数理解析研究所講究録
第 887 巻 1994 年 191-215



# 群の表現と準不変測度

東大 理　平井 武 (Takeshi HIRAI)

序. 測度空間 $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mu)$ に群 $G$ が準不変に作用している, 即ち, 密度 $\dfrac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}$ が $\forall g \in G$ に対して存在しているとする。そのとき空間 $L^2(\mathfrak{X}, \mu)$ 上に $G$ のユニタリ表現が

$$(0.1) \qquad T_g^{\alpha} f(x) = \alpha(g, x) \sqrt{\frac{d\mu(g^{-1}x)}{d\mu(x)}}\, f(g^{-1}x) \qquad (x \in \mathfrak{X})$$

として構成できる。ここに, $\alpha(g, x)$ は $G \times \mathfrak{X}$ 上の函数で

$$(0.2) \begin{cases} |\alpha(g, x)| = 1, \quad \alpha(g, \cdot) \text{ は } \mathfrak{X} \text{ 上で可測}, \\ \alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, x)\, \alpha(g_2, g_1^{-1}x) \end{cases} \quad \text{[コホモロジー条件]}$$

を満たしていて, multiplier と呼ばれる。

群 $G$ が位相群であるときには, 対応 $G \ni g \mapsto T_g^{\alpha}$ に強連続性を要求するので, $G$ の $\mathfrak{X}$ への作用について何程かの付加条件が必要となる。また可測函数 $\beta(x)$ により, $\alpha$ を

$$(0.3) \qquad \alpha_1(g, x) = \beta(x)\, \alpha(g, x)\, \beta(g^{-1}x)^{-1}$$

と変換すれば, 表現 $T^{\alpha}$ と $T^{\alpha_1}$ は ユニタリ作用素

$M_\rho f(x) = \rho(x) f(x)$, により同値である。表現 $T^\alpha$ の既約性には、$\mu$ が $G$-ergodic である（定義は[23, p.58]）ことが必要であるが、十分ではない。例えば、$G$ 局所コンパクト、$H$ を $G$ の閉部分群、$\mu$ を $X = G/H$ 上の自然な $G$-準不変測度、とすると、$\alpha \equiv 1$ とした表現 $T^\alpha$ は $X$ 上の準正則表現であり、その既約分解（= Plancherel 公式）は我々の主要な問題のうちの1つである。しかしながら ergodicity が既約性や因子環性と密接に関連していることは疑問の余地がない。最近尾畑氏に教示いただいた[1]は、私が[8]で $\mathfrak{S}_\infty$ の既約表現を構成した手法のさらなる拡張を与えてくれる手掛りとなる。

以上の一般的状況において、$G$ や $X$ を特殊化することにより、様々な問題との関連が生じ、我々は、準不変測度の重要性については皆同意する。しかしこの小論では、むしろ「群の表現」という観点に重心を移して、その分野で「測度」の占める位置について、事あらためて検討してみることとする。「測度がなければ何も出来ないのか？」「測度以前にできることは何か？」といった卑近な問題意識であるが、非局所コンパクト群 $\mathrm{Diff}_0(M)$（= 多様体 $M$ 上のコンパクト台を持つ diffeomorphism 全体）や非I型群 $\mathfrak{S}_\infty$（= $\mathbb{N}$ 上の有限置換全体よりなる無限対称群）などを頭に置いての議論

である。表現論の曙期にまでさかのぼって，反省してみることにより将来の指針とする意図である。全体の構成は次の通り。

§1. 測度以前：群上の正定値関数，正定値類関数，
　　球関数，不変正定値内積

§2. 測度以後：誘導表現の手法，因子表現と測
　　度論的力学系，"dual pair"の手法

§3. $\mathrm{Diff}_0(M)$ と $\mathfrak{S}_\infty$：
　　順序付配位空間と配位空間，
　　閉集合のなす空間上に測度を構成する試み

## §1. 測度以前

この§のタイトルは，「測度が無くても出来ることは何か？」と解していただき度い

### 1.1. 群上の正定値関数[4]

群 $G$ 上の関数 $\varphi(g)$ が正定値であるとは，有限個の $g_1, g_2, \cdots, g_n \in G$ と $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ に対し，

(1.1) $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(g_i^{-1} g_j)\, c_i \bar{c}_j \geqq 0$$

となることである。位相群 $G$ のユニタリ表現 $(T_g, \mathfrak{H})$ に対し，$v \in \mathfrak{H}$，$\neq 0$，をとれば

(1.2) $$\varphi(g) = \langle T_g v, v \rangle$$

は（表現 $T$ に付随する）連続正定値関数である。

逆に連続正定値函数φをとる。$\mathbb{C}[G]$をGの代数的群環とするとき、$\xi=\sum_{g\in G}\xi_g\cdot g\in\mathbb{C}[G]$, $\xi_g\in\mathbb{C}$, に対し、

(1.3) $\langle\xi,\xi\rangle_\varphi \equiv \sum_{g,h\in G}\varphi(g^{-1}h)\xi_g\overline{\xi_h}$

とおく。この内積の核を$J_\varphi$とし、$\mathbb{C}[G]/J_\varphi$を完備化してHilbert空間$\mathfrak{H}_\varphi$を作る。その上にGの表現

(1.4) $U^\varphi_{g_0}\xi \equiv \sum_{g\in G}\xi_g\cdot g_0 g$ (左移動)

が出来る。ここでベクトル$\xi_0=1\cdot e$ ($e$はGの単位元)をとると

(1.5) $\langle U^\varphi_{g_0}\xi,\xi\rangle_\varphi = \varphi(g_0)$

となる。

表現Tに付随する正定値函数全体$P(T)$はTの行列要素の"対角成分"達であるが、それらの$\mathbb{C}$上の一次結合全体$\langle P(T)\rangle$をとると、Tの全ての行列要素が出て来る。

定義1.1. $\varphi,\psi$を2つの正定値函数とすると、$\psi\leqq\varphi$とは、$\varphi-\psi$がまた正定値であることである。$M(\varphi)\equiv\{\psi$ 正定値; $\exists\lambda\geqq0$ s.t. $\psi\leqq\lambda\varphi\}$とおく。$\varphi$がindecomposableであるとは、$\forall\psi\in M(\varphi)$, $\exists\lambda\geqq0$ s.t. $\psi=\lambda\varphi$, となること。

定理1.2. Hilbert空間$\mathfrak{H}_\varphi$において、$\forall\psi\in M(\varphi)$に対し、

(1.6) $\langle A_\psi\xi,\xi\rangle_\varphi = \sum_{g,h\in G}\psi(g^{-1}h)\xi_g\overline{\xi_h}$

