数理解析研究所講究録
第 889 巻 1994 年 77-84

非線形可積分系の差分化とその現状

辻本 諭　　広田良吾
Satoshi TSUJIMOTO, Ryogo HIROTA

早稲田大学理工学部
School of Science and Engineering, Waseda University

1 可積分系

可積分系と呼ばれる方程式の持つ性質として、以下のものなどが考えられる。

1.1 常微分方程式

- 厳密解
- 保存量
- パンルベ性

1.2 偏微分方程式

- 厳密解 (N-ソリトン解)
- 無限個の保存量
- Lax-pair
- パンルベ性

ここでは、N-ソリトン解を持つことを可積分系の判定条件として用いる。

2 差分化

2.1 何故差分か？

ソリトン方程式が差分化できると、ソリトンと関連する諸分野の差分化も可能になる !? ソリトンと関連する分野を列記する。

2.1.1 ソリトン理論と微分幾何学

A.K.N.S 外微分形式

$$\mathrm{d}\hat{y} = \Omega\hat{y} \to \mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

Hashimoto
渦糸の運動と Nonlinear Schrödinger Eq.

- Lie-Bäcklund 変換
  Sine-Gordon Eq.[1)]
- Higher order Symmetries と保存量

2.1.2 Sato 理論

形式的擬微分作用素

$$L = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots$$
$$B_n = (L)_+$$

Lax 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Sato 方程式

$$W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial^n$$
$$B_n \equiv (W\partial^n W^{-1})_+$$

t_nを差分化するのが難しい。

2.1.3 ソリトン理論の Hamilton 形式

運動方程式の差分化

$$\begin{cases} \text{エネルギー保存} \\ \text{保則性 (dpdq= 不変)} \end{cases}$$

ハミルトン形式とラグランジュ形式

次の戸田方程式は、Flaschka によって以下のような Matrix 方程式として、提出されている。戸田方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}Q_n(t) = V_{n+1}(t) - 2V_n(t) + V_{n-1}(t) \\ Q_n(t) = \log V_n(t) \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V_n(t) = V_n(t)[J_n(t) - J_{n+1}(t)] \\ \frac{d}{dt}J_n(t) = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$$

2.1.4 Matrix equation

(Flaschka)

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \mathbf{0} \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathbf{0} & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathbf{0} \\ -b_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathbf{0} & & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

この形式の差分化として次のものが得られている。

2.1.5 Discrete-time Matrix equation

$$A(t+\delta) = L^{-1}(t)A(t)L(t)$$

$$\text{where} \quad A(t) = L(t)R(t)$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ \delta V_1(t) & 1 & & & & \\ & \delta V_2(t) & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & \delta V_{N-1}(t) & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) & \delta & & & \mathbf{0} \\ & I_2(t) & \delta & & \\ & & I_3(t) & \ddots & \\ & & & \ddots & \delta \\ \mathbf{0} & & & & I_N(t) \end{pmatrix}$$

- Conserved Quantities
  上記の Matirx 形式から高次の保存量が次式により得られる。

$$H_m(t) = Tr(A^m(t))$$

この Matrix 形式とある行列の固有値をもとめる LR 法とは以下のように関係している[2)]。

2.1.6 LR Factorization method

$$A(t) = L(t)R(t)$$
$$A(t+\delta) = L^{-1}(t)A(t)L(t)$$

$$\begin{aligned} A(t+1) &\equiv L(t+1)R(t+1) \qquad\qquad (\delta = 1) \\ &= R(t)L(t) \end{aligned}$$

$$L(t)R(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_1(t)V_1(t) & I_2(t)+V_1(t) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_2(t)V_2(t) & I_3(t)+V_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{N-1}(t)+V_{N-2}(t) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{N-1}(t)V_{N-1}(t) & I_N(t)+V_{N-1}(t) \end{pmatrix}$$

Calculation of eigenvalues of tri-diagonal matrix A is equivalent to solve the discrete Toda molecule equation.

