text{the symmetrizaton of } \otimes_{n_j \neq 0}\ \zeta_j^{\otimes n_j},$$

$$Z^{\vec{n}} = Z^{\vec{n}}(z) = (2^n\ \vec{n}!)^{-1/2} \prod_j \langle z,\ \zeta_j\rangle^{n_j} = (2^n\ \vec{n}!)^{-1/2} \langle z^{\widehat{\otimes}n},\ \zeta^{\widehat{\otimes}\vec{n}}\rangle,\quad z \in H^*,$$

$$h_{\vec{n}} = h_{\vec{n}}(x) = (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \prod_j H_{n_j}\left(\frac{\langle x,\ \zeta_j\rangle}{\sqrt{2}}\right),\quad x \in E^*,$$

ここで、$H_n(u)$ は、n 次の Hermite 多項式

$$H_n(u) = (-1)^n\ \exp[u^2]\ \left(\frac{d}{du}\right)^n \exp[-u^2]$$

である。

2 white noise 汎関数の空間 (L^2)、無限次元 Bargmann 空間 $(\mathcal{F}_0)$ 及び Gauss 変換 G

Minlos の定理によれば、基礎空間 $E \subset E_0 \subset E^*$において、次のことが成立する。$E$上の正定値連続汎関数

$$C(\xi) = \exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|_0^2]$$

に対して、$C(\xi)$ をその特性汎関数とする E^*上の確率測度 μ が一意的に存在する。

$$C(\xi) = \int_{E^*} \exp[\sqrt{-1}\langle x,\ \xi\rangle] d\mu(x),\ \xi \in E$$

ここに、$\langle x,\ \xi\rangle$ は $x\in E^*$ と $\xi\in E$ によって与えられる標準的双線形形式である。$\mathcal{B}$ を E^* 上のシリンダー集合 (但し、その base が有限次元 Borel 集合となっているもの) 全てで生成される σ-集合体とする。

$$(L^2)\equiv L^2(E^*,\ \mathcal{B},\ \mu)$$

と置く。(L^2) はホワイトノイズ汎関数の空間と呼ばれている (Hida[H])。明らかに、$\mathcal{P}(\mathcal{E}^*)$ は、(L^2) において稠密である。

さて、H^* を $E^*\times E^*$ と同一視して、H^* に直積測度 $\nu\equiv\mu\times\mu$ を導入して置く。

$$(\mathcal{F}_0)\equiv\overline{\mathcal{P}(H^*)}^{L^2(\nu)}=\mathcal{P}(H^*)\text{ の }L^2(\nu)-\text{閉包}$$

を無限次元 Bargmann 空間と云うことにする。空間 $(\mathcal{F}_0)$ は、$\bar{z}\in H^*$ の関数を含まないので、$L^2(H^*,\ \nu)$ の真の部分空間である。

(L^2) の稠密な部分空間 $\mathcal{P}(E^*)$ から $(\mathcal{F}_0)$ の稠密な部分空間 $\mathcal{P}(H^*)$ の上への同型かつ等距離的写像 G を定義しよう。$\varphi\in\mathcal{P}(E^*)$ に対して、$\varphi(x)$ は E^* 上の関数であるが、$\langle x,\ \xi\rangle$, $(x\in E^*,\ \xi\in E)$ などを $\langle z,\ \xi\rangle$, $z\in H^*$ などと置き換えることによって、H^* 上へ自然に拡張され、$\mathcal{P}(H^*)$ の元となる。従って、$w\in H^*$ に対して、

$$G\varphi(w)\equiv\int_{E^*}\varphi(x+w/\sqrt{2})\ d\mu(x)$$

と置くと、$G\varphi\in\mathcal{P}(H^*)$ となる。さらに、$f\in\mathcal{P}(H^*)$ に対して、

$$\tilde{G}f(x)\equiv\int_{E^*}f(\sqrt{2}(x+\sqrt{-1}y))\ d\mu(y)\ (x,\ y\in E^*)$$

と置くと、

$$\tilde{G}f\in\mathcal{P}(E^*)\text{ かつ }G\tilde{G}f=f$$

が成立している。特に、(L^2) の CONS $\{h_{\vec{n}};\ \vec{n}\in\mathcal{N}_0\}$ と $(\mathcal{F}_0)$ の CONS $\{Z^{\vec{n}};\ \vec{n}\in\mathcal{N}_0\}$ に対して、

$$Gh_{\vec{n}}=Z^{\vec{n}},\ \tilde{G}Z^{\vec{n}}=h_{\vec{n}}$$

が成立する。従って、G は、$(\mathcal{P}(E^*),\ \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ から $(\mathcal{P}(H^*),\ \|\cdot\|_{L^2(\mu\times\mu)})$ への等距離写像であり、$\tilde{G}$ は G の逆写像である。即ち、

$$G^{-1}=\tilde{G}\quad。$$

明らかに、G 及び G^{-1} は (L^2) と $(\mathcal{F}_0)$ の間の等距離的同型対応へと一意的に拡張される。G を Gauss 変換、G^{-1} を逆 Gauss 変換ということにする。

