

## 複数のソリトンの相互作用について

栄 伸一郎 (Ei Shin-Ichiro) (横浜市立大学総合理学研究科)

### 1 序

可積分系、あるいはそれに散逸的な摂動の加わった方程式に対して、その方程式を時間発展の初期値問題として捉え、解の挙動を考察したい。ところで解の時間発展の挙動を考察するとき、解の持つ自由度が有限である場合がある。例えば散逸系であれば、任意の初期値から出発した解の自由度が時間と共に減少し、最終的に有限の自由度しかなくなることがある。これは、関数空間内に、時間に関して正不変な、ある有限次元的な曲面が存在し ( $\Gamma$  とする)、任意の初期値から出発した解が  $t \rightarrow \infty$  で  $\Gamma$  上のある軌道に漸近していくことであると考えられる (Fig.1)。従って解の漸近挙動は、元の方程式を  $\Gamma$  上に制限することによって得られる方程式によって記述される。 $\Gamma$  が有限次元であるため、その方程式は常微分方程式となる。このように元の偏微分方程式が、より自由度の低い方程式に帰着されることを”縮約”と呼ぶ。

方程式が可積分系の場合は、無限の保存量があるためそのような曲面  $\Gamma$  は存在しない。しかしながら、ある特定の初期値のクラスから出発した解を考えると、初期値依存ではあるが、先述の  $\Gamma$  に似た性質を持つ曲面が存在し得る (Fig.2)。従って解の挙動はある意味でその曲面上の運動に縮約される。ここではこのような立場で、[1] に沿って KdV 方程式、或いはその摂動系の解の時間発展の挙動を考察することにしよう。

### 2 初期値問題

ここで考える方程式は

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \epsilon Ru = 0, \tag{1}$$

ただし  $x \in I = [0, L], 0 < \epsilon \ll 1, Ru = u_{xx} + u_{xxxx}$  とし、 $I$  上周期境界条件を課することにする。また  $L$  は十分大とする。 $\epsilon = 0$  のとき (1) は可積分系の方程式である KdV 方程式となり、 $\epsilon > 0$  のとき (1) は液膜流上を伝わる長波長の不安定波の近似方程式として知られる Benney 方程式となる。これは非可積分である。(1) に対して次のような初期値問題を考えることにする。

$\varphi(z; c) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{c}}{2}z)$  とおく。これは  $\mathbf{R}$  上の KdV 方程式の速度  $c$  に対応する 1-soliton 解である。 $\varphi(z; c)$  は  $z$  に関して指数減衰しているため、 $\varphi(z; c)$  の値が十分小さくなったところで適当に cut off したものを改めて  $\varphi(z; c)$  と表すことにする。 $x_1, x_2 \in I$  を十分離れた  $I$  上の 2 点とし、

$$u_0(x) = \varphi(x - x_1; c_1) + \varphi(x - x_2; c_2)$$

とおく (Fig.3)。 $u_0(x)$  を初期値とする (1) の解の挙動を考えよう。

まず  $\epsilon = 0$  (KdV 方程式) のときを考えることにする。このとき例えば  $c_1 > c_2$  であれば、速度  $c_1$  に相当するパルスが速度  $c_2$  に相当するパルスを  $I$  上何度も追い越すという様子が観察されるであろう。一方  $c_1 = c_2$  のときは、どちらも速度  $c^* = c_1 = c_2$  の 1-soliton 解に近いので、ほぼ速度  $c^*$  の等速運動をすると予想される。ところが (1) を数値計算し、2つのパルス間隔の時間変動を調べると Fig.4 に見られるように、周期的に変化しているのが観測された。この現象を縮約の考えで理解するのが今回の目的である。

2章では KdV 方程式 ( $\epsilon = 0$ ) に対して、3章では Benney 方程式 ( $\epsilon > 0$ ) に対して考察する。