$$\begin{cases} I_n(t+1)V_n(t+1) &= I_{n+1}(t)V_n(t) \\ I_n(t+1) - I_n(t) &= V_n(t) - V_{n-1}(t+1) \end{cases}$$

2.1.7 ソリトン方程式のパンルベ性

ある偏微分方程式が可積分かどうかを判定する方法として、パンルベテストが知られている。これを偏微分方程式に拡張したらどうなるかという問題が残されている。この問題に対する作業仮説が Grammaticos らによって "Singularity confinement" と呼ばれるものが提出された[3)]。この方法は、多くの可積分な差分系に対し有効であることが分かってきたが、その数学的基礎付けはまだ不明である。

2.1.8 ソリトン理論と特殊関数

ソリトン方程式の中に特殊関数が埋め込まれていることが、Akira Nakamura, Yoshinori Kametaka , 両氏らの論文により知られている。

ソリトン方程式を差分化することによって差分化された特殊関数が自然に埋め込まれていることが予想される。

2.2 差分化の手段

2.2.1 双線形化法

ソリトン方程式の差分化は、次の手続きに沿って行なわれる[2)]。
A Systematic Method of Discretization of Integrable Systems.

非線形偏微分方程式		非線形偏差分方程式
‖		⇑
従属変数変換		従属変数変換
⇓		‖
双線形微分方程式	⟹	双線形差分方程式

2.3 ソリトン方程式の差分化はどこまで成功しているのか？

以下に、その差分化に成功した例を挙げる。

- KdV 方程式
- Sine-Gordon 方程式
- 2-D Toda 方程式

  $\left\{\begin{array}{l}\text{格子方程式}\\ \text{分子方程式}\end{array}\right.$
- KP 方程式系
  解の表示 Ohta et al. [4)]
- BKP 方程式系　　Tsujimoto et al.
- 2N-wave Interaction　　Imai et al.
- Lotka-Volterra Eq.　　Hungry Volterra Eq.
- Nonlinear Schrödinger Equation
- Coupled Modified KdV Equation
- Coupled Nonlinear Schrödinger Equation

3 展望

KdV 方程式

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx} \tag{1}$$

の Rank は

$$H_1 = \int (\frac{1}{2}u^2)dx$$
$$H_2 = \int (u^3 - \frac{1}{2}u_x^2)dx$$

u を 2 次,$\frac{\partial}{\partial x}$を 1 次, $\frac{\partial}{\partial t}$を 3 次とする Rank 5 の斉次方程式と考えることができる。
本節では、これらの概念が差分系において成立するのか見てみたいと思う。

3.1 Semi Discrete

3.1.1 Hamiltonian 構造

KdV 方程式の空間差分された方程式でもある Lotak-Volterra 方程式

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

は、次のような、skew symmetric である operator $\mathbf{B}_0$

$$\mathbf{B}_0 = u_n(e^{\partial_n} - e^{-\partial_n})u_n$$

を用いて、次のような Hamiltonian 形式

$$u_t = \mathbf{B}_0 \frac{\delta_d}{\delta_d u_n} u_n \tag{2}$$

で表わすことが可能である。ここで、$\frac{\delta_d}{\delta_d u_n}$は差分系におけるオイラー演算子である。

$$\frac{\delta_d}{\delta_d u_n} = \sum_i e^{-i\partial n} \frac{\partial}{\partial u_{n+i}}. \tag{3}$$

この方程式の高次方程式は

$$\frac{d}{dt_k} u_n = \mathbf{B}_0 \frac{\delta_d}{\delta_d u_n} \mathcal{H}_k$$

に従って計算することができる。例えば、二次の保存密度

$$\mathcal{H}_2 = u_{n-1}u_n + u_n^2 + u_n u_{n+1}$$
$$\frac{\delta_d}{\delta_d u_n} \mathcal{H}_2 = 2u_{n-1} + 2u_n + 2u_{n+1}$$