3 作用素 $\Lambda\,(D^p)$ による Bargmann 空間の 3 つ組 $(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$ の構成

第 1 節で与えた作用素 D_p $(p \in \mathbf{R})$ について、

$$D^p\colon H_q \to H_{q-p} \text{ (isometric isomorphism)}$$

$$D^p\colon H_q \to H^* \text{ (continuous injection)}$$

$$D^p\colon H \to H^* \text{ (continuous injection)}$$

が成立していることより、$\mathcal{P}(H^*)$ 上の作用素 $\Lambda(D^p)$ を各 $p \in \mathbf{R}$ に対して、次のように定義することが出来る。

$$\Lambda(D^p)f(z) \equiv f(D^p z),\ f \in \mathcal{P}(H^*)$$

$f(z) = \prod_{j=1}^{n} \langle z,\ \xi_j\rangle\ \in \mathcal{P}(H^*)$ とすると、

$$\Lambda(D^p)f(z) = \prod_{j=1}^{n}\langle D^p z,\ \xi_j\rangle = \prod_{j=1}^{n}\ \langle z,\ D^p\xi_j\rangle$$

であるから、次の等式が直ちに出て来る。

$$\Lambda(D^p)Z^{\vec{n}}(z) = \left(\prod_j \lambda_j^{-pn_j}\right)\ Z^{\vec{n}}(z) = \lambda^{-p\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(z)$$

容易に分かるように、$\mathcal{P}(H^*)$ は、次の量を内積とする pre-Hilbert 空間である。

$$(\Lambda(D^p)f,\ \Lambda(D^p)g)_{(\mathcal{F}_0)} = \int_{H^*} (\Lambda(D^p)f(z))\overline{\Lambda(D^p)g(z)}\ d\nu(z)$$

これによって完備化した Hilbert 空間とその内積を $\left((\mathcal{F}_p),\ (\cdot,\ \cdot)_{(\mathcal{F}_p)}\right)$ で表すことにする。D^p の時と同様に、任意の $q \in \mathbf{R}$ に対して、$\Lambda(D^p)$ は $(\mathcal{F}_q)$ から $(\mathcal{F}_{q-p})$ の上への等距離同型となる。

Proposition 3.1 任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、$\{\lambda^{p\vec{n}}Z^{\vec{n}};\ \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ は $(\mathcal{F}_p)$ の CONS である。それ故、任意の $f \in (\mathcal{F}_p)$ は、

$\|f\|^2_{(\mathcal{F}_p)} = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \lambda^{-2p\vec{n}}|c_{\vec{n}}|^2 < \infty$ となる $\{c_{\vec{n}};\ \vec{n}\ \in \mathcal{N}_0\}$ に対して、

$$f = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}}Z^{\vec{n}}$$

と展開される。更に、この f は $\Lambda(D^q)$ $(q \in \mathbf{R})$ に対して、

$$\Lambda(D^q)f = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \lambda^{-q\vec{n}}\ c_{\vec{n}}Z^{\vec{n}}\ \in (\mathcal{F}_{p-q})\quad (q \in \mathbf{R})$$

を満たす。

この Proposition より、$(\mathcal{F}_{-p})$ を $(\mathcal{F}_p)$ の双対空間と同一視することが出来て、$0 < p < q$ のとき包含関係

$$(\mathcal{F}_q) \subset (\mathcal{F}_p) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}_{-p}) \subset (\mathcal{F}_{-q})$$

が成立する。実際、$F \in (\mathcal{F}_{-p})$ と $f \in (\mathcal{F}_p)$ に対する bilinear form $\langle F,\ f\rangle$ は、

$$\langle F,\ f\rangle = \int_{H^*} (\Lambda(D^{-p})F(z))\Lambda(D^p)f(z)\ d\nu(z)$$

で実現される。また、D^{-1} が Hilbert-Schmidt 的であることから、$p \in \mathbf{R}$ と $s > s_0$ とに対して、

$$\sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \|\lambda^{(p+s)\vec{n}} Z^{\vec{n}}\|^2_{(\mathcal{F}_p)} = \prod_j (1 - \lambda_j^{2s})^{-1} < \infty$$