### 3 KdV 方程式の縮約化

この章では初期値  $u_0$  で  $c^* = c_1 = c_2$  としたときの KdV 方程式におけるパルス相互作用を考えることにする。方程式 (1) ( $\epsilon = 0$ ) を  $z = x - c^*t$  と座標変換し、

$$u_t - c^*u_z + 6uu_z + u_{zzz} = 0, \quad 0 < z < L \quad (2)$$

で考える。また  $u$  は、その初期値  $u_0$  の形からほぼ

$$u(t, z) = \varphi(z - z_1(t); c^*) + \varphi(z - z_2(t); c^*)$$

に近い形をしていると考えることが出来る。

$z_1$  の運動を求めよう。周期境界条件が課せられていることから、 $z_1$  は、その中心が  $z = z_2$  と  $z = L - z_2$  にあるパルスの裾を通して主に影響を受けると考えられる。そこで (2) の解  $u$  を

$$u(t, z) = \tilde{\varphi}^1 + \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}^3 + b, \quad (3)$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^1(z) &= \varphi(z - z_1; c^* + \dot{z}_1), \\ \tilde{\varphi}^2(z) &= \varphi(z - z_2; c^* + \dot{z}_2), \\ \tilde{\varphi}^3(z) &= \varphi(z - L + z_2; c^* + \dot{z}_2) \end{aligned}$$

という形で求めることにする。ここで、 $b$  はより高次の微小量、 $z_1 = z_1(t)$ ,  $\dot{z}_1 = dz_1/dt$  等

とする。また、 $z_1, z_2 \sim 0$  と考える。(3) を (2) に代入し、 $b$  についてその1次の項までを書き表すと

$$b_t + K[\tilde{\varphi}^1 + \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}^3]b + g = 0, \quad (4)$$

ただし、

$$K[\varphi(z)]b = -c^*b_z + 6\{\varphi(z)b\}_z + b_{zzz},$$

また  $g$  は  $b$  を含まない  $b$  に関する非斉次の項、すなわち

$$g(z) = 6\{\tilde{\varphi}^1(z)\tilde{\varphi}^2(z) + \tilde{\varphi}^2(z)\tilde{\varphi}^3(z) + \tilde{\varphi}^3(z)\tilde{\varphi}^1(z)\} \\ + \ddot{z}_1\varphi_c(z - z_1; c^* + \dot{z}_1) + \ddot{z}_2\varphi_c(z - z_2; c^* + \dot{z}_2) + \ddot{z}_2\varphi_c(z - L + z_2; c^* + \dot{z}_2) \quad (5)$$

である。今、 $z \sim z_1$  で考えているので  $\tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3 \sim 0$  と考えることができる。また、 $z_1, z_2 \sim 0$  であるから  $\varphi^*(z) = \varphi(z; c^*)$  として、

$$g \sim g_1(z) = 6[\varphi^*(z - z_1)\{\varphi^*(z - z_2) + \varphi^*(z + L - z_2)\}]_z + \ddot{z}_1\varphi_c^*(z - z_1),$$

及び (4) は近似的に

$$b_t + Mb + g_1 = 0 \quad (6)$$

となる。ただし  $M$  は微分作用素

$$Mb = K[\varphi^*(z - z_1)]b$$

である。今、 $M$  の共役作用素

$$M^*b = c^*b_z - 6\varphi^*(z - z_1)b_z - b_{zzz}$$

に対して  $M^*\varphi^*(\cdot - z_1) = 0$  より (6) において、高次項  $b$  が  $t \rightarrow \infty$  で有界にとどまるための条件として

$$\langle g_1, \varphi^*(\cdot - z_1) \rangle_{L^2} = 0 \quad (7)$$

を得る。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$  は  $I$  上の  $L^2$  内積を表す。(7) は  $l = z_2 - z_1$  として

$$\langle \varphi^*, \varphi_c^* \rangle_{L^2} \ddot{z}_1 + 6 \langle \varphi^*(\cdot), [\varphi^*(\cdot)\{\varphi^*(\cdot - l) + \varphi^*(\cdot + L - l)\}]_z \rangle_{L^2} = 0 \quad (8)$$

となるが、 $l \gg 1$  及び  $L-l \gg 1$  より、

$$\begin{cases} \varphi^*(z-l) \sim 2c^* e^{\sqrt{c^*}(z-l)} \\ \varphi^*(z+L-l) \sim 2c^* e^{-\sqrt{c^*}(z+L-l)} \\ \varphi_z^*(z) \sim \mp 2c^{*\frac{3}{2}} e^{\mp\sqrt{c^*}z} \quad (z \rightarrow \pm\infty) \end{cases} \quad (9)$$

