数理解析研究所講究録
第887巻 1994年 180-190

ベクトル場のなす Lie 環の自然表現とそのテンソル積表現について

京大 総合人間学部　西山 享 (Kyo NISHIYAMA)

1　ベクトル場のなす Lie 環と自然表現

K を標数 0 の任意の体とし、affine 空間 K^n 上の座標関数を係数に持つ大域的なベクトル場の全体を W_n と書く。W_n は通常の括弧積について閉じており、無限次元の Lie 環となる。一般に代数多様体 (あるいは解析的多様体) M 上の大域的なベクトル場の全体も同様に考えることができる[1] が、この affine 空間の場合には W_n は極めて簡単な構造を持っており、座標で書き表すならばそれは多項式係数の一次の微分作用素の全体にほかならない。

$$W_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(z_1, \cdots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i} \,\middle|\, f_i(z) \in K[z_1, \cdots, z_n] \right\}$$

この W_n は一般に Cartan 型の Lie 環と呼ばれる 4 つの系列の単純な無限次元 Lie 環の一系列を占めている。Cartan 型の Lie 環は Mathieu によって分類された有限な Gelfand-Kirillov 次元を持つ $\mathbb{Z}$-次数付けられた単純な Lie 環のうち重要な一角を占める。実際そのような Lie 環は

(1)　有限次元単純 Lie 環か
(2)　loop 代数 (= affine 型 Kac-Moody Lie 環 / 中心) か
(3)　Witt 代数 (= Virasoro 代数 / 中心) か
(4)　Cartan 型の Lie 環

しかないのである ([5])。

---

[1] 例えば複素射影多様体上の正則ベクトル場は有限次元である。したがってこの場合は有限次元の Lie 環になる。

複素一次元射影空間 $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で考えて見よう。すぐにわかるように $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の正則ベクトル場は代数的であり、3 次元ある。その基底を $\{X, H, Y\}$ と書いておくと、$\mathbb{C}$ を含む affine piece 上ではそれぞれ

$$X = z^2 \frac{d}{dz}, \quad H = 2z \frac{d}{dz}, \quad Y = -\frac{d}{dz}$$

と表すことができる。このとき

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

が成立し、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の正則ベクトル場は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ と同型であることがわかる。実はこの表現は $SL_2(\mathbb{C})$ の旗多様体を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と思ったとき、$SL_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への作用の微分にほかならない。

さて W_n は自然に $M=K^n$ の座標函数環、すなわち n 変数多項式環に一次の微分作用素として作用する。我々は、

$$V=K^n, \quad P(V)=(V \text{ 上の多項式環})=K[z_1,\cdots,z_n]$$

と書いて W_n の $P(V)$ 上の表現を ψ で表す。この表現 $(\psi,P(V))$ を W_n の自然表現と呼ぼう。

Weyl の古典的な相互律では $GL_n(K)=GL(V)$ の V 上の自然表現をとると、$GL(V)$ の $\otimes^m V$ への作用とテンソル積の各成分への m 次対称群 $\mathfrak{S}_m$ の作用とが互いに可換になり、

$$\otimes^m V \simeq \bigoplus_{\lambda\in Y_m} \tau_\lambda\otimes\sigma_\lambda \qquad (\tau_\lambda\in GL(V)^\wedge, \sigma_\lambda\in\mathfrak{S}_m^\wedge)$$

と分解されるのであった。ここに Y_m は深さが n 以下、箱の数が丁度 m 個の Young 図形の全体であり、$\tau_\lambda,\sigma_\lambda$ は $\lambda\in Y_m$ からしかるべき方法によって構成される $GL(V),\mathfrak{S}_m$ の既約表現である ([7] あるいは [2]、[3] などを参照)。このようにして $GL(V)$ の (有限次元) 既約多項式表現と $\mathfrak{S}_m$ の既約表現は互いに互いを規定し、それが表現の分類をも与える。

