

Modeling of Superheated Drop Vibration

過熱液滴の振動のモデル化

東京農工大学 高木隆司 (Ryuji Takaki)

東京農工大学 徳川直子 (Naoko Tokugawa)

1 はじめに (Introduction)

沸点より高温に加熱した平板上に置かれた液滴は、下面で激しい蒸発を起こし、ホバークラフトのように浮き上がって直接加熱面に接触しない。液滴の下にできる薄い蒸気層の熱伝導は小さいので、液滴の下面は、加熱面より低温に保たれ、瞬時に消滅してしまうことはない。このとき、重力と表面張力の影響で液滴は扁平になる。また、加熱面からの摩擦も小さいので自由に運動することができる。このような状態の下で、液滴は平面形が多角形の対称性を持つような自励振動を始めることが観察されている。この運動においては、平面形の周辺が半径方向に振動する。この振動は、徐々に蒸発して消滅するまで、しばらくの間持続する。以下において、平面形が n 角形になる振動を、モード数 n の振動と呼ぶ (Fig. 1 参照)。

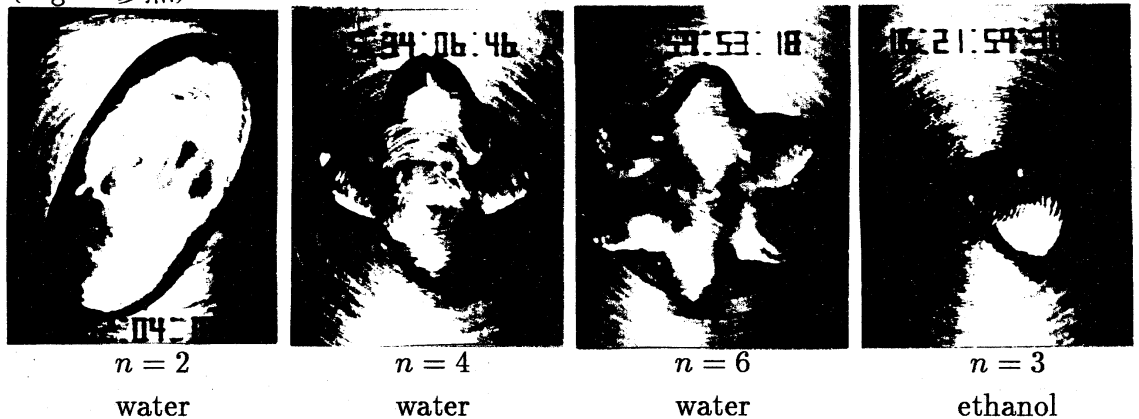


Fig. 1: Observed instantaneous shapes of drop vibration

この振動の理論的解析について述べる前に、我々の行った実験から得られた興味深い幾つの特徴を紹介しておく。著者らは、室温や広い温度範囲にわたる恒温層中で液化ガスの液滴の振動を [1, 2], 300°C 程度に加熱したホットプレート上で蒸留水とエタノールの液滴の振動を観察した [3, 4]。液滴はわずかに凹んだ加熱した平板に置かれ、振動は自然に励起させた。液滴が徐々に蒸発して小さくなるにつれ、しばしば、振動モードは次々に変化していくことが観察された。この振動モードの選択は平均半径のみならず、加熱面の温度や物質に依存することが確かめられている (Fig. 2 参照) [2]。

液化ガスにおいて、振動モードは n の大きいモードから小さいモードに順番に変化していき、非常に規則的であるが、物質毎に異なった特徴を持つ。液体窒素

では、周囲の温度 T を変化させたところ、 $T < 150^\circ\text{C}$ では規則的に $n = 5, 3, 2$ のモードが現れたが、 $T \geq 150^\circ\text{C}$ 、 $1.5 < r < 3\text{mm}$ では $n = 6, 5, 4, 3, 2$ のモードがランダムに現れた [2]. 蒸留水では、モードの選択は主に加熱面の温度 T に依存し、 $T \geq 330^\circ\text{C}$ 、かつ液滴の直径が $2r < 15[\text{mm}]$ の領域では、 $n = 3 \sim 10$ のモード (主に $n = 3, 4, 6$) がランダムに現れた. それ以外の条件では、 $n = 2$ のモードが現れた. 一方エタノールでは、モード選択は直径にのみ依存し、 $2r \geq 8[\text{mm}]$ の領域では $n = 2$ のモードが、 $5 \leq 2r \leq 8[\text{mm}]$ では $n = 3$ のモードが現れた [4].