となる正定値エルミート作用素が存在する。$A_\psi$は表現$U^\varphi_g$と可換である: $A_\psi U^\varphi_g = U^\varphi_g A_\psi$. また、対応$M(\varphi)\ni\psi\mapsto A_\psi$, はかかるエルミート作用素全体の上への1-1対応である。

系1.3. 表現 $(U^{\varphi}, \mathfrak{H}_{\varphi})$ が既約であるための必十条件は $\varphi$ が indecomposable であることである。

以下では、Gは局所コンパクト、とく仮定する。Gの左Haar測度を $dg$ と書く。$L^1(G, dg)$ に積と*-作用を

$$(1.7)\quad \begin{cases} (f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h^{-1}g) f_2(h)\, dh, \\ f^*(g) = \Delta(g)^{-1}\overline{f(g^{-1})}, \qquad \Delta(g) = \dfrac{d(hg)}{dh} \end{cases}$$

と入れる。$L^1(G)$ 上の線形汎函数は $\psi \in L^\infty(G)$ により $L_\psi f = \int_G f(g)\psi(g)\, dg$ と表わされる。

定理1.4. 汎函数 $L_\psi$ が正定値である(i.e. $L_\psi(f * f^*) \geq 0, \forall f \in L^1(G)$)とき、$\psi$ は連続な正定値函数とほとんど到る処に等しい。

この定理により、連続正定値函数の凸集合 $\{\varphi \leq 1\}$ が弱コンパクトとなる。Krein-Milman の端点定理、および、$\varphi = \chi_W * (\chi_W)^*$, $\chi_W$ は $e$ のコンパクト近傍 $W$ の特性函数、が正定値である、ことにより次が得られた。

定理1.5. 局所コンパクト群Gは、十分多くの既約ユニタリ表現を持つ。

## 1.2. 正定値類函数([19], [20])

函数 $\varphi$ が類函数であるとは、$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)\ (g, h \in G)$ と内部自己同型で不変なことである。連続正定値類函数

の全体を $L^+(G)$ と書く。今 $G$ を離散群とする。

$\forall \varphi \in L^+(G)$ に対し，1.1 と同様に，$\mathfrak{A} = \mathbb{C}[G]$ 上に内積 $\langle f_1, f_2 \rangle_\varphi$ を入れる。$\varphi$ が類函数であるから，内積は，$\langle U_g^\varphi f_1, f_2 \rangle_\varphi = \langle f_1, U_{g^{-1}}^\varphi f_2 \rangle_\varphi$ の他に次を満たす。

(1.8) $\langle f_1, f_2 \rangle_\varphi = \langle f_1^*, f_2^* \rangle_\varphi$，$\langle V_g^\varphi f_1, f_2 \rangle_\varphi = \langle f_1, V_{g^{-1}}^\varphi f_2 \rangle_\varphi$，

但し，$V_g^\varphi$ は $g^{-1}$ による右移動である。従って内積の核 $J_\varphi$ は $*$-不変な両側イデアルであり，$\mathfrak{A}_\varphi \equiv \mathfrak{A}/J_\varphi$ は $*$-環である。Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ 上に $\mathfrak{A}_\varphi$ の表現 $U^\varphi$，逆表現 $V^\varphi$ を $f_1 \mapsto f * f_1$，$f_1 \mapsto f_1 * f$，によって定義する。それらが生成する $\mathfrak{H}_\varphi$ 上の von Neumann 環をそれぞれ $\mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi)$，$\mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)$ と書くと，

$\mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi)' = \mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)$，$\mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)' = \mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi)$，

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_\varphi) \equiv \mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi) \cap \mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)$ は共通の中心，

となる。さらに，$\langle f_1, f_2 \rangle_\varphi$ を $f_1 * f_2^*$ の函数ととらえれば，それは $\mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi)$，$\mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)$ の faithful trace を与える。従ってこれらは有限 von Neumann 環である。

$M^0(\varphi) \equiv M(\varphi) \cap L^+(G)$，とおくとき，$\varphi$ が <u>indecomposable</u> であるとは，$\forall \psi \in M^0(\varphi)$，$\exists \lambda \geq 0$ s.t. $\psi = \lambda \varphi$，となることとする。

$\forall \psi \in M^0(\varphi)$ に対し，$\mathfrak{H}_\varphi$ 上の正定値 Hermite 作用素 $A_\psi$ で $*$-作用 $I_\varphi : f \mapsto f^*$，と可換なものがあって

(1.9) $\langle A_\psi f_1, f_2 \rangle_\varphi = \langle f_1, f_2 \rangle_\psi \qquad (f_1, f_2 \in \mathfrak{A})$

となる。この $A_\psi$ は $\mathfrak{Z}_+(\mathfrak{A}_\varphi) \equiv \{A \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_\varphi) ;\ A \geq 0\}$ の元

である。さらに次が得られる。$\varphi \in L^+(G)$ をとる。

定理1.6. (i) 対応 $M^0(\varphi) \ni \psi \longmapsto A_\psi \in \mathfrak{Z}_+(\mathfrak{A}_\varphi)$, は bijection である。

(ii) $G$ の表現 $U_g^\varphi$, $V_g^\varphi$ $(g \in G)$ に付随する von Neumann 環 $\mathcal{U}(\mathfrak{A}_\varphi)$, $\mathcal{V}(\mathfrak{A}_\varphi)$ が因子環であるための必十条件は $\varphi$ が indecomposable であることである。

この定理の逆として次が成立する。

定理1.7. $G$ のユニタリ表現 $W_g$ $(g \in G)$ に対して、付随する群環の表現を $W_f$ $(f \in \mathfrak{A})$ とし、これらが生成する von Neumann 環を $\mathcal{W}$ とする。$\mathcal{W}$ が faithful trace $\Phi$ をもつとする。そのとき $\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \Phi(W_{f_1 * f_2^*}) = \Phi(W_{f_1} \cdot W_{f_2}^*)$ とおけば、この内積は、ある $\varphi \in L^+(G)$ によって $\langle f_1, f_2 \rangle_\varphi$ の形に表される。そして、対応 $W_f \longmapsto f + J_\varphi \in \mathfrak{A}_\varphi$ $(f \in \mathfrak{A})$ は $*$-環の同型である。