同様のことを W_n とその自然表現 $(\psi,P(V))$ について考えるとどうなるか？という問題をこの論説では考えてみたい。

まず $(\psi,P(V))$ の m 階のテンソル積 $(\psi^{\otimes m},\otimes^m P(V))$ を考えよう。$U=K^m$ とおくと明らかに $\otimes^m P(V)\simeq P(V\otimes U)$ である。つまり $\otimes^m P(V)$ は $n\times m$ 変数の多項式環にほかならない。第 j 成分が $f(z_1,\cdots,z_n)\in P(V)$ で他が全て 1 のテンソル積を

$$\varepsilon_j f(z_1,\cdots,z_n)=1\otimes\cdots\otimes \overset{j}{\smile}{f(z)}\otimes\cdots\otimes 1\in\otimes^m P(V)$$

と書けば、

$$\begin{array}{ccc}\otimes^m P(V) & \xrightarrow{\sim} & P(V\otimes U)=K[z_{i,j}\mid 1\le i\le n, 1\le j\le m]\\ \Cup & & \Cup\\ \varepsilon_j f(z) & \longmapsto & f(z_{1,j},\cdots,z_{n,j})\end{array}$$

がその同型を与える。この記号の下に W_n の作用 $\psi^{\otimes m}$ は

$$\psi^{\otimes m}\left(f(z_1,\cdots,z_n)\frac{\partial}{\partial z_i}\right)=\sum_{j=1}^m f(z_{1,j},\cdots,z_{n,j})\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}$$

で与えられることは容易にわかるであろう。

我々はこの時 $\psi^{\otimes m}(W_n)$ と可換になるような“代数的対象”を見つけ、その表現論を展開しようというのである。残念ながら現在のところ“代数的対象”がその容姿を顕

してきた、という段階でまだその表現論を論じるには至っていない。したがってこの論説では $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環の構造を主に問題とする。そのためまず W_n の展開環を $U(W_n)$ とするとき $\psi^{\otimes m}(U(W_n))$ の形について述べておこう。

補題 1.1 $U(W_n)$ を W_n の展開環とする。また $\mathcal{A}(V\otimes U)$ で $V\otimes U$ 上の多項式係数の微分作用素全体のなす環 (= Weyl 代数) を表す。このとき $\psi^{\otimes m}(U(W_n))\subset\mathcal{A}(V\otimes U)$ は次の形の作用素により K 上の線型空間として生成される。
$1\le a_1,\cdots,a_k\le n$ を添字、$\{f_i(z_1,\cdots,z_n)|\ 1\le i\le k\}$ を k 個の n 変数多項式、$f_i(z(\alpha))=f_i(z_{1,\alpha},\cdots,z_{n,\alpha})$ と書けば、その作用素は

$$\sum_{1\le\alpha_1,\cdots,\alpha_k\le m} f_1(z(\alpha_1))\cdots f_k(z(\alpha_k))\frac{\partial^k}{\partial z_{a_1,\alpha_1}\cdots\partial z_{a_k,\alpha_k}}$$

で与えられる。

さて、我々の目標は W_n の可換子環を求めることであるが、その可換子環をどの範囲で求めるか？という問題が生ずる。例えば W_n の m 階のテンソル積は上のようにして自然に $P(V\otimes U)$ に働き、この作用によって $W_{n\times m}$ への自然な埋め込み写像が得られる。テンソル積の空間が有限次元であれば、この表現はほとんど既約である[2]から、$W_{n\times m}$ の自然表現による展開環の像の中だけで可換子環を考えればよい。つまり有限次元空間上の既約表現ならばその表現の作用素の一次結合で任意の線型作用素が表せるからである (Wedderburn の定理)。
しかし今は自然表現は無限次元表現であるから例えそれが既約であったとしても表現の作用素の極限のようなものを考えなければ十分ではないかもしれない。実際十分でないことは次の定理とその後の説明をみればわかるであろう。

定理 1.2 $\mathcal{A}(V\otimes U)$ を $n\times m$ 変数の Weyl 代数とする。このとき $\mathcal{A}(V\otimes U)$ の中での $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環は自明である、つまり定数作用素しかない。
とくに $\Psi(U(W_{n\times m}))$ における $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環も自明である。ここに $(\Psi, P(V\otimes U))$ は $W_{n\times m}$ の自然表現である。