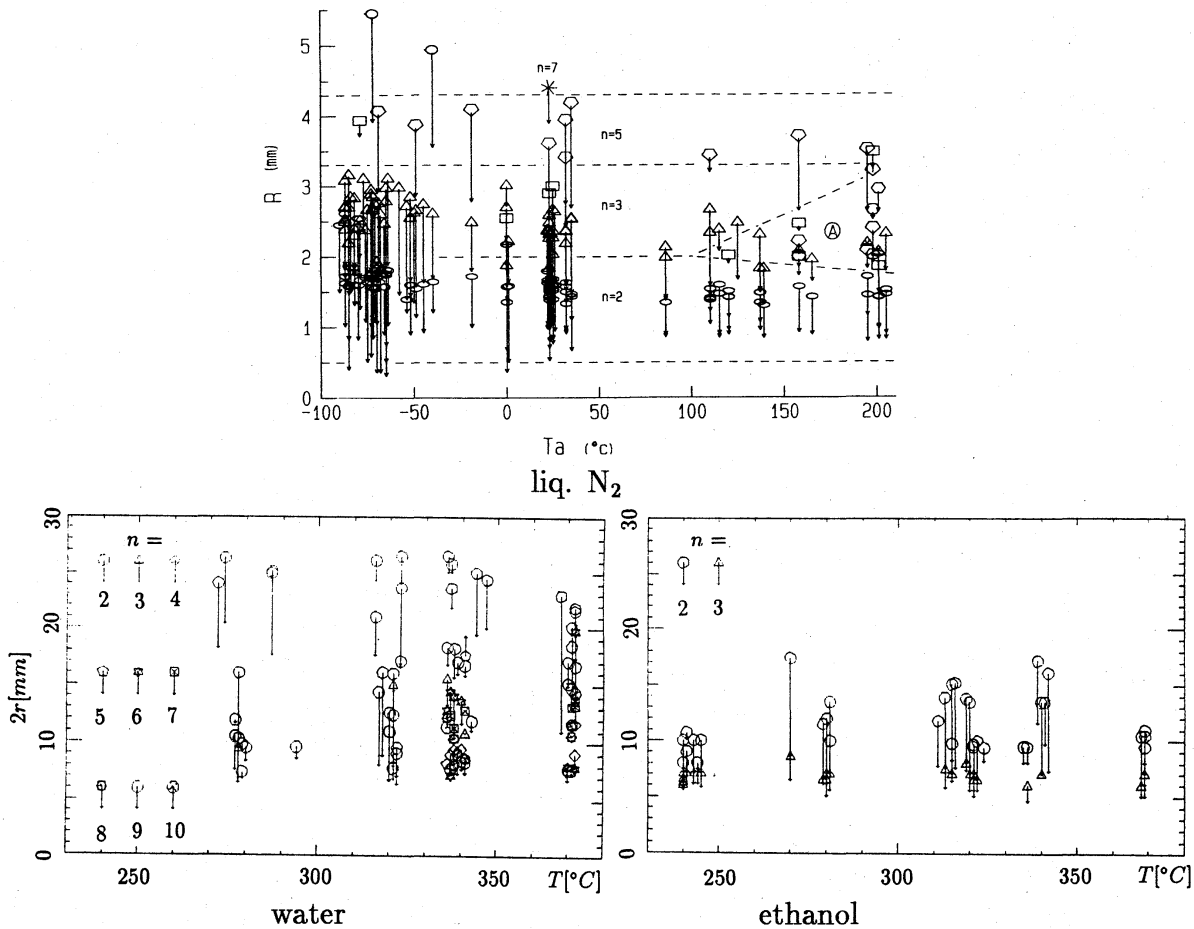


Fig. 2: Temperature and radius dependence of mode transition

蒸留水について液滴内の温度分布を測定したところ、下面でほぼ 100°C 、内部で約 92°C 、上面で約 90°C であった. すなわち、下面以外では沸点よりかなり低くなっていた.

振動数は、モード数と平均半径に依存し、周囲の温度にはほとんど依存しないことが分かっている [2].

振動のメカニズム、すなわち振動がいかにより励起されるかという問題は、重力や表面張力が複雑に作用し強い熱非平衡状態であるために物理的にも数学的にも困難なので、いまだ完全には解明されていない. 液滴の微小振動に関する理論と

しては, 球形液滴や円柱液体の振動が Rayleigh によって解析されている [5, 6]. 扁平な液滴の微小振動については, Takaki らが液化ガスの液滴に対する基本振動の解析 [7] を行っており, 予言された固有振動数が実験と一致することを確認している. また, モード遷移についてのモデルシミュレーション [8] も行っている. 著者らは, 液滴の自励振動のメカニズムとして, 表面張力の変動がその駆動力であると考えて解析を行ってきた [3, 4, 9, 10]. 次節で我々の提案している表面張力の変動に対するモデルについて説明し, 第3節でそれに基づく単一の振動モードについての弱非線形近似解析について述べる. 第4節では, 振動モードの遷移則を理解するために, 複数の振動モードが組合わさった場合の弱非線形近似解析について述べる.

2 表面張力変動のモデル (Modeling of surface tension vibration)

著者らは, 液滴の自励振動の励起には, 表面張力の変動が重要な要因であること, およびその変動の原因は周辺部分 (あるいは先端部分) と周囲の空気や水蒸気との熱的接触からくることを仮定し, 以下で詳しく説明するようなモデルを提案している. 周辺部分に注目したのは, 表面張力の変動の効果が最も大きいのが液滴の周囲の出っ張ったところ, すなわち曲率の大きい部分だからである.

前記したように, 液滴はその下にある加熱面によって加熱されているために, 加熱面と液滴の間には薄い蒸気の層ができています. 液滴は, さらに, 周囲を取り囲む熱い気体によっても加熱されているので, 液滴表面ではいたるところで蒸発が起こっており, その蒸発によって液滴の表面は薄い蒸気の層に覆われていると考えられる. 液滴が振動し, 周辺が出っ張っていくとき, 周囲の蒸気は後方 (液滴の中心へ向かう方向) へ流され, 先端での蒸気の厚さは薄くなる (Fig. 3 参照). そうすると, 液滴の周辺は高温空気からの熱を受け易くなり, その温度は沸点とほぼ等しいであろう. 逆に, 周辺が引っ込んで行くときには, 蒸気は周辺の付近に伴流領域を形成し, 蒸気の層の厚さは厚くなるだろう. このときには, 周辺は蒸気に取り囲まれているので周囲の高温空気の影響をあまり受けず, 液滴の内部が低温であることから, ある程度沸点より冷やされると考えられる. 結局, 先端が出っ張るときは高温, 引っ込むときは低温と仮定してよいであろう.