となっている。このことは、$(\mathcal{F}_{p+s})$ から $(\mathcal{F}_p)$ への標準的単射が Hilbert-Schmidt 的であることを意味している。従って、

$$(\mathcal{F}) = \cap_{p=0}^{\infty} (\mathcal{F}_p)\text{、}\quad (\mathcal{F}') = \cup_{p=0}^{\infty} (\mathcal{F}_{-p})$$

とおくと、$(\mathcal{F})$ は核型空間であり $(\mathcal{F}')$ はその双対空間である。即ち、3 つ組

$$(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$$

は、Gel'fand triplet である。この 3 つ組を無限次元 Bargmann 空間の Gel'fand triplet 呼ぶことにする。(Bargmann 空間の呼び名は [B-K] に倣った。)

この 3 つ組の 1 性質として、この 3 つ組は"holomorphic functions" の 3 つ組と等距離同型になるということを挙げることが出来る。このことは、異なった設定の仕方で [B-K] や [Ko] において述べられているが、我々の枠組では次のようになる。

Proposition 3.2 任意の $p \in \mathbf{R}$ と任意の $f \in (\mathcal{F}_p)$ に対して、$f = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}$ と展開するとき、級数

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)$$

は H_{-p} の任意の有界集合上において、一様に絶対収束する。極限関数 $\tilde{f}(z)$ は、各点 $z \in H_{-p}$ において不等式

$$|\tilde{f}(z)| \leq \exp[\frac{1}{4}\|z\|^2_{-p}]\ \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}$$

を満たす。更に、$\tilde{f}(z)$ は、H_{-p} において連続であり、[H-P](E. Hille & R. S. Phillips) の意味において analytic である。

Proof. Schwarz の不等式と $Z^{\vec{n}}(z)$ の形より、任意の $z \in H_{-p}$ に対して

$$\sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0}|c_{\vec{n}}Z^{\vec{n}}(z)|$$

$$= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\sum\nolimits_{|\vec{n}|=n}|c_{\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(z)|$$

$$= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\sum\nolimits_{|\vec{n}|=n}|c_{\vec{n}}\langle z^{\hat{\otimes}n},\ (2^n\vec{n}!)^{-1/2}\zeta^{\hat{\otimes}n}\rangle|$$

$$= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(2^n\vec{n}!)^{-1/2}\sum\nolimits_{|\vec{n}|=n}|c_{\vec{n}}|\lambda^{-p\vec{n}}\left(\frac{n!}{\vec{n}!}\right)^{1/2}|\langle z^{\hat{\otimes}n},\ \lambda^{p\vec{n}}\zeta^{\hat{\otimes}n}\rangle|$$

$$\leq \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}\exp[\frac{1}{4}\|z\|_{-p}^2]$$

を得る。従って、求める評価式が成立する。この評価式より、級数 $\tilde{f}(z)$ は H_{-p} の任意の有界集合上において一様に絶対収束し、z の連続関数となることが分かる。また、$\tilde{f}(z)$ の任意有限和は、[H-P] の意味において、H_{-p} 上 analytic で局所一様有界であるから、[H-P] の Theorem 3. 18. 1 を適用して $\tilde{f}(z)$ の analyticity を導くことが出来る。(証終)

この命題は、任意の $p \in \mathbf{R}$ 毎に、$f \in (\mathcal{F}_p)$ と H_{-p} 上の analytic な関数 $\tilde{f}(z)$ で、その order が高々2 、type が高々1/4 のものとが対応していることを示している。しかし、$p \leq s_0$ に対しては、$\tilde{f}(z)$ は f の $\nu-$a.e. 等しいという意味での version ではあり得ない。何故なら、$p \leq s_0$ なら、$\nu(H_{-p}) = 0$ となっているからである。今後、$L^2(\nu)$ に属する要素 f の version と言えば f と $\nu-$a.e. 等しいもののこととする。$p > s_0$ なら、次の命題が成立する。

Proposition 3.3 $p > s_0$ とする。$f \in (\mathcal{F}_p)$ に対して、$\tilde{f}(z)$ は H_{-p} の関数としては一意的な連続 version である。さらに、$p > q + s_0$ なら $\tilde{f}(D^q z)$ は $\Lambda(D^q)f$ の H_{-p+q} における連続 version となっている。

Proof. $p > s_0$、$f = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}$ とする。$\nu(H_{-p}) = 1$ であるから、f と $\tilde{f}$ とは H^* において $\nu-$a.e. 等しい。また、H_{-p} においては、空でない開集合の $\nu-$測度は 0 でないから H_{-p} 上の連続 version は一意的である。$p > q + s_0$ なら $z \in H_{-p+q}$ に対して $D^q z \in H_{-p}$ である。故に、

$$\tilde{f}(D^q z) = \sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(D^q z) = \sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0}\lambda^{-q\vec{n}}\ c_{\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(z)$$