Remark. Cartan 型 Lie 環 W_n の展開環の中心は自明であることがよく知られている。また W_n の自然表現は W_n の表現としては忠実であるが、展開環 $U(W_n)$ の表現としては忠実ではないことに注意しておく。

このように微分作用素のなす環 $\mathcal{A}(K^{n\times m})\simeq\Gamma_{alg}(K^{n\times m},\mathcal{D})$ の中で $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環を求めると自明になってしまう。しかし End $P(V\otimes U)$ の中では $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環は自明ではない。

[2]定数函数だけという不変部分空間のみを持つ。

例えば $P(V\otimes U)\simeq\otimes^m P(V)$ への対称群 $\mathfrak{S}_m$ の作用(テンソル積の各成分の入れ替えとして働くもの)は明らかに $\psi^{\otimes m}(W_n)$ と可換である。しかし実はそれ以上に豊富な構造が可換子環にはある。まずそれを説明しておこう。
自然数 m に対して $[m]=\{1,2,\cdots,m\}$ とおき、$\mathfrak{M}_m=\{\varphi:[m]\to[m]\}$ を $[m]$ からそれ自身への(全単射とは限らない)写像の全体とする。$\mathfrak{M}_m$ は写像の合成を積として $\mathfrak{S}_m$ を含む単位的半群となる。仮にここでは $\mathfrak{M}_m$ を $[m]$ の写像半群と呼ぼう。このとき $\varphi\in\mathfrak{M}_m$ を $P(V\otimes U)$ に

$$(\varphi f)(z_{i,j})=f(z_{i,\varphi(j)})\qquad(f\in P(V\otimes U))$$

で作用させる。簡単な計算によって φ は $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の作用と可換であることがわかる。以上をまとめておこう。

補題 1.3 $[m]$ の写像半群 $\mathfrak{M}_m$ の(半)群環を $K[\mathfrak{M}_m]$ 、End $P(V\otimes U)$ における $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環を $\mathfrak{C}_m$ と書くと、

$$K[\mathfrak{M}_m]\subset\mathfrak{C}_m$$

が成り立つ。したがって $\dim\mathfrak{C}_m\geq m^m$ である。

2　W_n の可換子環 ($m\leq n$ のとき)

テンソル積の階数 m が Lie 環 W_n の階数 n 以下のときには可換子環 $\mathfrak{C}_m$ は実は §1 で触れたもので尽くされることがわかる。

定理 2.1 $K[\mathfrak{M}_m]$ を $[m]$ の写像半群 $\mathfrak{M}_m$ の群環とする。また $(\psi,P(V))$ を W_n の自然表現、$(\psi^{\otimes m},P(V\otimes U))$ をその m 階のテンソル積表現とする。
(1) $m\leq n$ ならば End $P(V\otimes U)$ における $\psi^{\otimes m}(W_n)$ の可換子環 $\mathfrak{C}_m$ は $K[\mathfrak{M}_m]$ に一致する。

$$K[\mathfrak{M}_m]=\mathfrak{C}_m,\qquad\dim\mathfrak{C}_m=m^m$$

(2) $m\leq n$ とする。$X\in\mathcal{A}(V\otimes U)$ を多項式係数の微分作用素で微分の次数が m 以下のものとする。このとき X が $K[\mathfrak{M}_m]$ と可換であることと $X\in\psi^{\otimes m}(U(W_n))$ となることは同値である(補題 1.3 参照)。

証明の概略　この定理の証明のうち (1) は比較的簡単でしかも後の議論にも影響するのでここで証明の概略を述べておこう。
証明の本質的な部分は表現 $(\psi^{\otimes m},P(V\otimes U))$ が cyclic な表現であることの証明である。実際

$$v(z)=\prod_{i=1}^{m}z_{i,i}\in P(V\otimes U)$$

が cyclic 元になることを示そう。もし $m > n$ であればこのような元は構成できないことに注意しておく。
$\{f_i| \ 1 \leq i \leq m\}$ を n 変数の多項式として $X(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ を

$$X(f_1, f_2, \cdots, f_m) = \sum_{1 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_m \leq m} f_1(z(\alpha_1))) \cdots f_m(z(\alpha_m)) \frac{\partial^m}{\partial z_{1,\alpha_1} \cdots \partial z_{m,\alpha_m}}$$