考えている温度領域では表面張力と温度の関係はほぼ逆比例の関係にあるが, 簡単のために周辺の温度, およびその関数である表面張力は2つの値のみを取ると仮定する.

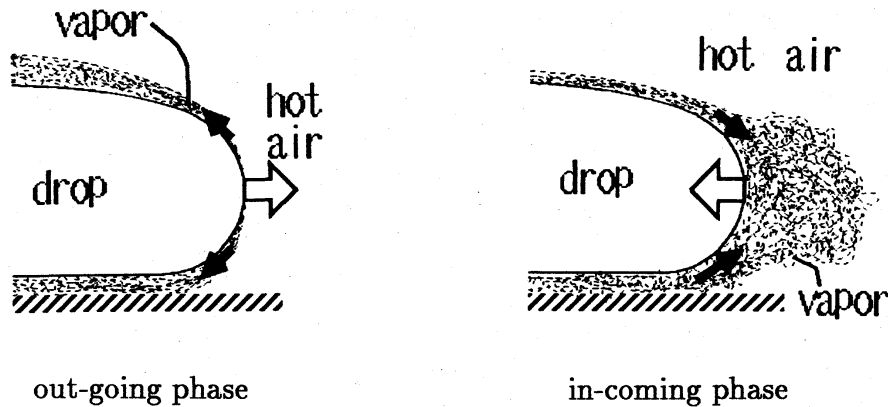


Fig. 3: Assumed behavior of vapor near the periphery of drop

3 単一モードの弱非線形近似 (Weakly nonlinear approximation of a single mode)

3.1 仮定と基礎方程式 (Assumptions and basic equations)

液滴の振動を解析するための基礎方程式および境界条件は、これまでの解析 [10] で使ってきたものと同じであるが、要点を解説しておく。

まず、以下に述べるいくつかの仮定をする。液滴を非常に薄い液体の層とし、流体の振動を浅水波の表面張力波と仮定、浅水波理論を適用する。また、液滴中の流れは非圧縮で非粘性とし、ポテンシャル流理論を適用する。物質定数や液滴の体積は振動周期の間一定、すなわち、その間の蒸発の効果は無視できるとする。液滴の下側の蒸気層は、非常に薄く、流れはほぼ水平方向を向き、Hele-Shaw 流の仮定が適用できると仮定する。加熱面および液滴の下側表面の温度は、与えられた一定値を保つとする。なお、蒸気層の物性値は、中間の高さでの値で代表させる。

以下の解析で用いられる変数をここで挙げておく。液滴の中心を原点として極座標 (r, θ) を導入する。液滴の周辺形状を $R(r, t)$ 、厚さを $h(r, \theta, t)$ 、液滴内部の速度ポテンシャルを $\phi(r, \theta, t)$ 、蒸発する液滴の下向き速度を $w(r, \theta, t)$ 、蒸気層の平均流速を $\bar{u}(r, \theta, t)$ と書く。簡単のために、蒸気層の厚さ D は D_0 で一定とする。物質定数としては、液体の密度を ρ_L 、液滴の下面の温度 T_0 での飽和蒸気圧密度を ρ_0 、蒸気層の平均温度を $\bar{\rho}$ 、蒸気の粘性係数を μ 、表面張力係数を $\sigma(r, \theta, t)$ 、熱伝導係数を k 、潜熱を \mathcal{L} 、蒸気層の定積比熱を C_V とする。液滴の平均厚さ h_0 と平均半径 R_0 の比であるアスペクト比を $H = h_0/R_0$ とする。蒸気層間の温度差は加熱面の温度 T_1 と T_0 を用いて $\Delta T = T_1 - T_0$ とする。また、重力加速度は g 、大気圧は p_{atm} と表わす。

液滴の下の蒸気層 (vapor phase) の2次元の流れを支配する方程式を、以下に挙げる。連続の式、および圧力の釣り合いの式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_0\bar{\rho}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}}D_0) = w\rho_0, \quad (1)$$

$$p_g = \rho_Lgh - \sigma\nabla^2h + p_{atm}, \quad (2)$$

と表わせる。蒸気の流速は、Hele-Shaw 流の式を適用し、静止した加熱面と速度 $\nabla\phi$ で動く液滴下面の間を蒸気が流れるとして、Poiseuille 流と平面 Couette 流の重ね合わせで次のように近似できる。

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{D_0^2}{12\mu}\nabla p_g + \frac{1}{2}\nabla\phi, \quad (3)$$

液滴の下面で成り立つエネルギーの釣合の式は

$$k\frac{\Delta T}{D_0} = w\rho_0\left(\mathcal{L} + \frac{\Delta T}{2}C_V\right) \quad (4)$$

である。

液滴内 (liquid phase) の流れに対しては、連続の式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\nabla\phi) = 0 \quad (5)$$

となる。液滴の運動方程式は、液体内部では粘性摩擦は働かないが、蒸気層内の速度勾配に起因する摩擦が液滴下面から働くと仮定する。これから、修正された Euler 方程式

$$\rho_L h \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_L h \nabla_i \phi \nabla_i \cdot \nabla \phi = -\nabla P + \frac{6\mu}{D_0} \left(\bar{\mathbf{u}} - \frac{2}{3} \nabla \phi \right) \quad (6)$$