は H_{-p+q} の任意の有界集合上一様に絶対収束する。これは最後の部分の主張である。(証終)

$(\mathcal{F})$ の要素 f に対応する analytic な version $\widetilde{f}$ は、それを H_{-p} $(p > s_0)$ に制限すれば、minimal type の analytic な関数と言える。即ち、次の系が成立する。

Corollary 3. 1 $f \in (\mathcal{F})$ ならば、任意の $p \in \mathbf{R}$ 、任意の $k > 0$ と任意の $z \in H_{-p}$ に対して

$$|\widetilde{f}(z)| \leq \|f\|_{(\mathcal{F}_{p+k})} \ \exp[\frac{1}{4}\lambda_0^{2k} \ \|z\|_{-p}^2]$$

成立する。

Proof. $z \in H_{-p}$ とすると命題 3.1 の $\widetilde{f}(z)$ に対する評価式と次の不等式より明らかである。

$$\|z\|_{-(p+k)}^2 \leq \lambda_0^{2k} \ \|z\|_{-p}^2 \quad \text{(証終)}$$

Theorem 3.1 $f \in (\mathcal{F})$ に対して、H^* において定義された H^* の帰納的極限位相に関して連続な version $\widetilde{f}(z)$ が一意的に存在する。

Proof. $f \in (\mathcal{F})$ なら、任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、$f \in (\mathcal{F}_p)$ である。故に、各 $p > s_0$ 毎に H_{-p} 上の連続 version $\widetilde{f_p}(z)$ が存在する。$s_0 < p < q$ なら H_{-q} の位相より H_{-p} の位相の方が強いので $\widetilde{f_q}(z)$ の H_{-p} への制限は H_{-p} において連続である。H_{-p} 上の連続 version の一意性より $\widetilde{f_q}(z)$ の H_{-p} への制限は $\widetilde{f_p}(z)$ と一致している。従って、H^* 上の関数 $\widetilde{f}(z)$ が存在し、それは全ての $p > s_0$ に対して $\widetilde{f_p}(z)$ の拡張となっている。

この $\widetilde{f}(z)$ に対する H^* での連続性を示せばよい。$z \in H^*$ を任意に固定したとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、H^* の帰納的極限位相に関する 0-近傍 U を見つけて $w \in U$ なる限り、

$$|\widetilde{f}(z+w) - \widetilde{f}(z)| \leq \varepsilon$$

とできることを示せばよい。

$z \in H^*$ であるから、ある $q \geq 0$ に対して $z \in H_{-q}$ となっている。この時、$p \geq 0$ に対して、

$$\delta_p = \left(2\left(\exp[\frac{1}{4}(1 + \|z\|_{-p})^2] \ \|F\|_{(\mathcal{F}_p)}\sqrt{(1 + \|z\|_{-p})^2 + 2}\right)^{-1} \cdot \varepsilon\right) \wedge 1$$

と置き、$p \geq q$ なら $\gamma_p = \delta_p$、$p \leq q$ なら $\gamma_p = \delta_q$ のように与える。そこで、

$$U = \text{a.c.e.}\left(\bigcup\nolimits_{p\geq 0} \{w;\ w \in H_{-p},\ \|w\|_{-p} < \gamma_p\}\right)$$

と定義すれば、この U が求める近傍となる。U は、

$$\gamma_p \leq 1 \quad (p \geq q), \quad \gamma_p = \gamma_q \quad (p \leq q)$$

を満たしている。

$$\tilde{f}(z) = \sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(z) \quad \text{with} \quad \sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \lambda^{-2p\vec{n}}\ |c_{\vec{n}}|^2 < \infty \quad \text{for any} \quad p \geq 0$$

として、$|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)|$ の評価をしてみよう。先ず、$\tilde{f}(z)$ が、

$$\tilde{f}(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \langle z^{\widehat{\otimes} n},\ F_n\rangle, \quad \text{但し、} \quad F_n \in H^{\widehat{\otimes} n} \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots),$$
$$\|f\|^2_{(\mathcal{F}_p)} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n!\|F_n\|^2_{H^{\widehat{\otimes} n}} \quad (p \geq 0)$$

と表せることに注意すると、

$$|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)| \leq \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |\langle (z+w)^{\widehat{\otimes} n} - z^{\widehat{\otimes} n},\ F_n\rangle|$$