Thoma [19] では、群 $G = \mathfrak{S}_\infty$ に対して、全ての indecomposable $\varphi \in L^+(G)$ を具体的に求めている。さらに Vershik 達は [21] 他でこれらの $\varphi$ に対する因子表現を具体的に構成する等の研究を行なっている。

## 1.3. 球函数・帯球函数 ([5], [7])

群 $G$ とその閉部分群 $G_0$ をとる。ユニタリ表現 $(T, \mathcal{H})$ が $G_0$ に

関して class 1 であるとは, $T_g \xi_0 = \xi_0$ ($g \in G_0$) となるベクトル $\xi_0 \in \mathfrak{H}$, $\ne 0$, が存在することである。このとき行列要素 $\langle T_g \xi, \xi_0 \rangle$ を, $T$ に属する球函数, とくに $\langle T_g \xi_0, \xi_0 \rangle$ を帯球函数と呼ぶ。

(1°) $G$ の既約表現で $G_0$ に関し class 1 になるものの分類は帯球函数の話になる。適当な場合には, 積分方程式や微分方程式で特徴付けられる。

(2°) 別の観点として, 種々の古典的特殊函数を"球函数"として把え直すことや, 新しい特殊函数を産出することができる。

(3°) pair $(G, G_0)$ としてよく研究されているのは,

① 対称対の場合: $G$ の対合的自己同型 $\sigma$ があって $(G^\sigma)_0 \subset G_0 \subset G^\sigma$, 但し $(G^\sigma)_0$ は $G^\sigma$ の $e$ の連結成分.

② $G_0$ がコンパクトで, $G$ 上の $G_0$-両側不変な $L^1$-函数のなす環が可換な場合 [Gelfand 対と呼ぶ]

(注、これを別の言い方をすると, $G$ の任意の既約表現 $T$ に対して, $G_0$ の自明表現 $1_{G_0}$ の現れる回数は高々 1)

Godement [7] は, $G_0$ コンパクトの場合で, 表現 $T$ はユニタリとは限らず, また $G_0$ の一般の既約表現 $\delta$ に対して球函数論を展開した。そこでは帯球函数に当るものを次のように定義する。表現 $T|G_0$ の下で, $\delta$ の働く部分空

間への直交射影を $E(\sigma)$ とおくと,

$$\psi(g) \equiv \mathrm{Tr}\left(E(\sigma) I_g\right) = \mathrm{Tr}\left(E(\sigma) I_g E(\sigma)\right).$$

新屋[15]では,[6]での議論を精密化し,また特殊な群に対して,球関数を計算した。

## 1.4. 不変正定値内積

1°. $G$-module (= $G$ が線形に作用するベクトル空間) $V$ があったとき,$V$ に $G$-不変な内積が入るかどうかを問題にする。$G=\mathrm{Diff}_0(M)$ などに対しては,内積がどこかの測度から来ているとは仮定しないで考えるならば,新しい知見が得られる可能性がある。

2°. 無限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して,$\mathfrak{g}$-module $V$ に $X \in \mathfrak{g}$ の作用が skew-hermitian になるように"不変"内積が入れられるかを問題にする。例えば,$\mathfrak{g}$ が $M$ 上の台がコンパクトなベクトル場全体 $\mathrm{Vect}_0(M)$ とか,あるいは,Kac-Moody 環とかである。後者については,伊藤清一氏の[18]等の一連の仕事では,正定値内積を使って $V$ を完備化しそこのユニタリ群の中に,$\mathfrak{g}$ に対する(もしくは $\mathfrak{g}$ の完備化に対する) Lie 群 $G$ を構成している。

また,Lie 超代数 $\mathfrak{g}$ の"ユニタリ"表現の研究でも"$\mathfrak{g}$-不変"内積をしらべることになる([3]など)。

ここでは簡単のため $G$ や $\mathfrak{g}$ が有限次元半単純の場合のものを例に挙げる。

例1 [6] $G=SL(2,\mathbb{R})$ とし，$B$ を上三角行列全体のなす部分群，$\chi$ をその1次元表現とする。$C^\infty$-version における $B$ から $G$ への $\chi$ の誘導表現は ある函数空間 $V=D_\chi \supset C_0^\infty(\mathbb{R})$ の上に実現される。そこでの（正定値とは限らない）$G$-不変内積をさがすと，本質的には $C_0^\infty(\mathbb{R})$ での超函数

$$(*)\qquad \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}|x|^\lambda dx, \qquad \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}|x|^\lambda \operatorname{sgn}(x)\, dx \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

を考えることになる（[6, Chap VII]）。そのうち正定値内積を与えるものが，$-1<\lambda<1$ に対する前者であり，$G$ の補系列表現を与えることになる。なお，$(*)$ では パラメーター $\lambda\in\mathbb{C}$ についての解析接続を表示している。

例2 [2] $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環，$K$ を $\mathfrak{g}$ に対応する中心有限の Lie 群 $G$ の極大コンパクト部分群とする。$\mathfrak{g}$-module かつ $K$-module である $V$ に於て，$\mathfrak{g}$ と $K$ の作用が調和しているとき $(\mathfrak{g},K)$-module と呼ぶ。$G$ の既約ユニタリ表現の分類は，代数的に既約な $(\mathfrak{g},K)$-module で"不変"正定値内積を持つものと（同値を modulo として）bijective に対応する。さて，$V$ には $K$-作用に対して標準的な代数的基底 $\{\xi_i\}$ が与えられているので，内積 $\langle \xi_i, \xi_j\rangle$ を数値として決定すればよいとも言える。実際 J.A. Wolf

氏と話したとき，彼はこの問題にコンピューターを使ってみたとのことであった。[2]では，最高ウェイトを持つ$(\mathfrak{g}, K)$-moduleについてコンピューターに頼らない証明が書いてある。

## §2. 測度以後

### 2.1. 誘導表現の手法

位相群$G$に対して，閉部分群$H$とそのユニタリ表現$(\pi, V(\pi))$をとる。ここに$V(\pi)$は$\pi$の表現空間である。均質空間$Y = G/H$に$G$-準不変測度$\mu$が存在すると仮定すると誘導表現$T = \mathrm{Ind}_H^G \pi$が次のように作れる。

表現空間$\mathcal{H}(T)$：　$G$上の$V(\pi)$-値可測函数$f$で

$$(2.1) \qquad f(gh) = \pi(h)^{-1}(f(g)) \qquad (h \in H,\ g \in G),$$

$$(2.2) \qquad \|f\|^2 \equiv \int_{G/H} \|f(g)\|^2_{V(\pi)}\, d\mu(\dot{g}) < \infty \qquad (\dot{g} = gH),$$