で決める。補題 1.1 により $X(f_1, f_2, \cdots, f_m) \in \psi^{\otimes m}(U(W_n))$ がわかる。このとき

$$X(f_1, f_2, \cdots, f_m)v(z) = f_1(z(1))f_2(z(2)) \cdots f_m(z(m))$$

$$(z(j) = (z_{1,j}, z_{2,j}, \cdots, z_{n,j}))$$

であってもちろん右辺の形の元で $P(V \otimes U)$ はベクトル空間として生成されるので、$v(z)$ が cyclic 元であることがわかる。
$v(z)$ は cyclic なので $E \in \mathfrak{C}_m$ は $v(z)$ の像 $Ev(z)$ さえ決まれば決まる。ところが $\psi^{\otimes m}(W_n)$ は Euler 型の作用素

$$\sum_{j=1}^{m} z_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

を含むのでこれと E が可換なことから $Ev(z)$ は $z(1), \cdots, z(m)$ の一次式であることがわかる。次元を比較して

$$\dim \mathfrak{C}_m \leq m^m$$

であるが、補題 1.3 により逆向きの不等式も成り立つので (1) がわかる。
(2) の証明も難しくはないが、記号が煩雑であるので割愛する。しかし途中で現れる半群の軌道空間についての考察は面白いと思う。興味ある方は今準備中の論文 [6] を参照されたい。 ∎

上の定理は次の意味で best possible である。まず第一に $m > n$ のときにはこの定理は成立しない。例えば $(n, m) = (1, 2)$ のときには

$$K[\mathfrak{M}_m] \subsetneqq \mathfrak{C}_m$$

である。この事を簡単に見てみよう。この場合は

$$W_1 = \left\{ z^k \frac{d}{dz} \middle| \ k \geq 0 \right\}$$

が二変数多項式環 $K[x, y]$ に次のように作用していることになる。

$$\psi^{\otimes 2}\left(z^k \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y) = x^k \frac{\partial f}{\partial x} + y^k \frac{\partial f}{\partial y}.$$

この時、後に系 4.3 で述べるように $K[x,y]$ の W_1 加群としての生成元として $\{1,x,y,xy,xy(x-y)\}$ がとれる。簡単な計算によって実はこのうち $\{xy,xy(x-y)\}$ だけで生成元として十分であることはすぐにわかる。したがって定理 2.1 の証明でも述べたように可換子環 $\mathfrak{C}_2$ の元 $E\in\mathfrak{C}_2$ を決定するためには

$$E(xy),\qquad E\left(xy(x-y)\right)$$

の二つの像を決定すれば十分である。また Euler 作用素

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\in\psi^{\otimes 2}(W_1)$$

と E との可換性から $E(xy)$ は (x,y) の 2 次式、$E(xy(x-y))$ は (x,y) の 3 次式でなければならない。$u=xy, v=xy(x-y)$ とおく。また

$$D_k=x^k\frac{\partial}{\partial x}+y^k\frac{\partial}{\partial y}=\psi^{\otimes 2}\left(z^k\frac{d}{dz}\right)$$

と書き、 $k=0$ のときは $D=D_0$ と記すことにする。すると、計算により

$$D_2D^2v=2Dv=2(x^2-y^2)$$

となるので Ev も同じ微分方程式

$$D_2D^2\left(Ev\right)=2D\left(Ev\right)$$

を満たさねばならない。v を $(x+y)$ および $(x-y)$ の多項式として表して上の方程式に代入すると結局

$$Ev=E\left(xy(x-y)\right)=a(x-y)^3+b(x-y)(x+y)^2$$

の形になることがわかる。一方 Eu は二次式なので

$$Eu=cx^2+dxy+ey^2$$

でなければならない。したがって $E\in\mathfrak{C}_2$ の自由度はせいぜい 5 であって、

$$2^2=4\le\dim\mathfrak{C}_2\le 5$$

となることがわかる。さて E_0 を

$$E_0(x^ky^l)=\frac{lx^{k+l}+ky^{k+l}}{k+l}\qquad(k,l\ge 0,k+l>0),\qquad E_0(1)=1.$$