となる。ここで、$w \in U$ は、

$$w = \sum\nolimits_{j=1}^{N} \alpha_j\, w_{p_j}, \quad w_{p_j} \in H_{p_j}, \quad \|w_{p_j}\|_{-p_j} < \gamma_{p_j}, \quad q \leq p_j \quad (1 \leq j \leq N),$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} |\alpha_j| \leq 1$$

となっているとしてよいから、

$$|\langle (z+w)^{\widehat{\otimes} n} - z^{\widehat{\otimes} n},\ F_n\rangle| \leq n \sum\nolimits_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{1}{l+1}\, |\langle z^{\widehat{\otimes}(n-l)} \widehat{\otimes} w^{\widehat{\otimes}(l+1)},\ F_n\rangle|$$

に対して後述の補題を適用すれば、

$$|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)| \leq$$
$$\sum\nolimits_{j=1}^{N} |\alpha_j|\ \|f\|_{(\mathcal{F}_{p_j})}\ \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \|z\|_{-p_j}\right)^2 + 2}\ \exp[\frac{1}{4}(1 + \|z\|_{-p_j})^2]\ \|z\|_{-p_j}$$
$$\leq \sum\nolimits_{j=1}^{N} |\alpha_j|\ \varepsilon \leq \varepsilon$$

となる。(証終)

LEMMA 3. 1　$\alpha_j \in \mathbf{C}$,　$z_j \in H_{-p_j}$　$(j = 1,\ 2, \cdots,\ N)$ に対して、$\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \leq 1$,　$w = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\ z_j$ とすると、

$$w^{\widehat{\otimes}(l+1)} = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j\ z_j\right)^{\widehat{\otimes}(l+1)}$$
$$= \sum_{l_1+\cdots+l_N=l+1} \frac{l!}{l_1! \cdots l_N!}\ \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_N^{l_N}\ z_1^{\widehat{\otimes} l_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} z^{\widehat{\otimes} l_N}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{l_1+\cdots+l_j=l+1, l_j \neq 0} \frac{l!}{l_1! \cdots l_j!}\ \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_j^{l_j}\ z_1^{\widehat{\otimes} l_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} z^{\widehat{\otimes} l_j}$$

が成立する。

Lemma 3. 2　$a_1, \cdots,\ a_j \geq 0$ ならば、

$$\sum_{l_1+\cdots+l_j=l+1, l_j \neq 0} \frac{(l+1)!}{l_1! \cdots l_j!}\ a_1^{l_1} \cdots a_j^{l_j} \ \leq (l+1)(a_1 + \cdots + a_j)^l\ a_j$$

である。

補題の証明は省略する。

4　Bargmann 空間の 3 つ組 $(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$ から逆 Gauss 変換 G^{-1} によって white noise 空間の 3 つ組 $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}')$ を導くこと

ここでは、第 2 節で定義された Gauss 変換と逆 Gauss 変換を用いて、white noise 超汎関数の空間とテスト汎関数の空間とを構成する。先ず、G が $\mathcal{P}(E^*)$ から $\mathcal{P}(H^*)$ の上への等距離同型であること：

$$\left(\mathcal{P}(E^*),\ \|\cdot\|_{(L^2)}\right) \xrightarrow[\text{isometric}]{G} \left(\mathcal{P}(H^*),\ \|\cdot\|_{(\mathcal{F}_0)}\right)$$

に注意する。$\mathcal{P}(E^*)$ から $\mathcal{P}(E^*)$ の上への線形作用素 $\Gamma(D^p)$　$(p \in \mathbf{R})$ を、

$$\Gamma(D^p)\varphi \equiv G^{-1}\Lambda(D^p)G\varphi$$

によって定義する。明らかに、$\mathcal{P}(E^*)$ は 次の量を内積とする pre-Hilbert 空間である $(p \in \mathbf{R})$ 。

$$(\Gamma(D^p)\varphi,\ \Gamma(D^p)\psi)_{(L^2)} = \int_{E^*} (\Gamma(D^p)\varphi(x))\,\overline{\Gamma(D^p)\psi(x)}\ d\mu(x)$$

$\mathcal{P}(E^*)$ のこの内積による完備化 Hilbert 空間と、その内積を

$$\Big((\mathcal{S}_p),\ (\varphi,\ \psi)_{(\mathcal{S}_p)}\Big) \quad (p \in \mathbf{R})$$

で表す。G 、G^{-1}、$\Lambda(D^p)$ について、

$$Gh_{\vec{n}} = Z^{\vec{n}}, \quad G^{-1}Z^{\vec{n}} = h_{\vec{n}},$$
$$\Lambda(D^p)Z^{\vec{n}}(z) = \Big(\prod_j \lambda_j^{-pn_j}\Big) Z^{\vec{n}}(z) = \lambda^{-p\vec{n}}\ Z^{\vec{n}}(z)$$