により、

$$\frac{d}{dt_2}u_n = u_n[u_{n-1}(u_{n-2}+u_{n-1}+u_n) - u_{n+1}(u_{n+2}+u_{n+1}+u_n)] \tag{4}$$

高次方程式が得られる。この式は、$\mathbf{B}_0$と異なる skew symmetric operator $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{B}_1 = u_n[(u_n+u_{n+1})e^{\partial_n} + u_{n+1}e^{2\partial_n} - (u_n+u_{n-1})e^{-\partial_n} - u_{n-1}e^{-2\partial_n}]u_n$$

を用意することにより、2つの異なる Hamiltonian form で

$$u_{t_2} = \mathbf{B}_0\frac{\delta_d}{\delta_d u_n}\mathcal{H}_2 = \mathbf{B}_1\frac{\delta_d}{\delta_d u_n}\mathcal{H}_1 \tag{5}$$

表わせる。

一般的に、この方程式は、再帰的に定義される無限のヒエラルヒーに

$$\frac{d}{dt_{n+1}}u_n = \mathbf{B}_0\frac{\delta_d}{\delta_d u_n}\mathcal{H}_{n+1} = \mathbf{B}_1\frac{\delta_d}{\delta_d u_n}\mathcal{H}_n$$

属している。そして、recursion operator$\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^{-1}$$

で定義できる。

Volterra 方程式のヒエラルヒーは、$\mathbf{K}_0[u] \equiv u_n(u_{n+1}-u_{n-1})$ とかくと

$$\begin{aligned} u_{t_1} &= \mathbf{K}_0[u] = \mathbf{B}_0\delta\mathcal{H}_1 \\ u_{t_2} &= \mathbf{K}_1[u] = \mathbf{B}_0\delta\mathcal{H}_2 = \mathbf{B}_1\delta\mathcal{H}_1 \\ u_{t_n} &= \mathbf{K}_{n-1}[u] \end{aligned}$$

$\mathbf{R} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^{-1}$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{R}\mathbf{K}_n$$

が得られる

Volterra 系の recursion operator を実際に書き下す。

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^{-1} \\ \mathbf{B}_0 &= u_n\Delta u_n, \\ \mathbf{B}_1 &= u_n[(u_n+u_{n+1})e^{\partial_n} + u_{n+1}e^{2\partial_n} - (u_n+u_{n-1})e^{-\partial_n} - u_{n-1}e^{-2\partial_n}]u_n, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0^{-1} &= \frac{1}{u_n}\Delta^{-1}\frac{1}{u_n}, \\ \Delta &= e^{\partial n} - e^{-\partial u}, \\ \Delta^{-1} &= e^{-\partial_n} + e^{-3\partial_n} + e^{-5\partial_n} + \cdots. \end{aligned}$$

この結果を用いて、無限個の保存則を得ることができる。

3.2 Discrete

時間まで差分化された Volterra 方程式

$$\frac{u_n^{t+1}}{u_n^t} = \frac{1+\delta u_{n+1}^t}{1+\delta u_{n-1}^{t+1}} \tag{6}$$

に対しては、前節で用いた手法をそのまま適用することはできない。しかし、保存則に関する結果を緩用することにより、上式の無限個の保存則を得ることができる。

References

[1] A.Bobenko and U.Pinkall. Discrete surfaces with constant nagative gaussian curvature and the hirota equation, 1994. SFB 288 Preprint No.127.

[2] R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai. Difference scheme of soliton equations. In P.L.Christiansen, J.C.Eilbeck, and R.D.Parmentier, editors, *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physics and Biological Systems*, volume 312 of *Series B:Physics*, pages 7–15. Plenum, 1992.

[3] A.Ramani, B.Grammaticos, and J.Hietarinta. Discrete versions of the painlevé equations. *Phys.Rev.Lett.*, 67:1829–1832, 1991.

[4] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai. Casorati and discrete gram type determinant representations of solutions to the discrete kp hierarchy. *J.Phys.Soc.Jpn.*, 62:1872–1886, 1993.