となるもの全体を，内積の核$\{f ; \|f\| = 0\}$で割って，Hilbert空間$\mathcal{H}(T)$を得る。

表現作用素：$g_0 \in G$に対し，

$$(2.3) \qquad (T_{g_0} f)(g) \equiv \sqrt{\frac{d\mu(g_0^{-1}\dot{g})}{d\mu(\dot{g})}}\, f(g_0^{-1}g) \qquad (f \in \mathcal{H}(T),\ g \in G).$$

これは今日の用語を用いると，“$Y = G/H$上の$(\pi, V(\pi))$に付随したベクトル束を考え，その$L^2$-切断のなす空間の上に誘導表現を実現した”ということになる。

例2.1. $G$が局所コンパクトのときには，$Y = G/H$上には必ず

G-準不変測度が存在し, 更に絶対連続の意味で一意的である。この誘導表現の手法は, $L^2$-切断のかわりに, 正則切断をとるとか, 数多くの変形があり, 最も有効な方法であり続けている。

ここで $G$ が局所コンパクトでない場合の例を1つあげる.

<u>例2.2</u> [13]. 無限次元Hilbert空間 $\mathcal{H}$ を, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$ と直交分解し, $\mathcal{H}_\pm$ への直交射影を $Q_\pm$ と書く. $\mathcal{H}$ 上の有界可逆作用素全体を $GL(\mathcal{H})$ と書く. $g\in GL(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ の分解に則して, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ と書く. 取り扱う群は,

(2.4) $GL_r \equiv \left\{g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(\mathcal{H}) \mid \text{次の(i),(ii)を満たす}\right\}$,

(i) $a:\mathcal{H}_+\to\mathcal{H}_+$, は Fredholm型で index $=0$,

(ii) $b:\mathcal{H}_-\to\mathcal{H}_+$, $c:\mathcal{H}_+\to\mathcal{H}_-$, は Hilbert-Schmidt型.

または, $U_r \equiv GL_r\cap U(\mathcal{H})$, ここに $U(\mathcal{H})=\{\mathcal{H}\text{上のユニタリ作用素}\}$.

これらの群の均質空間として Hilbert-Schmidt Grassmannian の空間 $Gr(\mathcal{H}_+,\mathcal{H})$ をとる:

(2.5) $Gr(\mathcal{H}_+,\mathcal{H}) \equiv \{W\subset\mathcal{H} \mid \text{条件(iii),(iv)を満たす閉部分空間}\}$,

(iii) $Q_+|W: W\to\mathcal{H}_+$, が Fredholm型で index $=0$,

(iv) $Q_-|W: W\to\mathcal{H}_-$, が Hilbert-Schmidt型.

すると $W=\mathcal{H}_+$ に対する固定化群はそれぞれ次で与えられる:

$$GL(\mathcal{H}_+)\times GL(\mathcal{H}_-)\subset GL_r,\qquad U(\mathcal{H}_+)\times U(\mathcal{H}_-)\subset U_r.$$

ここで定義を復習しておこう,

<u>定義2.3.</u> Banach空間 $W_1, W_2$ に対し, 有界線形作用素 $T$:

$W_1 \to W_2$, が Fredholm型であるとは, $\mathrm{Ker}(T)$, $W_2/\mathrm{Ran}(T)$ が

ともに有限次元であること. このとき, $\mathrm{index}(T) \equiv \dim \mathrm{Ker}(T) - \mathrm{codim}\,\mathrm{Ran}(T)$.

さて, もとにもどって 我々の記号では,

$G = U_r$, $H = U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$, $Y \equiv G/H = Gr(\mathcal{H}_+, \mathcal{H})$, である.

$Y$上の $G$-準不変測度 $\mu_s$ ($s > -1$ はパラメーター) は, $\mathcal{H}$の有限次元部分空間$V$で, $V = V_+ \oplus V_-$, $V_\pm = V \cap \mathcal{H}_\pm$, となっているものに対して, $Gr(V_+, V)$上に測度 $\mu_{V,s}$ をGauss測度を用いて作り, 包含関係 $V \subset V'$ に対して調和する系になるようにして, $V \uparrow \mathcal{H}$ のときの limit をとることによって構成する。

論文[13]では, 誘導されるHの表現は $\mathbb{1}_H$ であるが, 準不変測度 $\mu_s$ 達が同値とは限らないので, $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$ は使われる $\mu_s$ に依る。 実は, 論文中では $\mu_s$ の間の同値関係ははっきりは調べられていない. しかし, proposition 5.1 (p.345) を用いれば, 下村氏が最近配位空間上の Poisson測度達の非同値性を証明した方法で取り扱えると思われる。基本的には山崎氏の本の手法である。

## 2.2. 因子表現と測度論的力学系 [17]

ここでは AF環 = approximately finite dimensional $C^*$-algebra の場合をとりあげる。[17]の後半で取り扱っている 群 $U(\infty) \equiv \lim_{n\to\infty} U(n)$ の群環の場合は, 考え方によれば, 離散群に対

する§1.2の連続群指標とも思えるが，手法は全く異なる。

$C^*$-環 $A$ に対し，$A$ 上の線形汎関数 $\varphi$ が正であるとは，$\varphi(a^*a) \geq 0$ $(a \in A)$. この $\varphi$ に対して 1.1〜1.21 における同様に，$A$ に内積 $\langle x, y \rangle_\varphi = \varphi(y^*x)$ $(x, y \in A)$ を入れ，内積の核で割ったあと完備化して Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\varphi$ を得る。$\mathfrak{H}_\varphi$ 上に $A$ の表現を，$\pi_\varphi(a)x^\varphi = (ax)^\varphi$ $(a \in A)$ として得る。ここに $x^\varphi$ は $x \in A$ の $\mathfrak{H}_\varphi$ における像である [GNS-construction].

さて，$A$ が有限次元 $C^*$-部分環 $A_0 = \mathbb{C}\cdot 1 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ で生成される (i.e., $A = \langle \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \rangle$) とき，AF環と呼ばれる。$A$ の極大可換 $C^*$-部分環 (= m.a.s.a.) で，$C_n \equiv A_n \cap C$ 達で生成され，$C_{n+1} = \langle C_n, D_{n+1} \rangle$, $D_{n+1}$ は $A_n' \cap A_{n+1}$ の m.a.s.a. となっているものをとる。ここに，$A_n'$ は $A$ における $A_n$ の commutant.