で定めると $E_0\in\mathfrak{C}_2$ であるが、 $E_0\notin K[\mathfrak{M}_2]$ となることが計算により示される。したがってこの E_0 を用いて

$$\dim\mathfrak{C}_2=5,\qquad\mathfrak{C}_2=K[\mathfrak{M}_2]\oplus KE_0$$

となる。これは定理 2.1 が $m > n$ では成立しないことも示している。
第二に定理の (2) において X の微分の次数が m より真に大きいときには (2) は成立しない。実際 $m = n = 2$ であって

$$X = (z_{1,1} - z_{1,2})\frac{\partial^2}{\partial z_{1,1}^2}\frac{\partial}{\partial z_{1,2}} + (z_{1,2} - z_{1,1})\frac{\partial}{\partial z_{1,1}}\frac{\partial^2}{\partial z_{1,2}^2}.$$

とおくと、X は $K[\mathfrak{M}_2]$ とは可換であるが、$X \notin \psi^{\otimes 2}(U(W_2))$ である。

以上のことから m が n に比して大なるときには可換子環 $\mathfrak{C}_m$ の構造は複雑であることがわかる。また再可換子環についても議論の余地があるようである。

3 W_n の可換子環の有限次元性

$m > n$ のとき W_n の可換子環 $\mathfrak{C}_m$ の構造は簡単にはわからない。実際 $(n, m) = (1, 2)$ という一番簡単な場合[3]でも前節で見たようにその構造は複雑であった。
そこでこの節では構造は別にして可換子環 $\mathfrak{C}_m$ が一般に有限次元になることを示そう。その証明の過程でよく知られている調和多項式と類似の多項式 (ここでは Cartan 型の調和多項式と呼ぶ) が自然と現れる (§4 参照)。まず準備から始めよう。
§2 でもやったように $\mathfrak{C}_m$ の元は W_n 加群 $P(V \otimes U)$ の生成元の像によって決まる。つまり次の補題が成立している。

補題 3.1 $\mathfrak{C}_m$ の次元が有限であることと W_n 加群 $P(V \otimes U)$ が有限生成であることとは同値である。

さて W_n には微分作用素の係数多項式の次数による自然な $\mathbb{Z}$ 次数付けがある。つまり

$$W_n(k) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} \,\middle|\, \deg f_i(z_1, \cdots, z_n) = k + 1 \right\} \qquad (k \geq -1)$$

とおけば $W_n = \oplus_{k=-1}^{\infty} W_n(k)$ は次数付環となる。我々は

$$\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_n(k), \qquad \mathfrak{n}_- = W_n(-1)$$

とおく。下に有界な次数付 W_n 加群 $M = \oplus_{k>>-\infty} M(k)$ が与えられたとしよう。自然表現は多項式の次数による自然な次数付けをすることにより下に有界な次数付 W_n 加群である。一般に M に対して次の命題が成立する。

[3] $n = 1$ の場合は W_n の構造が特別なので「一番簡単」というのは適当ではないかもしれない。

命題 3.2 次数付 W_n 加群 $M = \oplus_{k>>-\infty} M(k)$ が $\dim M(k) < \infty$ を満たすとする。このとき次の (1)–(3) は同値である。

(1) M は W_n 加群として有限生成である。

(2) M は $\mathfrak{n}$ 加群として有限生成である。

(3) M に係数をとる $\mathfrak{n}$ の 0 次のホモロジー群 $H_0(\mathfrak{n}, M)$ は有限次元である。

もし $n \geq 2$ ならば更に次の (4), (5) も (1)–(3) と同値になる。

(4) $\dim M/W_n(1)M < \infty$

(5) 十分大なる k に対して $M(k+1) = W_n(1)M(k)$ が成立する。

証明は $H_0(\mathfrak{n}, M) \simeq M/\mathfrak{n}M$ であることを用いればやさしいので省略する。また (4), (5) については $n \geq 2$ ならば $\mathfrak{n}$ が $W_n(1)$ によって生成されることを用いる。 ▮