が成り立つ。ここで、蒸気の流速 $\bar{\mathbf{u}}$ は (3) 式で与えられるので、液滴内部はポテンシャル流のままであることを注意しておく。液滴内の圧力は、静水圧および表面張力の影響を考慮して、

$$P = \frac{1}{2}\rho_Lgh^2 - \sigma h\nabla^2h + p_{atm}h \quad (7)$$

とする。ただし、液滴に対する連続の式と Euler 方程式、圧力の式は、高さ方向には積分してある。

液滴の周辺部の境界条件として、周辺における表面張力と圧力の釣り合いの式

$$P - p_{atm}h = \frac{1}{2}\rho_Lgh^2 - \sigma h\nabla^2h = h\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Big|_{r=R}, \quad (8)$$

および、平面形の輪郭の変動に対する運動学的条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{r=R} \quad (9)$$

を課す. ここで, R_1, R_2 は液滴の周辺部分における主曲率半径である.

ここで, 境界条件を適用する位置について注意する必要がある. “液滴の周辺部” を $r = R$ と記述したが, これは正確な表現ではない. なぜなら, 液滴を横からみると周辺部はほぼ半円形に膨らんでおり, 高さ h と同程度の幅を持つからである (Fig. 4 参照). そこで周辺を垂直な壁と仮定し, 体積が保存されるよう

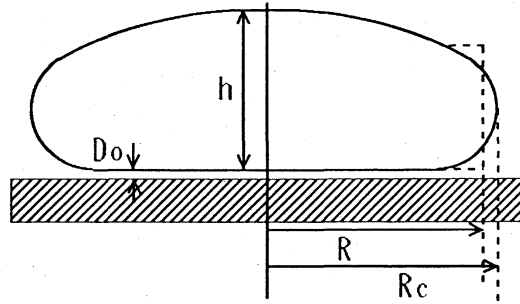


Fig. 4: Cross section of a liquid drop

に位置を決めて, その位置を改めて “液滴の周辺部” とし, そこで境界条件を適用することにする. 最も膨らんだ先端部分 (平面形の輪郭) の半径を $R_c(\theta, t)$, “周辺部” と定義した半径を $R(\theta, t)$ と表わすと,

$$R_c(\theta, t) = R(\theta, t) + \beta h(R, \theta, t), \quad \left(\beta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \quad (10)$$

である.

3.2 無次元化 (Normalization)

表面張力係数の代表的な値 (沸点における値) σ_0 と, 液滴の平面形の平均半径 R_0 を用いて時間スケール $t_0 = \sqrt{\rho_L R_0^3 / \sigma_0}$ を定義する. 変数を R_0 と t_0 で無次元化し, 変動量を平均値と摂動量に分ける. すると, それぞれの変数は

$$r = R_0 r^*, \quad \theta = \theta^*, \quad t = t_0 t^*, \quad (11)$$

$$(\bar{\mathbf{u}}, w, \nabla \phi) = \frac{R_0}{t_0} (\bar{\mathbf{u}}^*, w^*, \nabla^* \phi^*), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} h &= h_0 h^* = h_0 (1 + \tilde{h}), \\ R &= R_0 R^* = R_0 (1 + \tilde{R}), \\ \sigma &= \sigma_0 \sigma^* = \sigma_0 (1 + \tilde{\sigma}) \end{aligned} \quad (13)$$

と表される. ここで, 添え字の $*$, $\tilde{\cdot}$, 0 のついている量は, それぞれ無次元量, 摂動量, 平均値である.

3.3 弱非線形近似 (Weakly nonlinear approximation)

有限振幅の定常振動を議論するためには非線形項を残しておく必要があるが、それらすべてを考慮するのは、方程式が複雑になりすぎて困難である。そこで、表面張力の変動が最も重要であるという観点から、 $\tilde{\sigma}$ を含む2次の項は残し、それ以外の非線形項は無視するという一種の弱非線形近似を行う。これによって現実の液滴の振動の特性は残り、かつ有限振幅振動の解析が可能になる。この近似により、基礎方程式(1)～(7)は、

$$\nabla^* \bar{\mathbf{u}}^* = \frac{R_0 \rho_0}{D_0 \bar{\rho}} w^*, \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^* = -A' \nabla^* \{G \tilde{h} - (1 + \tilde{\sigma}) \nabla^{*2} \tilde{h}\} + \frac{1}{2} \nabla^* \phi^*, \quad (15)$$

$$w^* = \frac{kt_0}{D_0 R_0 \rho_0} \left(\frac{\mathcal{L}}{\Delta T} + \frac{C_V}{2} \right)^{-1} = \text{const.}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t^*} + \nabla^{*2} \phi^* = 0, \quad (17)$$

$$\nabla^* \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \frac{h_0}{R_0} \{G \tilde{h} - \nabla^{*2} \tilde{h}\} - A'' (\bar{\mathbf{u}}^* - \frac{2}{3} \nabla^* \phi^*) \right] = 0 \quad (18)$$