$\mathcal{U}_n \equiv \{u \in A_n$ ユニタリ元 $| u^*C_nu = C_n\}$ とおくと，$\forall u \in \mathcal{U}_n$, $u^*Cu = C$，が分る。また $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ なので $\mathcal{U} \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ は群である。$\forall u \in \mathcal{U}$ は，$\gamma_u : C \ni c \longmapsto u^*cu \in C$ によって $C$ に*-同型として作くが，$\Gamma \equiv \{\gamma_u\ (u \in \mathcal{U})\}$ とおく。

可換 $C^*$-環 $C$ の Gelfand dual を $\Omega$ とする。$\Omega$ はコンパクトで，$C \cong C(\Omega)$，また $\Omega$ には $\Gamma$ が自然に作く。この $(\Omega, \Gamma)$ を $A$ に付随する力学系と呼ぶ。可測集合族としては $\Omega$ の Borel 集合族をとる。$\Omega$ 上の $\Gamma$-準不変測度 $\mu$ から $A$ 上の正線形汎関数 $\varphi_\mu$ を作り，GNS-construction による $A$ の表現 $\pi_\mu$

$\equiv \pi_{\varphi_\mu}$を与えるには次のようにする。

線形写像 $P: A \to C$, が conditional expectation（条件付期待値）であるとは，$P^2 = P$, $P(ac) = P(a)c$, $P(ca) = cP(a)$ $(a \in A, c \in C)$, $\|P\| = 1$, であって，$A$ の正元（$a^*a$ の形の元の正係数1次結合）を $C$ の正元に写すもののことである。$A_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について逐次的に議論することによって，条件付期待値 $P$ で

(2.6) $\quad P(u^* a u) = u^* P(a) u \quad (u \in \mathcal{U},\ a \in A)$

を満たすものが構成できる。このとき $\varphi_\mu = \mu \circ P$ とおく。ここで $\mu$ は $C(\Omega) \cong C$ 上の正測度を考える。

$A$ の表現 $\pi_\mu$ の各種の性質が，$\Omega$ 上の $\Gamma$-準不変測度 $\mu$ の性質でいろいろ特徴付けられる [17, Th. I.3.12]. 例えば

$\pi_\mu$ が因子表現 (i.e., $\pi_\mu(A)''$ が因子) $\Leftrightarrow$ $\mu$ が $\Gamma$-ergodic.

詳しくは原典に当っていただき度いが，今回私が見直してみて疑問に思った点としては「何故，$\Gamma$-準不変な $\mu$ と (2.6) を満たす $P$ のみが使われているのか？」ということである。表現 $\pi_\mu$ はこれらの付加的条件がなくても作れるからである。ただし，[17] の上記の三つ組 $(C, \mathcal{U}, P)$ については次が成立している：

(i) $A = \mathrm{c.l.m.}(\mathcal{U}C) = \mathrm{c.l.m.}(C\mathcal{U})$ (c.l.m. = closed lin. manifold)

(ii) 表現空間 $\mathfrak{H}_{\varphi_\mu}$ の元 $\xi_\mu \equiv 1^{\varphi_\mu}$ は，cyclic であるだけでなく von Neumann 環 $\pi_\mu(A)''$ につき分離的，即ち，$x\xi_\mu = 0 \Rightarrow x = 0$ $(x \in \pi_\mu(A)'')$.

（注）先に注意したように [17] の後半では，群 $\Gamma(\infty)$ の群環

の表現が取扱われている。他方，群 $U(\infty)$ 等古典型コンパクト群の無限次元版の表現は Ol'shanskii や Neretin によっても取扱われておるが，ここには 退屈は出てこず，手法としては，有限次元 $\nearrow$ 無限次元，を群とともにその表現についても行なう，ということである。

2.3. "dual pair" の手法([9], [10])

コンパクト群 $G$ および $S$ がともにベクトル空間 $W$ に表現 $\rho_G$, $\rho_S$ によって表現されているとする。そのとき commutants につき，

(2.7) $\rho_G(G)'' = \rho_S(S)'$, $\rho_S(S)'' = \rho_G(G)'$,

が成立していれば，$S$ を表現 $\rho_G$ に対する symmetry group と呼び，$W$ 上の $\rho_G \times \rho_S$ を dual pair と呼ぶ。

この状況設定の下では $G \times S$-module $W$ は重複度が無く，さらにその既約分解

(2.8) $\rho_G \times \rho_S \cong \sum_{\pi \in Z} T_\pi \times \pi$ （$Z$ は $\hat{S}$ の部分集合）

に於いて，対応 $Z \ni \pi \longmapsto T_\pi \in \hat{G}$ は injective である。このとき，$T_\pi$ は空間 $\mathrm{Hom}_S(V(\pi), W)$ の上に実現される。

この dual pair の状況はいろいろ一般化されているが，我々は，例えば，$G = \mathrm{Diff}_0(M)$, $S = \mathfrak{S}_\infty$，の如く，非I型や無限次元群の場合に，そのエッセンスを真似して既約ユニタリ表現を構成しようというのである。有名な Weyl の相互律の

場合には，$G=GL(n,\mathbb{C})$ または $U(n)$，$S=\mathfrak{S}_k$ とし，$V=\mathbb{C}^n$ 上の $G$ の自然表現の $k$ 回テンソル積 $W=\otimes^k V$ をとり，$\mathfrak{S}_k$ をテンソル積の成分の置換として働かせる。すると $\hat{\mathfrak{S}}_k$ と，$G$ の Young diagram $m_1\geq m_2\geq\cdots$，$\sum_i m_i=k$，をもつ既約表現達が 1-1 に対応している。

さて我々は既約分解されてしまった後の状況，即ち，ある $G\times S$-module $W_1$ で，$T\times\pi$ ($\exists\pi\in\hat{S}$) の形になっている状況を見付けたい。その際には，$G$ の表現 $T$ は空間 $\mathrm{Hom}_S(V(\pi),W_1)$ 上に実現されるが，既約な $T$ を得たいので，$S$ としてはできるだけ"大きく"，$W_1$ としてはできるだけ"小さい"ものを得たい訳である。そして表現空間 $\mathrm{Hom}_S(V(\pi),W_1)$ には $G$-不変内積を得たい。($S$ がコンパクトとか可算無限群のときは何とかなる。)