上の補題 3.1 及び命題 3.2 により $\mathfrak{C}_m$ が有限次元かどうかは $P(V \otimes U)$ が $\mathfrak{n}$ 加群として有限生成かどうか、すなわち $H_0(\mathfrak{n}, P(V \otimes U))$ が有限次元かどうかに帰着する。更にこのホモロジーの有限性の計算は $n = 1$ のときに帰着する。それを説明しよう。まず W_1 の n 個の直和 $W_1^{\oplus n}$ は次のように W_n に対角的に埋め込まれる。

$$
\begin{array}{ccc}
W_1^{\oplus n} & \longrightarrow & W_n \\
\Cup & & \Cup \\
\left(z^{k_1}\dfrac{d}{dz}, \cdots, z^{k_n}\dfrac{d}{dz}\right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i^{k_i}\frac{\partial}{\partial z_i}
\end{array}
$$

この埋め込みによって、$W_1^{\oplus n}$ の作用で $P(V \otimes U)$ が有限生成ならば W_n に関しても明らかに有限生成であるが、そのためには結局 W_1 の自然表現 $(\psi, K[z])$ の m 階のテンソル積 $(\psi^{\otimes m}, \otimes^m K[z])$ が W_1 加群として有限生成であればよいことがわかる。これまでの記号と区別するために $\otimes^m K[z] \simeq K[x_1, \cdots, x_m]$ と書こう。すると W_1 は $K[x_1, \cdots, x_m]$ に

$$
\psi^{\otimes m}\left(z^k \frac{d}{dz}\right) f(x) = \sum_{j=1} x_j^k \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \qquad (f(x) \in K[x_1, \cdots, x_m])
$$

で作用する。この作用の下で $\mathfrak{n} = \oplus_{k=1}^{\infty} W_1(k)$ と書くとき $H_0(\mathfrak{n}, K[x_1, \cdots, x_m])$ が有限次元であることが示されればよい。それがわかれば一般の n について次の定理が示されたことになる。

定理 3.3 W_n の End $P(V \otimes U)$ における可換子環 $\mathfrak{C}_m$ は有限次元である。

そこで以下 $n = 1$ のとき $H_0(\mathfrak{n}, K[x_1, \cdots, x_m])$ を具体的に求めることを考えよう。

4 Cartan 型の調和多項式

W_n の作用は $\mathbb{Q}$ 上定義されているから $K=\mathbb{C}$ としてよい。そこで以下 $K=\mathbb{C}$ として話をする。

定義 4.1 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ を m 変数多項式とする。$f(x)$ が Cartan 型の調和多項式であるとは、$f(x)$ が次の偏微分方程式系を満たすときにいう。

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f(x) = 0 \qquad (k \geq 2) \tag{4.1}$$

Cartan 型調和多項式全体のなす $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ の部分空間を $\mathcal{H}=\mathcal{H}_m$ と書く。

さて、上の偏微分方程式系はホロノミー系であるので、局所正則解の次元は有限次元である ([4]) 。従って多項式解も有限次元、つまり $\dim \mathcal{H}_m < \infty$ となることがすぐにわかる。見ればすぐにわかるようにこの偏微分方程式系は $\mathfrak{n} \subset W_1$ の作用の Fourier 変換像であって、次の定理が成立する。

定理 4.2 $H_0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]) \simeq \mathcal{H}_m$ が成り立つ。したがってホモロジー群 $H_0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m])$ は有限次元、$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ は W_1 加群として有限生成である。

証明は Fourier 変換の理論を知っていればやさしい。まず $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ に次のようにして正定値な内積を導入する。$f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ に対して

$$(f(x), g(x)) = f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \overline{g(x)}\bigg|_{x=0}$$

この内積は Fock 内積であって次の関係式は容易に確かめられるであろう。

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), g(x)\right) = \left(f(x), \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} g(x)\right).$$

このことから $\mathcal{I} = \psi^{\otimes m}(\mathfrak{n})\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ とおくと

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m] = \mathcal{H}_m \oplus \mathcal{I}$$

が成立する ($\oplus$ は内積 $(\cdot,\cdot)$ についての直交和) 。実際 $\mathcal{I}$ に対する直交補空間が $\mathcal{H}_m$ になっていることは $\mathcal{H}_m$ の定義であると言ってもよい。したがって

$$H_0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]) \simeq \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]/\mathcal{I} \simeq \mathcal{H}_m$$