となることを使うと (8) として

$$\ddot{z}_1 + 16c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}l} - e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} \right) = 0 \quad (10)$$

を得る。 $\ddot{z}_2$  に対しても同様の運動方程式

$$\ddot{z}_2 + 16c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} - e^{-\sqrt{c^*}l} \right) = 0 \quad (11)$$

が得られる。(10) と (11) より  $l$  だけの方程式

$$\ddot{l} + 32c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} - e^{-\sqrt{c^*}l} \right) = 0 \quad (12)$$

が成立するが、これは戸田格子の方程式である。従ってパルス間隔の時間振動的挙動は (12) の戸田格子の解の性質より説明される。また、(10)、(11) が方程式 (2) の縮約であり、次の 4 次元曲面  $\Gamma$  上の運動を記述していると考えられる：

$$\Gamma = \{ \varphi(z - z_1; c^* + \dot{z}_1) + \varphi(z - z_2; c^* + \dot{z}_2) + \varphi(z - z_2 + L; c^* + \dot{z}_2); (z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2) \in \mathbf{R}^4 \}.$$

## 4 Benney 方程式の縮約化

この章では (1) で  $\epsilon > 0$  の場合のパルス相互作用を考える。ただし、3 章と同様初期値  $u_0$  で  $c^* = c_1 = c_2$  とする。(2) と同様  $z = x - c^*t$  と変数変換した方程式

$$u_t - c^*u_z + 6uu_z + u_{zzz} + \epsilon Ru = 0, \quad 0 < z < L \quad (13)$$

を扱う。3 章と全く同様にして  $z_1$  の満たすべき方程式が導かれるが、まず高次項  $b$  の満たすべき方程式は (4) に  $\epsilon Ru$  の項を考慮した

$$b_t + K[\tilde{\varphi}^1 + \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}^3]b + g + \epsilon R(\tilde{\varphi}^1 + \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}^3) = 0 \quad (14)$$

となり、 $b$  の  $t$  に関する有界性と 3 章と同様の近似を用いて、結果として

$$\ddot{z}_1 + 16c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}l} - e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} \right) + \epsilon F(\dot{z}_1) = 0 \quad (15)$$

を得る。 $z_2$ についても同様に

$$\ddot{z}_2 + 16c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} - e^{-\sqrt{c^*}l} \right) + \epsilon F(\dot{z}_2) = 0 \quad (16)$$

となる。但し、 $l = z_2 - z_1$ 及び

$$F(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{c^*}} \langle \varphi(\cdot; c^* + \zeta), R\varphi(\cdot; c^* + \zeta) \rangle_{L^2}$$

である。(15), (16) が方程式 (13) の縮約であり、3章と同じ4次元曲面 $\Gamma$ 上の運動を記述している。ここで以後の簡便さのために

$$G(l) = 16c^{*\frac{5}{2}} \left( e^{-\sqrt{c^*}(L-l)} - e^{-\sqrt{c^*}l} \right)$$

とおき、(15) 及び (16) を

$$\ddot{z}_1 - G(l) + \epsilon F(\dot{z}_1) = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{z}_2 + G(l) + \epsilon F(\dot{z}_2) = 0 \quad (18)$$

と表しておくことにする。このとき (17) (或いは (18)) より、次のことが分かる。

まず、2つのパルス間の距離が $\epsilon$ に比べて十分大きい場合、すなわち $l$ 及び $L-l$ が十分大きく $G(l) \ll \epsilon$ となる場合を考えよう。この場合は (17) において $G(l)$ が無視できるため (17) は本質的に

$$\ddot{z}_1 + \epsilon F(\dot{z}_1) = 0 \quad (19)$$

で記述されるであろう。(19) より $z_1$ は $F$ のある安定平衡点 $z_1 = c_0^*$  ( $F(c_0^*) = 0$ ) に $ct$ の時間スケールで漸近していくことになる。このような $c_0^*$ はただ一つであることが $F$ の簡単な計算から分かる。このことは、 $\epsilon R$ という散逸が入ったために任意の速度をもつパルスはもはや存在せず、ある一定の速度 $c_0^*$ のパルスに漸近していくことを示唆しており、[3]の結果と一致する。