以上のような要望を $G=\mathrm{Diff}_0(M)$ に対して組織的に実現したのが，[9]，[10] である。そこでは $S=\mathfrak{S}_\infty$ である。$M$ 上の(集積点のない)無限点列のなす順序付配位空間 $\tilde{X}$ とその上の $G\times S$-準不変測度を用いたので，この"dual pair"の手法を「測度以後」の§で述べることとした。測度論に関係する部分は，次の§3でまとめて述べることとして，ここでは，そこまでに到る背景を(後から付けた理屈だが)述べてみよう。まず $G=\mathrm{Diff}_0(M)$ の自然な表現を，$\mathfrak{H}_i\equiv L^2(M,\mu_i)$ 上に

$$(2.9)\quad (T_i(g)f)(p)=\sqrt{\frac{d\mu_i(g^{-1}p)}{d\mu_i(p)}}\,f(g^{-1}p)\quad (f\in\mathfrak{H}_i,\ p\in M),$$

として与える。ここに各$\mu_i$ ($i\in\mathbb{N}$) は局所的にはルベーグ測度と同値な$M$上の測度である。この可算個の表現 $(T_i, \mathfrak{H}_i)$ のテンソル積を定義するには、reference vector と呼ばれる $\varphi=(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\varphi_i\in\mathfrak{H}_i$, $\|\varphi_i\|=1$, を決める。そして、$\otimes_{i\in\mathbb{N}}\psi_i$, $\psi_i\in\mathfrak{H}_i$, $\|\psi_i\|=1$, の形の元で、$\psi_i=\varphi_i$ ($i\gg 0$) となるものの集合をとると、それは1つのHilbert空間を生成する。それを $\otimes^{\varphi}_{i\in\mathbb{N}}\mathfrak{H}_i$ と書く。この空間上に群 $S=\mathfrak{S}_\infty$ はテンソル積の成分の置換として自然に働く。他方、$g\in G$ を作用させるためには、$\otimes^{\varphi}_{i\in\mathbb{N}}T_i(g)$ を線形作用素として定義すべきだが、それが可能であるためには系 $(\mu_i,\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に適当な条件が要る。系 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が、ある緩い条件を満たす場合には、十分一般な状況設定として

(2.10) $\quad \mathrm{supp}(\varphi_i)$, $i\in\mathbb{N}$, が互に素,

という十分条件が考えられる。(あるいは、もっと緩く、"$\forall K\subset M$ コンパクトに対して $\sum_i \|\varphi_i|K\|<\infty$") さて、$E_i\equiv \mathrm{supp}(\varphi_i)$ とおき新たに測度 $\mu_i'$ を

(2.11) $\quad E_i$上では $\mu_i'\equiv|\varphi_i|\cdot\mu_i$, $E_i$の外では $\mu_i'=\mu_i$,

と定義する。$\mathfrak{H}_i'\equiv L^2(M,\mu_i')$ 上の $T_i'(g)$ を(2.9)と同様に与え、$\varphi_i'\equiv\varphi_i/|\varphi_i|$, $\varphi'\equiv(\varphi_i')_{i\in\mathbb{N}}$, とおくと

(2.12) $\quad (\otimes^{\varphi}_{i\in\mathbb{N}} T_i, \otimes^{\varphi}_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{H}_i)\cong(\otimes^{\varphi'}_{i\in\mathbb{N}} T_i', \otimes^{\varphi'}_{i\in\mathbb{N}}\mathfrak{H}_i')$.

さらに、$M$上の函数 $\gamma_i$ を $\gamma_i|E_i\equiv 1/\varphi_i'$, $\gamma_i|M\setminus E_i\equiv 1$, と置き、$(T_i', \mathfrak{H}_i')$ をユニタリ作用素 $M_{\gamma_i}f\equiv\gamma_i f$ によって

変換すると，$\mathfrak{H}_i'' \equiv \mathfrak{H}_i$ 上の表現 $T_i''$ で multiplier $\alpha_i(g,p) \equiv \gamma_i(g^{-1}p)/\gamma_i(p)$ をもつものになる：

(2.13) $\qquad T_i''(g)f_1(p) = \alpha_i(g,p)\sqrt{\dfrac{d\mu_i(g^{-1}p)}{d\mu_i(p)}}\, f_1(g^{-1}p) \quad (f_1 \in \mathfrak{H}_i'').$

そして，$\varphi_i'$ は $\chi_{E_i}$（$= E_i$ の特性函数）に写される。ここで $\varphi_i'' \equiv \chi_{E_i}$, $\varphi'' = (\varphi_i'')_{i\in\mathbf{N}}$, とおくと，我々は，$(\otimes^{\varphi''}_{i\in\mathbf{N}} T_i'', \otimes^{\varphi''}_{i\in\mathbf{N}} \mathfrak{H}_i'')$ に到来した。そこで，この $G\times S$-module を $S = \mathfrak{S}_\infty$ に関して既約分解した状況を仮想的に考えて得られる $G\times S$-module $T_\pi \times \pi$，ここに $\pi \in \widehat{\mathfrak{S}_\infty}$, $T_\pi$ は $G$ の表現，を実現するのに，（§3.1で述べる）順序付配位空間 $\tilde{\mathfrak{X}}$ 上の $G\times\mathfrak{S}_\infty$-準不変測度を用いた。そして，結果的には $T_\pi$ として既約表現が得られた。それは，組 $((M_i, E_i)_{i\in\mathbf{N}} ; \pi)$ によって決定されている。これらの表現の間の同値，非同値も研究した[10]が，そこでは，「直積測度の同値関係」が重要である。

## §3. $\mathrm{Diff}_0(M)$ と $\mathfrak{S}_\infty$

### 3.1. 順序付配位空間と配位空間（[9], [10]）

直積空間 $\mathfrak{X} = \prod_{i\in\mathbf{N}} M_i$, $M_i = M$, の点 $x = (x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ は，集積点を持たぬとき，$M$ の点の順序付配位と呼ばれる。その全体を $\tilde{\mathfrak{X}}$ と書く．$\mathfrak{X}$ には，$G = \mathrm{Diff}_0(M)$ と $S = \mathfrak{S}_\infty$ が作用する：

(3.1) $\qquad gx \equiv (gx_i)_{i\in\mathbf{N}}, \qquad x\sigma \equiv (x_{\sigma(i)})_{i\in\mathbf{N}} \quad (g\in G,\ \sigma\in S).$

そのとき $\tilde{\mathfrak{X}}$ は $G\times S$-不変である。また, $\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ を $\mathbb{N}$ 上の全ての置換のなす群とすると, 商空間 $\Gamma_M = \tilde{\mathfrak{X}}/\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ は(順序なし)配位空間であり, $\Gamma_M$ 上の Poisson 測度は $G$-準不変である。$\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ の有限次元表現を用いて, $G$ の既約ユニタリ表現を構成したのが[21]であり, Poisson 測度同志の同値関係は最近, 下村[15]によって決着がついた。

さて, 直積空間 $\mathfrak{X}$ の各成分 $M_i = M$ 上に, 局所的にルベーグ測度と同値な測度(L-測度と呼ぶ) $\mu_i$ をとる。次に可測な $E_i \subset M_i$ をとって $E=\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i \subset \mathfrak{X}$ とおく。$E$ が系 $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対し次の条件を満たすとき $\mu$-unital と呼ぶ:

(MU1) $\mu_i(E_i)>0\ (\forall i)$, $\sum_{i\in\mathbb{N}}|1-\mu_i(E_i)|<\infty$.