が成立する。(cf. [1, Chapter III]). ∎

さらに $\mathcal{H}_m$ は $\mathfrak{n}$ 加群 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ の極小生成系になっていることもこの定理の証明からわかる。

系 4.3 m 変数の Cartan 型調和多項式の空間を $\mathcal{H}_m$ とすると次が成り立つ。
(1) $\mathcal{H}_m$ は $\mathfrak{n}$ 加群 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ の極小な生成系である。すなわち $\mathcal{J}$ を $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ を生成する部分空間とすれば $\mathcal{J}\to\mathcal{H}_m$ となるような自然な全射が存在する。
(2) $\mathcal{H}_m$ は W_1 加群 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ を生成する。

通常の調和多項式の理論では調和多項式は全て差積の微分として得られ、しかも $\mathfrak{S}_m$ の正則表現を実現している。特にその次元は $m!$ となる (cf. [1, Chapter III]) 。
これに比して Cartan 型の調和多項式についてはまだあまり多くのことはわかっていない。$\mathcal{H}_m$ は対称群 $\mathfrak{S}_m$ の作用では不変であるが、$\mathcal{H}_m$ を $\mathfrak{S}_m$ の表現として既約分解することも今後の課題である[4]。
Cartan 型調和多項式の例としては次のものがあげられる。

補題 4.4 次の多項式 $u(x)$ は Cartan 型調和多項式である。

$$u(x)=\prod_{i=1}^{m}x_i\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1}\end{vmatrix}\in\mathcal{H}_m$$

予想 4.5 $\mathcal{H}_m$ の最高次数の多項式は定数倍を除いて $u(x)$ に一致する。

最後に $m=2,3$ のときの Cartan 型調和多項式の表を掲げておく。また $m=4$ については煩雑な式になるので各次数の調和多項式の次元のみを掲げる[5]。

◇ 2 変数 Cartan 型調和多項式 $\mathcal{H}_2$: $\dim\mathcal{H}_2=5$

degree	dim	polynomials
0	1	1
1	2	$x_1,\ x_2$
2	1	x_1x_2
3	1	$(x_1-x_2)x_1x_2$

[4]残念ながら $\mathcal{H}_m$ は $\mathfrak{C}_m$ によって不変ではない。
[5]計算には MapleV を使用した。

◇ 3 変数 Cartan 型調和多項式 $\mathcal{H}_3$: $\dim \mathcal{H}_3 = 16$

degree	dim	polynomials
0	1	1
1	3	$x_1,\ x_2,\ x_3$
2	3	$x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3$
3	4	$(x_1 - x_2)\,x_1x_2,\ (x_1 - x_3)\,x_1x_3,\ (x_2 - x_3)\,x_2x_3,\ x_1x_2x_3$
4	2	$(x_1 - x_2)\,x_1x_2x_3,\ (x_1 - x_3)\,x_1x_2x_3$
5	2	$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3\,x_3)\,x_1x_2x_3,$
		$(x_1 - x_3)(x_1 - 3\,x_2 + x_3)\,x_1x_2x_3$
6	1	$(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)\,x_1x_2x_3$

◇ 4 変数 Cartan 型調和多項式 $\mathcal{H}_4$: $\dim \mathcal{H}_4 = 65$

degree	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dim	1	4	6	10	9	11	9	6	5	3	1

References.

[1] S. Helgason. *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.* Academic Press, 1984.

[2] 岩堀 長慶. 対称群と一般線型群の表現論. 岩波基礎数学, 岩波書店 1978.

[3] 彌永 昌吉・杉浦 光夫. 応用数学者のための代数学. 岩波書店 1960.

[4] M. Kashiwara. *Systems of microdifferential equations.* Progress in Math. **34**, Birkhäuser, 1983.

[5] O. Mathieu. Classification of simple graded Lie algebras of finite growth. *Invent. Math.* **108**(1992), 455 – 519.

[6] K. Nishiyama. Commutant algebra and harmonic polynomials of a Lie algebra of vector fields. preprint.

[7] H. Weyl. *The classical groups.* Princeton Univ. Press, 1946.