の関係があることより、

$$\Gamma(D^p)h_{\vec{n}}(x) = \Big(\prod_j \lambda_j^{-pn_j}\Big) h^{\vec{n}}(x) = \lambda^{-p\vec{n}}\ h_{\vec{n}}(x)$$

が成立する。このことと $\{h_{\vec{n}};\ \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ が (L^2) の CONS であることから、次の命題を得る。

Proposition 4.1 任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して $\{\lambda^{p\vec{n}}\ h_{\vec{n}};\ \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ は $(\mathcal{S}_p)$ の CONS である。従って、任意の $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ は、

$$\varphi = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} c_{\vec{n}}\ h_{\vec{n}}, \quad \|\varphi\|^2_{(\mathcal{S}_p)} = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \lambda^{-2p\vec{n}}\ \|c_{\vec{n}}\|^2 < \infty$$

という展開を持つ。さらに、任意の $p,\ q \in \mathbf{R}$ に対して、$\Gamma(D^q)$ は $(\mathcal{S}_p)$ から $(\mathcal{S}_{p-q})$ の上への等距離作用素に拡張され、次の等式を満たす。上の形の $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ に対して、

$$\Gamma(D^q)\varphi = \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \lambda^{-q\vec{n}}\ c_{\vec{n}}\ h_{\vec{n}}\ \in\ (\mathcal{S}_{p-q}).$$

明らかに、$(\mathcal{S}_0) = (L^2)$ である。

Corollary 4. 1 $0 < p < q$ なら

$$(\mathcal{S}_q) \subset (\mathcal{S}_p) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}_{-p}) \subset (\mathcal{S}_{-q})$$

であり、任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、$(\mathcal{S}_{-p})$ は $(\mathcal{S}_p)$ の双対空間と見なされる。実際、$\psi \in (\mathcal{S}_{-p})$ と $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ に対する標準的 bilinear form $\langle\psi,\ \varphi\rangle$ は、

$$\langle\psi,\ \varphi\rangle = \int_{E^*} \Big(\Gamma(D^{-p})\psi(x)\Big)\ \Gamma(D^p)\varphi(x)\ d\mu(x)$$

によって実現される。

Proposition 4.2 $p \in \mathbf{R}$, $s > s_0$ に対して、$(\mathcal{S}_{p+s})$ から $(\mathcal{S}_p)$ への標準的単射 $\iota_{p+s,p}$ は、Hilbert-Schmidt 的であり、その HS ノルム $\|\iota_{p+s,p}\|_{\mathrm{HS}}$ は

$$\|\iota_{p+s,p}\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum\nolimits_{\vec{n}\in\mathcal{N}_0} \|\lambda^{(p+s)\vec{n}}\ h_{\vec{n}}\|_{(\mathcal{S}_p)}^2 = \prod\nolimits_j\ (1-\lambda_j^{2s})^{-1} < \infty$$

を満たす。

Definition 4. 1

$$(\mathcal{S}) \equiv \bigcap\nolimits_{p\geq 0}(\mathcal{S}_p), \quad (\mathcal{S}') \equiv \bigcup\nolimits_{p\geq 0}(\mathcal{S}_{-p})$$

と置くとき、3つ組 $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}')$ を white noise 解析における Gel'fand triplet と言うことにする。

Proposition 4. 2により、空間 $(\mathcal{S})$ は、核型空間であり $(\mathcal{S}')$ は $(\mathcal{S})$ の位相的双対空間であることが判る。

G, G^{-1} が、多項式の空間 $\mathcal{P}(E^*)$, $\mathcal{P}(H^*)$ の間で L^2−ノルムを不変にしていることより、任意の $p\in\mathbf{R}$ と $f\in\mathcal{P}(H^*)$ に対して、

$$\|G^{-1}f\|_{(\mathcal{S}_p)} = \|\Gamma(D^p)G^{-1}f\|_{(L^2)} = \|\Lambda(D^p)f\|_{(\mathcal{F}_0)} = \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}$$

である。従って、G^{-1} は $(\mathcal{S}_p)$ から $(\mathcal{F}_p)$ への等距離写像 G_p^{-1} に一意的に拡張される。$p<q$ なら G_p^{-1} は $(\mathcal{F}_q)$ 上で G_q^{-1} に一致する。故に、$\{G_p^{-1};\ p\in\mathbf{R}\}$ は $(\mathcal{F}')$ から $(\mathcal{S}')$ の上への一意的な線形写像を与えている。これをもやはり G^{-1} で表す。$(\mathcal{F}')$ や $(\mathcal{S}')$ に帰納的極限位相を考えれば、この拡張 G^{-1} は明らかに連続である。