さらに他の $\mu$-unital set $E'=\prod_{i\in\mathbb{N}}E'_i$ をとるとき, $E\overset{\mu}{\sim}E'$ とは $\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_i(E_i\ominus E'_i)<\infty$ とする. これは同値関係になる.

(3.2) $\mathcal{E}(E) \equiv \{E'\subset\mathfrak{X};\ \mu\text{-unital},\ E'\overset{\mu}{\sim}E\}$

とおき, 各 $E'\in\mathcal{E}(E)$ 上には直積測度 $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mu_i|E'_i)$ を考えると, これらは互に consistent であり, 従って, $\mathcal{E}(E)$ から生成される σ-ring $\mathfrak{M}(E)=\mathfrak{M}(\mu,E)$ 上に測度 $\nu_{\mu,E}$ を与える。この $\nu_{\mu,E}$ は $\mathfrak{S}_\infty$-準不変である。

$M$ の位相との調和を考えれば次の条件は自然である:

(3.3) $\forall K\subset M$ コンパクトに対し, $K$ の勝手な可測分解 $K=\coprod_{i\in\mathbb{N}}B_i$ に対しつねに $\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_i(B_i)<\infty$.

すると次の定理を得る。

<u>定理3.1.</u> 系 $\mu=(\mu_i)_{i\in N}$ と $E=\prod_{i\in N}E_i$ が (MU1) および (3.3) を満たすとする。そのとき測度 $\nu_{\mu,E}$ が $\tilde{\mathfrak{X}}\subset\mathfrak{X}$ の上に乗っている、即ち、$\forall B\in\mathfrak{M}(E)$ に対し、$B\cap\tilde{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{M}(E)$ で、$\nu_{\mu,E}(B)=\nu_{\mu,E}(B\cap\tilde{\mathfrak{X}})$, となるための必十条件は次である:

(MU2) $\forall K\subset M$ コンパクトに対し、$\sum_{i\in N}\mu_i(K\cap E_i)<\infty$. ⌟

ところで、$g\in G$ の作用を考えると、$\mu$-unital $E'\sim E$ に対し、$gE'\sim E'$ を得るには、さらに何程かの条件が必要である。一番分り易い、しかも本質的な十分条件は次である:

(3.4) $E_i$ $(i\in N)$ は互に素.

このときは、角谷の定理もしくは山崎氏の本から

$$(3.5)\qquad \frac{d\nu_{\mu,E}(gx)}{d\nu_{\mu,E}(x)}=\prod_{i\in N}\frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)}\qquad \left(x=(x_i)\in\mathfrak{X}\right)$$

が示される。すると図式で示すと

$$G\curvearrowright\tilde{\mathfrak{X}}\curvearrowleft\mathfrak{S}_\infty \text{ の上に } G\times\mathfrak{S}_\infty\text{-準不変測度 } \nu_{\mu,E}$$

となっている。

さて、$\mathfrak{S}_\infty$ の既約ユニタリ表現 $(\pi, V(\pi))$ をとる。$\tilde{\mathfrak{X}}$ 上の $V(\pi)$-値関数 $f$ に対しては、形式的に

$$R_\Sigma(\sigma)f(x)=\alpha_1(\sigma,x)\sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(x\sigma)}{d\nu_{\mu,E}(x)}}\,\pi(\sigma)\left(f(x\sigma)\right)\qquad(\sigma\in\mathfrak{S}_\infty),$$

$$T_\Sigma(g)f(x)=\alpha(g,x)\sqrt{\frac{d\nu_{\mu,E}(g^{-1}x)}{d\nu_{\mu,E}(x)}}\,f(g^{-1}x)\qquad(g\in G),$$

ただし、$\alpha_1$ および $\alpha$ は multiplier, $\Sigma=(\mu,E;\pi)$, と $G\times\mathfrak{S}_\infty$ が働く。ここで、Hilbert空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ を作るのに、可測な$f$で

$$(3.6)\quad\begin{cases} R_\Sigma(\sigma)f = f \quad (\sigma\in\mathfrak{S}_\infty), \\ \mathrm{supp}(f) \equiv \{x\in\mathfrak{X};\ f(x)\neq 0\} \in \mathcal{M}(E), \end{cases}$$

を満たすものをとる。$\mathfrak{S}_\infty$は可算なので，$\exists F\in\mathcal{M}(E)$ s.t. $\mathrm{supp}(f) = \coprod_{\sigma\in\mathfrak{S}_\infty} F\sigma$, $F\sigma\cap F\tau=\phi$ $(\sigma\neq\tau)$，となる$F$をとって

$$(3.7)\qquad \|f\|^2 \equiv \int_F \|f(x)\|^2_{V(\pi)}\, d\nu_{\mu,E}(x),$$

とおくと，これは"基本領域"$F$のとり方に依らない。そこで$\{f;\ f=0\}$で割って Hilbert空間$\mathcal{H}_\Sigma$を得て，$G$の表現$(T_\Sigma, \mathcal{H}_\Sigma)$を得る。これらの既約性や同値関係は[9],[10]を見て戴きたい。なお，[9]の場合は，$\mu_i=\mu_0$ $(\forall i)$という設定になって居り，測度$\nu_{\mu,E}$ on $\mathfrak{X}$は$\mathfrak{S}_\infty$-不変である。しかし商空間$\mathfrak{X}/\mathfrak{S}_\infty$に測度を導くには上述の如く"基本領域"を取る必要がある。[9]を書いた段階では$\mathfrak{S}_\infty$-不変な$\nu_{\mu,E}$の場合しかうまく構成できないと思っていたのだが，[10]で$\mathfrak{S}_\infty$-準不変の場合に拡張した。