となり、境界条件は、

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \left. \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t^*} \right|_{r^*=1} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & G \tilde{h} - (1 + \tilde{\sigma}) \nabla^{*2} \tilde{h} \\ &= \frac{1}{H} (1 + \tilde{h}) (1 + \tilde{\sigma}) \\ & \times \left\{ \frac{2}{H} (1 - \tilde{h}) + \frac{1}{1 + \beta H} \left(1 - \frac{\tilde{R} + \beta H \tilde{h}}{1 + \beta H} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(1 + \beta H)^2} \left(1 - \frac{\tilde{R} + \beta H \tilde{h}}{1 + \beta H} \right)^2 \frac{\partial^2 (\tilde{R} + \beta H \tilde{h})}{\partial \theta^{*2}} \right\} \Big|_{r^*=1} \\ &= \frac{\tilde{\sigma}}{H} \left\{ \frac{2}{H} + \frac{1}{(1 + \beta H)} \right\} + \frac{1}{H} (1 + \tilde{\sigma}) \left\{ \frac{\tilde{h}}{(1 + \beta H)} - \frac{(1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}})}{(1 + \beta H)^2} (\tilde{R} + \beta H \tilde{h}) \right\} \Big|_{r^*=1}, \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ただし A' , A'' , G は、次式で定義される無次元定数である。

$$A' = \frac{\sigma_0 D_0^2 h_0 t_0}{12 \mu R_0^4}, \quad A'' = \frac{6 \mu t_0}{\rho_L h_0 D_0} = \frac{D_0}{2 R_0 A'}, \quad G = \frac{\rho_L g R_0^2}{\sigma_0}.$$

式 (18) は, 空間座標で一回積分される. 積分された式は変動が 0 の場合も成り立つべきであるから, 積分定数は 0 としてよい. 積分した式に (15) を代入し, (20) を適用すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \left(h_0 + \frac{D_0}{2}\right) \frac{1}{R_0} \frac{\tilde{\sigma}}{H} \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1 + \beta H}\right) \\ & + \left(h_0 + \frac{D_0}{2}\right) \frac{1}{R_0} \frac{1}{H} \left\{ \frac{\tilde{h}}{(1 + \beta H)} - \frac{(1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}})}{(1 + \beta H)^2} (\tilde{R} + \beta H \tilde{h}) \right\} + \frac{A''}{6} \phi^* \Big|_{r^*=1} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となる.

参考文献 [10] にならって, $\phi^*(r^*, \theta^*, t^*)$ の関数形として r^* 方向は Bessel 関数で表わし, θ^* 方向には n 回の回転対称性を持ち, 振幅が時間的に変動すると仮定する. すなわち,

$$\phi^* = \frac{d}{dt^*} a(t^*) J_n(wr^*) e^{in\theta^*} \quad (22)$$

とおく. すると, \tilde{h} , \tilde{R} は, (17), (19) より, それぞれ

$$\tilde{h} = a(t^*) w^2 J_n(wr^*) e^{in\theta^*}, \quad (23)$$

$$\tilde{R} = a(t^*) \left[n - \frac{w^2}{2(n+1)} \right] J_n(wr^*) e^{in\theta^*} \simeq a(t^*) \left[n - \frac{w^2}{2(n+1)} \right] J_n(w) e^{in\theta^*} \quad (24)$$

と表せる. これらを (21) に代入すると, 振幅 $a(t^*)$ に対する 2 階の非線形微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} a(t^*) + C_1 \frac{d}{dt^*} a(t^*) + C_2 (1 + \tilde{\sigma}) a(t^*) + C_3 \tilde{\sigma} = 0 \quad (25)$$

を得る. ここで,

$$C_1 = \frac{A''}{6},$$

$$C_2 = \left(h_0 + \frac{D_0}{2}\right) \frac{1}{h_0} \left\{ \frac{w^2}{(1 + \beta H)} - \frac{(1 - n^2)}{(1 + \beta H)^2} \left(n - \frac{w^2}{2(n+1)} + \beta H w^2 \right) \right\}, \quad (26)$$

$$C_3 = \left(h_0 + \frac{D_0}{2}\right) \frac{1}{h_0} \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1 + \beta H} \right) [J_n(w) e^{in\theta^*}]^{-1}$$

である.

3.4 振幅方程式の解析および結果 (Analysis of amplitude equation)

表面張力の変動 $\tilde{\sigma}$ と $a(t^*)$, da/dt^* の関係が線形

$$\tilde{\sigma} = -\delta \frac{da(t^*)}{dt^*} \quad (27)$$

で与えられると仮定する. すると, 方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^{*2}}a(t^*) + (C_1 - C_3\delta - C_2\delta a(t^*))\frac{d}{dt^*}a(t^*) + C_2a(t^*) = 0 \quad (28)$$

となる. この式は変数 $a(t^*)$ に対する振動型の力学系を表す. この力学系のエネルギーは,

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{da(t^*)}{dt^*}\right)^2 + \frac{1}{2}C_2a(t^*)^2 \quad (29)$$

であり, 1 周期後のその増加は, 1 周期にわたる積分を用いて

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\int (C_1 - C_3\delta - C_2\delta a(t^*))\left(\frac{d}{dt^*}a(t^*)\right)^2 dt^* \\ &= -(C_1 - C_3\delta)\int\left(\frac{d}{dt^*}a(t^*)\right)^2 dt^* + C_2\delta\int a(t^*)\left(\frac{d}{dt^*}a(t^*)\right)^2 dt^* \end{aligned} \quad (30)$$

と表わされる. 右辺第 1 項の積分部分は常に正であり, 第 2 項は $a(t^*)$ が単振動に近いとするとほぼ 0 になることが予想される. したがって, 振動は $C_1 - C_3\delta$ の符号により増減あるいは中立安定となるが, このモデルでは有限な定常振幅の値は予言されない.