内積と標準的 bilinear form について、次のことは明らかである。

$$\left(G^{-1}f,\ G^{-1}g\right)_{(\mathcal{S}_p)} = (f,\ g)_{(\mathcal{F}_p)} \qquad (\ f,\ g\in(\mathcal{F}_p)\ )$$
$$\langle G^{-1}F,\ G^{-1}f\rangle = \langle F,\ f\rangle \qquad (\ F\in(\mathcal{F}_{-p}),\ f\in(\mathcal{F}_p)\ )$$

REMARK. $(\mathcal{S})\subset(L^2)\subset(\mathcal{S}')$ の構成方法を、$E_0 = L^2(\mathbf{R};\ \mathbf{R})$, $D = 1+u^2-d^2/du^2$ の場合に適用すれば、

$$H_0 = L^2(\mathbf{R};\ \mathbf{C}),\quad E_0^{\hat{\otimes}n} = \hat{L}^2(\mathbf{R}^n;\ \mathbf{R}),\quad H_0^{\hat{\otimes}n} = \hat{L}^2(\mathbf{R}^n;\ \mathbf{C})$$
$$D\zeta_j = 2(j+1)\zeta_j,\quad (D^p)^{\otimes n}\zeta^{\hat{\otimes}\vec{n}} = \hat{\otimes}_j(D^p\zeta_j)^{\hat{\otimes}n_j} = \left(\prod\nolimits_j(2(j+1))^{pn_j}\right)\zeta^{\hat{\otimes}\vec{n}}$$

但し、$\zeta_j \equiv \zeta_j(u) \equiv \left(2^j j!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} H_j(u)\exp[-\frac{1}{2}u^2] \quad (j=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

となる。さらに、$p>0$ に対して

$$H_p^{\widehat{\otimes} n}=\left\{f;\ f\in H_0,\ \int_{\mathbf{R}^n}|(D^p)^{\otimes n}f(u_1,\ \cdots,\ u_n)|^2\,du_1\ \cdots du_n<\infty\right\}$$

である。これらのことより、$I_n(f_n)$ を n 次の Multiple-Wiener 積分とすると、

$$I_n(\zeta^{\widehat{\otimes}\vec{n}}/\sqrt{\vec{n}!})=h_{\vec{n}}=(2^n\ \vec{n}!)^{-1/2}\prod_j H_{n_j}\left(I_1(\zeta_j)/\sqrt{2}\right)$$

という基本的な等式が成立する。これは、従来のホワイトノイズ汎関数の構成の仕方と上記の構成方法とが、この具体的な場合に一致していることを示している。

5 Gauss 変換の積分表示について

$G,\ G^{-1}$ は先ず初めに、$\mathcal{P}(E^*),\ \mathcal{P}(H^*)$ の間で積分変換

$$\mathcal{P}(E^*)\ni\varphi\mapsto G\varphi(w)\equiv\int_{E^*}\varphi(x+w/\sqrt{2})\,d\mu(x)\quad(w\in H^*)$$

$$\mathcal{P}(H^*)\ni f\mapsto G^{-1}f(x)\equiv\int_{E^*}f(\sqrt{2}(x+\sqrt{-1}y))\,d\mu(y)\quad(x\in E^*)$$

によって与えられていた。　この表示は、もっと広い空間の間で成立する。定数 $s_0,\ t_0,\ p_0\quad(p_0=s_0\vee t_0)$ を、第 1 節で定義したものとする。

LEMMA 5. 1

$p>p_0$ ならば、$\exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2]\in(L^2)$ で、その L^2- ノルムは、

$$\gamma_p\equiv\int_{E_{-p}}\exp[\|x\|_{-p}^2]\,d\mu(x)=\prod_j(1-2\lambda_j^{2p})^{-1/2}\ \text{であり、}$$

$p>s_0$ ならば、$\exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2]\in(L^1)$ で、その L^1- ノルムは、

$$\alpha_p\equiv\int_{E_{-p}}\exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2]\,d\mu(x)=\prod_j(1-\lambda_j^{2p})^{-1/2}\ \text{である。}$$

Theorem 5.1　$p>p_0$ の時、$\varphi\in(\mathcal{S}_p)$ に対して、$f=G\varphi$ 、$\tilde{f}$ を f の H_{-p} における連続 version とする。H_{-p} において関数 $\tilde{\varphi}(w)$ を

$$\tilde{\varphi}(w)\equiv\int_{E_{-p}}\tilde{f}(\sqrt{2}(w+\sqrt{-1}y))\,d\mu(y)$$