さて上述の方法が何故"dual pair"の方法と言えるのだろうか？それにつき1つの定理を与えておく。§2.3における$G$のテンソル積表現$(\otimes^\varphi_{i\in N} T_i, \otimes^\varphi_{i\in N}\mathfrak{H}_i)$を条件(2.10)の下で考える。

<u>定理3.2.</u> テンソル積の reference vector $\varphi=(\varphi_i)_{i\in N}$が次の条件を満たすとする：$U_n\uparrow M$なる開集合の列$(n=1,2,\cdots)$があって，$(\forall n)$ $\sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i|U_n\|^2_{L^2(M,\mu_i)} \equiv \sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i|U_n\|^2_{\mathfrak{H}_i} < \infty$. このとき，

$$\underbrace{(\otimes^\varphi_i T_i)(G)'}_{\text{commutant}} = \underbrace{R(\mathfrak{S}_\infty)''}_{\text{double comm.}}, \qquad R(\mathfrak{S}_\infty)' = (\otimes^\varphi_{i\in N} T_i)(G)'',$$

ただし，$\mathfrak{S}_\infty$ の表現 $R(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{S}_\infty$, はテンソル積の成分の置換として定義する。 $\square$

この定理は，さらに，上で構成した群々の表現 $(T_\Sigma, \mathcal{H}_\Sigma)$ によってテンソル積表現 $\otimes^{\varphi}_{i\in\mathbb{N}} T_i$ が既約分解され得ることを示唆している。

## 3.2. 閉集合のなす空間上に測度を構成する試み

配位空間上の Poisson 測度の表示式 $e^{-\mu(B)}\frac{\mu(B)^n}{n!}$ は全く面白い。私は直積型の測度 $\nu_{\mu,E}$ に到達する前に，次のようなことを考えてみた。これといった結論を得ていないのであるが，問題として掲げておく。まず $M$ の閉集合の全体のなす集合 $\mathcal{C}_M$ をとる。$M$ の閉集合 $F$ に対し，$Y_F=\{F'\in\mathcal{C}_M\,;\,F'\subset F\}$ とおきその全体を $\mathfrak{U}$ とおく。$M$ 上の L-測度 $\mu$ から出発して，$\mathcal{C}_M$ 上の測度 $\nu$ を得たい訳だが，$\mathbb{R}_+$ 上のある函数 $f$ によって $\nu(Y_F)=f(\mu(F))$ となっているとする。問題は，どんな $f$ をとれば，これが可能か？ということである。($M=S^1$ のとき，[11] 参照)

(1) まず $D=Y_F\setminus(Y_{F_1}\cup Y_{F_2}\cup\cdots\cup Y_{F_n})$ の形の集合に対して非負の値が対応するべきであることから ($F_i\subset F$ と仮定して)

$$f(\mu(F))+\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\ell} f(\mu(F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap\cdots\cap F_{i_\ell}))\geqq 0. \tag{3.8}$$

(2) 上の $D$ の形の元の減少列 $D_1\supset D_2\supset\cdots$ があって $\nu(D_k)\geqq {}^{\exists}c>0\ ({}^{\forall}k)$ とすると $\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k\neq\phi$.

が成立すれば，$\mu(M)<\infty$の場合は，OKである。
不等式条件(3.8)も簡単ではなく，この問題が well-posed であるのかどうかも不明であるが，何か別の話題との関連があってもよさそうな気がしている。

## REFERENCES


[1] D. Aldous and J. Pitman, On the zero-one law for exchangeable events, Ann. Probability, 7(1979), 704-723.

[2] T. Enright, R. Howe and N. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, in "The Representation Theory of reductive groups", Proc. of Univ. Utah Conference, Birkhäuser, 1983, pp.97-143.

[3] H. Furutsu and T. Hirai, Representations of Lie superalgebras I, J. Math. Kyoto Univ., 28(1988), 695-749.

[4] I.M. Gelfand and D.A. Raikov, Irreducible unitary representations of locally compact groups, Mat. Sbornik, 13(1943), 301-319 (in Russian).

[5] I.M. Gelfand, Spherical functions on symmetric Riemannian spaces, Doklady A.N. SSSR, 70(1950), 5-8 (in Russian).

[6] I.M. Gelfand et al., Generalized Functions, Vol.5, "Integral Geometry and Representation Theory", Academic Press, 1962.

[7] R. Godement, A theory of spherical functions I, Trans. Amer. Math. Soc., 73(1952), 496-556.

[8] T. Hirai, Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group $S_\infty$, J. Math. Kyoto Univ., 31(1991), 495-541.

[9] T. Hirai, Irreducible unitary representations of the group of diffeomorphisms of a non-compact manifolds, ibid., 33(1993), 827-864.

[10] T. Hirai, Representations of diffeomorphism groups and the infinite symmetric group, in "Noncompact Lie Groups and Some of Their Applications" (E.A. Tannner et al. ed.), pp.225-237, Kluwer Acad. Publ., 1994.

[11] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of a circle, Funct. Anal. Appl., 5(1971), 45-54.

[12] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of the space $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$, Funct. Anal. Appl., 9(1975), 144-145.

[13] D. Pickrell, Measures on infinite dimensional Grassmann manifolds, J. Funct. Anal., 70(1987), 323-356.

[14] G. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, Commun. Math. Phys., 80(1981), 301-342.

[15] H. Shimomura, Measures on configuration spaces and elementary representations of a group of diffeomorphisms generated by Poisson measures, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[16] H. Shin'ya, Spherical functions and spherical matrix functions on locally compact groups, Lect. Notes in Math., Vol.7, Kinokuniya, 1974.

[17] Ş. Strătilă and D. Voiculescu, Representations of AF-algebras and of the group of U($\infty$), Lect. Notes in Math., Vol.486, Springer-Verlag, 1975.

[18] K. Suto, Exponentials of certain completions of the unitary form of a Kac-Moody algebra and associated groups, J. Math. Kyoto Univ., 30(1990), 93-107.

[19] E. Thoma, Uber unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen, Math. Ann., 153(1964), 111-138.

[20] E. Thoma, Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, Math. Z., 85(1964), 40-61.

[21] A.M. Vershik, I.M. Gelfand and I.M. Graev, Representations of the group of diffeomorphisms, Russian Math. Surveys, 30(1975), 1-50.

[22] A.M. Vershik and S.V. Kerov, Characters and factor representations of the infinite symmetric group, Soviet Math. Dokl., 23(1981), 389-392.

[23] 山崎泰郎，無限次元空間の測度（下），紀伊国屋書店.