ここで, 第 2 節のモデルに従って表面張力の変動 $\tilde{\sigma}$ と $a(t^*)$, da/dt^* の関係を与える必要がある. 液滴の周辺部が出っ張ろうとするとき ($da/dt^* > 0$), それを取り囲む蒸気層は瞬間的に薄くなり, また引っ込むとき ($da/dt^* < 0$) には伴流領域はすぐ形成されると考えると, 温度変動は瞬時に起こると仮定してよいだろう. この物理的予想を活かし, かつ簡単のために, 表面張力係数を 2 値のみで,

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \tilde{\sigma}_+ = 0 & \left(\frac{da}{dt^*} \geq 0\right) \\ \tilde{\sigma}_- = q & \left(\frac{da}{dt^*} < 0\right) \end{cases} \quad (31)$$

とする. ただし, $q > 0$ である. 以下で, このモデルにより振動の安定性を解析する.

振動の安定性は, 変位 a に初期振幅 c を与えたときの 1 周期後の振幅 c' を, 式 (25) を用いて調べればよい. (31) 式より, 1 周期の間に $\tilde{\sigma}$ の値が変化するので, 振動の周期を t_2 とし, $0 \leq t^* \leq t_1$ で $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_-$, $t_1 < t^* \leq t_2$ で $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_+$ とする. $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_\pm$ のときの振幅方程式 (25) の解を $a_\pm(t^*)$ と表わす. $a_\pm(t^*)$ は, それぞれ定数係数の方程式に従うので, 次のように解析的に求められる.

$$a_\pm = \exp\left[-\frac{C_1 t^*}{2}\right] \times \left\{ \alpha_\pm \cos \frac{\Omega_\pm t^*}{2} + \beta_\pm \sin \frac{\Omega_\pm t^*}{2} \right\} - \frac{\tilde{\sigma}_\pm C_3}{C_2(\tilde{\sigma}_\pm + 1)}, \quad (32)$$

$$\Omega_\pm = \sqrt{4C_2(\tilde{\sigma}_\pm + 1) - C_1^2}. \quad (33)$$

ただし α_\pm, β_\pm は未定係数である.

時刻 $t^* = 0$ の値, および $t^* = t_1$ での連続の条件から, 未定係数 $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}$, および t_1, t_2 は全て決定される. これより, $t^* = t_2$ における変位は

$$\begin{aligned} a_+(t^* = t_2) &= c' \\ &= \exp\left[-\pi C_1\left(\frac{1}{\Omega_+} + \frac{1}{\Omega_-}\right)\right] \frac{c C_2(\tilde{\sigma}_- + 1) + \tilde{\sigma}_- C_3}{C_2(\tilde{\sigma}_- + 1)} \\ &\quad + \exp\left[-\frac{\pi C_1}{\Omega_+}\right] \frac{C_3(\tilde{\sigma}_- - \tilde{\sigma}_+)}{C_2(\tilde{\sigma}_- + 1)(\tilde{\sigma}_+ + 1)} - \frac{C_3 \tilde{\sigma}_+}{C_2(\tilde{\sigma}_+ + 1)} \end{aligned} \quad (34)$$

と得られる. ここで

$$\Omega_+ = \sqrt{4C_2 - C_1^2}, \quad \Omega_- = \sqrt{4C_2(q+1) - C_1^2} \quad (35)$$

である.

振幅の増減は差 $c' - c$ によって判断できる. 式 (34) に $\tilde{\sigma}_+ = 0, \tilde{\sigma}_- = q$ を代入することにより, この差は,

$$c' - c = c\left(\exp\left[-\pi C_1\left(\frac{1}{\Omega_+} + \frac{1}{\Omega_-}\right)\right] - 1\right) + q\left(\exp\left[-\frac{\pi C_1}{\Omega_-}\right] + 1\right) \frac{C_3}{C_2(q+1)} \quad (36)$$

となる. この差は, 次式のように初期値 c の値によって符号が異なってくる.

$$c' - c \begin{cases} < 0 & (c > c_s), \\ = 0 & (c = c_s), \\ > 0 & (c < c_s). \end{cases} \quad (37)$$

ただし, c_s の値は,

$$c_s = q \frac{C_3(\exp[\frac{\pi C_1}{\Omega_-}] + 1)}{C_2(\exp[\pi C_1(\frac{1}{\Omega_+} + \frac{1}{\Omega_-})] - 1)(q+1)} \quad (38)$$

である.

式 (24) より, 定常振動の振幅 \tilde{R}_s に換算すると

$$\tilde{R}_s = c_s \left[n - \frac{w^2}{2(n+1)} \right] J_n(w) e^{in\theta^*} \quad (39)$$

となる. 式 (37) から明らかなように, $c < c_s$ の攪乱は有限振幅 $\tilde{R}_s(c_s)$ の振動に成長し, その後, 安定に持続する.

\tilde{R}_s の値は, 表面張力の変動量 q に依存し, また, 係数 C_2, C_3 を通して n や w にも依存する. モード数 $n = 2 \sim 6$ の蒸留水の場合について (38) から数値的に計算した \tilde{R}_s と q の関係を Fig. 5 に示す. ただし, 周辺が出っ張っていくときの温度を 100°C , それに応じて表面張力係数の基準の値を $\sigma_0 = 0.05884$ とし