と定義するならば、

$\tilde{\varphi}(w)$ は H_{-p}において解析的で、かつ $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\mu - \text{a.e. } x \in E^*)$ 、

$$|\tilde{\varphi}(x+w)| \leq \gamma_p \ \|\varphi\|_{(\mathcal{S}_p)} \ \exp[\|x\|_{-p}^2] \ \exp[\|w\|_{-p}^2] \quad (x \in E_p^*,\ w \in H_p^*)$$

である。 さらに、p の条件を弱くして $p > s_0$ とすると、

$\tilde{\varphi}(x)$ は、E_{-p} において連続で、$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ $(\mu - \text{a.e. } x \in E^*)$ 、

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leq \ \alpha_p \ \|\varphi\|_{(\mathcal{S}_p)} \ \exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2] \quad (x \in E_{-p})$$

となる。

この定理の証明は、上の 2 つの補題及び命題 3.2 における評価式とLebesgue の収束定理を使ってなされる。

Defnition 5. 1 $p > p_0$ の時、定理5.1における $\tilde{\varphi}(w)$ $(\ w \in H_{-p}\ )$ を $\tilde{\varphi}(x)$ $(\ x \in E_{-p}\ )$ の、あるいは単に φ の analytic continuation と呼ぶ。

Theorem 5.2 $p > p_0$ 、$\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ に対して $f = G\varphi$ と置く。この時、φ の analytic continuaton について

$$\tilde{f}(w) = \int_{E_{-p}} \tilde{\varphi}(x + w/\sqrt{2})\ d\mu(x), \quad w \in (H_{-p})$$

が成り立つ。

定理の証明は、定理 5.1 における評価式と Lebesgue の収束定理を使ってなされる。

References

[Ba] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and associated integral transform Part 1, *Comm. Pure Appl. Math., Vol.* **14** (1961), 187-214.

[B-K] Yu. M. Berezansky & Yu. Ge. Kondrat'ev, Spectral methods in infinite-dimensional analysis, *Naukova Dumka, Kiev* (1988).

[G-S] I. M. Gel'fand & G. E. Shilov, "Generalized functions", *Academic Press, Vol.* **4**, New York/London, 1964.

[G-V] I. M. Gel'fand & N. Ya. Vilenkin, "Generalized functions", *Academic Press, Vol.* **2**, New York/London, 1964.

[H] T. Hida, Analysis of generalized Brownian functionals, *Carleton-Ottawa Math. Lecture Note Ser., Vol.* **13**, 2nd. Ed., 1975.

[H-P] E. Hille & R. H. Phillips, "Functional analysis and semi-groups", *American Mathematical Society*, 1957.

[Ko] Yu. Ge. Kondrat'ev, Spaces of entire functions of an infinite number of variables, connected with the rigging of a Fock space, *Selecta Math. Soviet., Vol.* **10** (1991), No. 2, 165-180.

[K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise I, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci., Vol.* **56** (1980), 376-380.

[K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise II, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci., Vol.* **56** (1980), 411-416.

[K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise III, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci., Vol.* **57** (1981), 433-437.

[K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise IV, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci., Vol.* **58** (1982), 186-189.

[K-Y] I. Kubo & Y. Yokoi, A remark on the testing random variables in white noise calculus, *Nagoya Math. J., Vol.* **115** (1989), 139-149.

[L] Yu. J. Lee, Analytic versions of test functionals, Fourier transform and a characterization of measures in white noise calculus, *J. Funct. Anal., Vol.* **100** (1991), 359-380.

[M] R. A. Minlos, Generalized random processes and their extension to a measure, *Selected Transl. in Math. Stat. & Prob., Vol.* **3** (1962), 291-313.

[P-S] J. Potthoff & L. Streit, A characterization of Hida distributions, *BiBos Preprint, No.* **406** (1989).

[R-R] A. P. Robertson & W. Robertson, "Topological vector spaces", *Cambridge Tracts in Math. & Math. Phys., No.* **53** (1964).

[S] I. E. Segal, Tensor algebra over Hilbert spaces, *Trans Amer. Math. Soc., Vol.* **81** (1956), 106-134.

[山] 山崎 泰郎, "無限次元空間の測度 (上)", 紀ノ国屋数学叢書 13-A, 紀ノ国屋書店 (1978).

[Yo] Y. Yokoi, Positive generalized white noise functionals, *Hiroshima Math. J., Vol.* **20** (1990), 137-157.