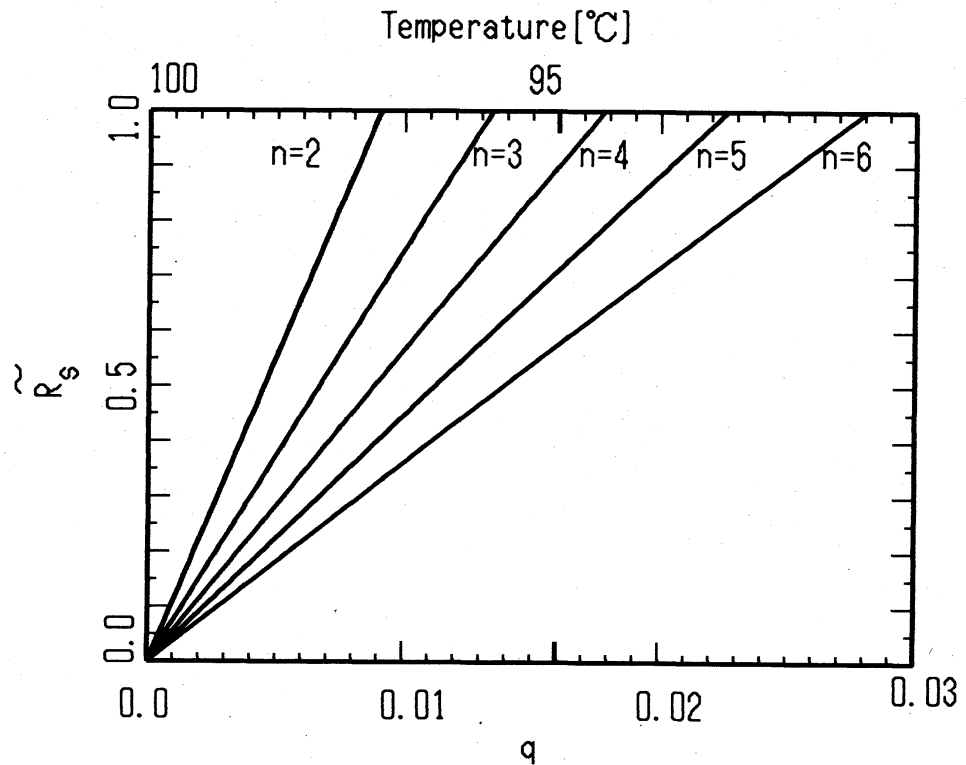


Fig. 5: Dependence of vibration amplitude on the value of q (surface tension variation)

た. この図から q が大きい方が振幅が大きいことがわかるが, これは予想された結果である.

式 (38) の結果と, 著者らによるビデオから求めた振幅の測定値を比較したのが Fig. 6 である. ただし, q の値を自由パラメーターとしたが, $q = 0.0024$ (引っ込むときの表面温度を 99.25°C とすることに対応) としたときの振幅の理論値が測定値とほぼ一致することがわかる.

この結果から, 液滴の周辺部分が出るときに高温, 引っ込むときに低温になると仮定すると, 安定な有限振幅の振動解がおこることが結論される. 逆に, 周辺部が出るときに低温, 引っ込むときに高温になると仮定した場合 ($q < 0$) には, 振動は常に減衰することが (36) から簡単にわかる.

出っ張っていくときの温度を 100°C としたとき, 振幅の計算結果と測定値との比較から, 引っ込むときの温度が 99.25°C と推定できる.

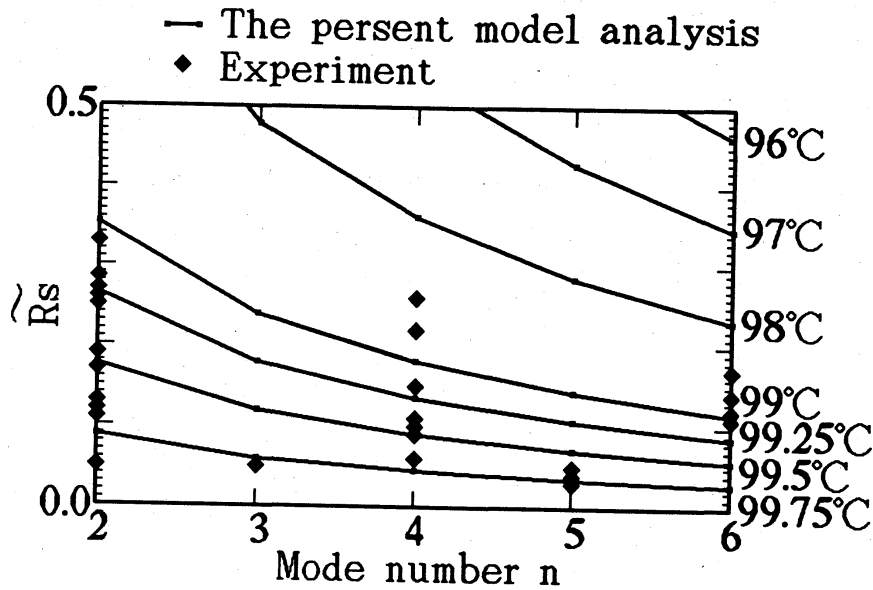


Fig. 6: Theoretical and experimental values of amplitude in steady vibration

4 モード間相互作用 (Mode interaction)

モード間の相互作用を調べるために、 ϕ^* の関数形として (22) の代わりに複数のモードの重ね合わせ

$$\phi^* = \sum_n [\dot{A}_{1,n} \cos n\theta^* + \dot{A}_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(wr^*) \quad (40)$$

で表す。 \tilde{h} , \tilde{R} は、これまで同様、(17) , (19) より、それぞれ

$$\tilde{h} = \sum_n w^2 [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(wr^*), \quad (41)$$

$$\tilde{R} = \sum_n \left[n - \frac{w^2}{2(n+1)} \right] [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) \quad (42)$$

となる。

これらを用いると、振幅方程式は

$$\begin{aligned} & \sum_n [\ddot{A}_{1,n} \cos n\theta^* + \ddot{A}_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) \\ & + C_1 \sum_n [\dot{A}_{1,n} \cos n\theta^* + \dot{A}_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) \\ & + C_2(1 + \tilde{\sigma}) \sum_n [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) + C_3 \tilde{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

となる。Fourier 変換を行うことにより、それぞれのモードの振幅に対する二階の非線形微分方程式

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{1,m} + C_1 \dot{A}_{1,m} \\ + \frac{1}{J_m(w)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \cos m\theta^* \left\{ C_2(1 + \tilde{\sigma}) \sum_n [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) \right\} \\ + \frac{1}{J_m(w)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \cos m\theta^* \{ C_3 \tilde{\sigma} \} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{2,m} + C_1 \dot{A}_{2,m} \\ + \frac{1}{J_m(w)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \sin m\theta^* \left\{ C_2(1 + \tilde{\sigma}) \sum_n [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w) \right\} \\ + \frac{1}{J_m(w)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \sin m\theta^* \{ C_3 \tilde{\sigma} \} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ここで、 $\tilde{\sigma}$ は $\dot{A}_{i,n}$ の重ね合わせからそれぞれの θ^* での速度を求め、その正負によって大きさを決定する。上記の方程式は、 $\tilde{\sigma}$ と $\dot{A}_{i,n} \tilde{\sigma}$ の積分を含む。これらの積分を解析的に行うのは困難なので、振幅方程式 (44), (45) を数値的に解かねばならない。Fourier 積分には台形公式を用い、 $A_{i,m}$ の時間発展は Runge-Kutta-Gill 法を用いて調べた。

$$a_n = \sqrt{A_{1,n}^2 + A_{2,n}^2}$$

とし、 a_2, a_3, a_4 軸の張る空間の中での解の挙動を調べた結果を Fig. 7 に示す。図中の曲線は、ある初期値から出発した解に時間発展を示す。実線は 1 つの座標軸上、あるいは 2 つの座標軸の張る面内の解を表し、破線は 3 次元的な解の動きを示す。この図からわかるように、最初振幅 0 であったモードは増幅されない。また計算した全ての解はそれに含まれる最大の n のモードに対応する軸上の一点に集まるように見える。この値は、単一のモードの解析解の振幅 (39) に対応している (本節では角度について Fourier 積分しているので、3 節の値を定数倍下値になっている)。この結果より q の値や初期値によらず、0 でない初期値を与えたモードに含まれる n が最大の振動に落ち着くという傾向が得られた。

5 おわりに (Concluding remark)

前節の結果からは、振動モードの選択の温度や半径、物質依存性を示唆する結果は得られなかった。その理由として、モード間の相互作用が表面張力係数を通してのみ行われ、直接の相互作用が考慮されていないことが挙げられる。2 次以上の非線形項を考慮し、直接の相互作用を取り入れた議論を行うことによりモード選択則への理解が深まることが期待される。

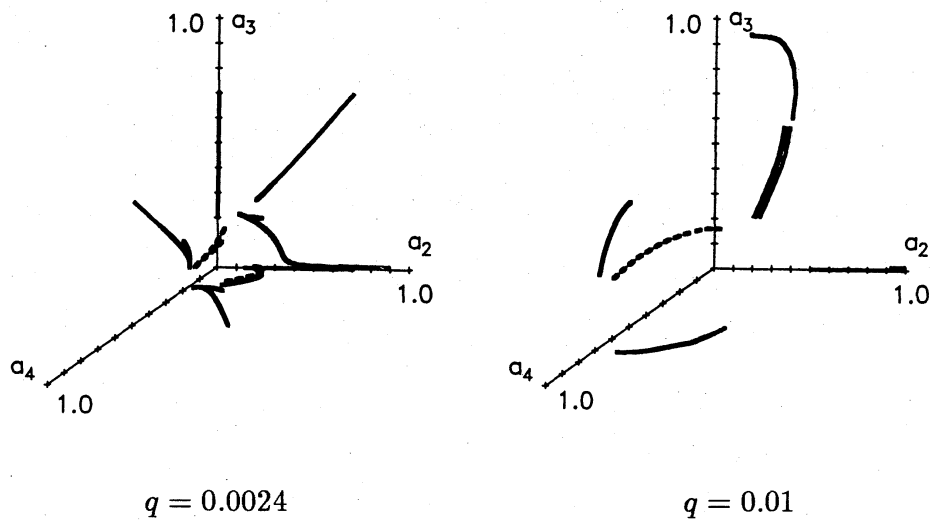


Fig. 7: Trajectory of solution with mode interaction

参考文献

- [1] K. Adachi and R. Takaki : J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 4184
- [2] N. Yoshiyasu, K. Adachi, R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 2314
- [3] N. Tokugawa : Master Thesis (1992)
- [4] N. Tokugawa and R. Takaki : Proc. KIT Workshop, 1991, ed. S. Kai (World Scientific, 1992) 211
- [5] Lord Rayleigh : *On The Instability of Jets* Proc.R.Soc.London **10** (1879) 4
- [6] Lord Rayleigh : *On The Capillary Phenomena of Jets* Proc.R.Soc.London **29** (1879) 71
- [7] R. Takaki and K. Adachi : J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 2462
- [8] R. Takaki, A. Katsu, Y. Arai and K. Adachi : J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 129
- [9] 徳川直子, 高木隆司 : 信学技報 TECHNICAL REPORT OF IEICE. NLP93-9 (1993-05)
- [10] N. Tokugawa, R. Takaki : J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 1758