それでは各パルスが速度 $c_0^*$ のパルスに十分近づいた後、それらはどのような相互作用により運動するであろうか。そのために $c^* = c_0^*$ とする。 $\dot{z}_1, \dot{z}_2 \sim 0$ より $A = \left. \frac{dF}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} (> 0)$ とおくと、(17) 及び (18) は近似的に

$$\ddot{z}_1 - G(l) + \epsilon A \dot{z}_1 = 0$$

$$\ddot{z}_2 + G(l) + \epsilon A \dot{z}_2 = 0,$$

従って

$$\ddot{l} + 2G(l) + \epsilon A \dot{l} = 0 \quad (20)$$

となる。今  $l$  及び  $L-l$  が十分大きく  $G(l) \sim \delta \ll \epsilon$  としよう。時間スケールを  $T = \delta t$  と変換すると (20) は

$$\delta^2 l_{TT} + O(\delta) + \delta \epsilon A l_T = 0 \quad (21)$$

となるが、(21) において  $\delta$  の一次の項を比較することによって結局  $\delta^2 l_{TT}$ 、すなわち  $l_{TT}$  の項を無視した

$$2G(l) + \epsilon A \dot{l} = 0 \quad (22)$$

が得られる。従って 2 つのパルスの間隔  $l$  は、時間に関して単調に (22) の持つ唯一つの安定平衡点  $l = L/2$  に収束していくことが分かる。これは [1] の結果と一致する。ここで (22) は (20) を更に縮約した方程式にもなっていることに注意しておく (Fig.5)。

その他、数値計算から示される (13) のさまざまな解の挙動が (20) から全て説明できることが分かっている ([2])。

## References

- [1] S.-I. Ei and T. Ohta, Equation of motion for interacting pulses, to appear in Physical Review E.
- [2] S.-I. Ei, M. Mimura and T. Ogawa, in preparation.
- [3] R. Grimshaw and H. Mitsudera, Slowly varying solitary wave solutions of the perturbed Korteweg-de Vries equation revisited, Studies in Appl. Math. 90(1993), 75-86.

## Captions

Fig.1 散逸系における有限次元正不変曲面  $\Gamma$ 。

Fig.2 可積分系における有限次元正不変曲面  $\Gamma$ 。

Fig.3 初期値  $u_0(x)$  の形 ( $c_1 > c_2$  の場合)。

Fig.4 KdV 方程式 (2) における 2 つのパルスのパルス間距離  $l$  の時間発展。

Fig.5 相平面  $(l, \dot{l})$  における (20) の解軌道。

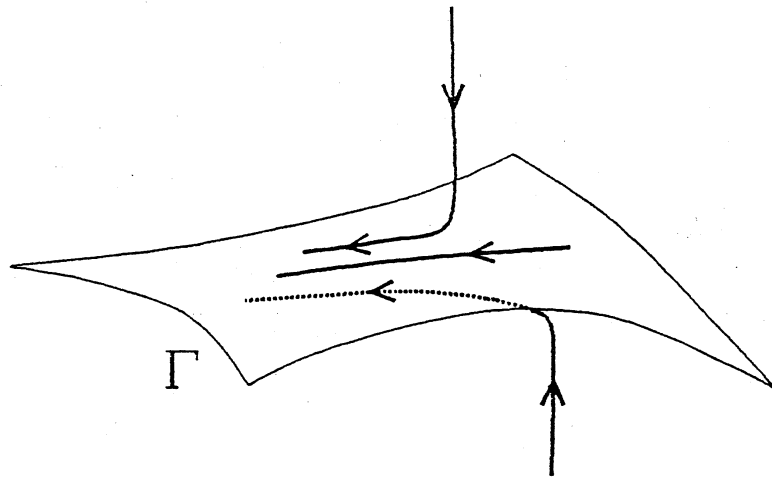


Fig. 1

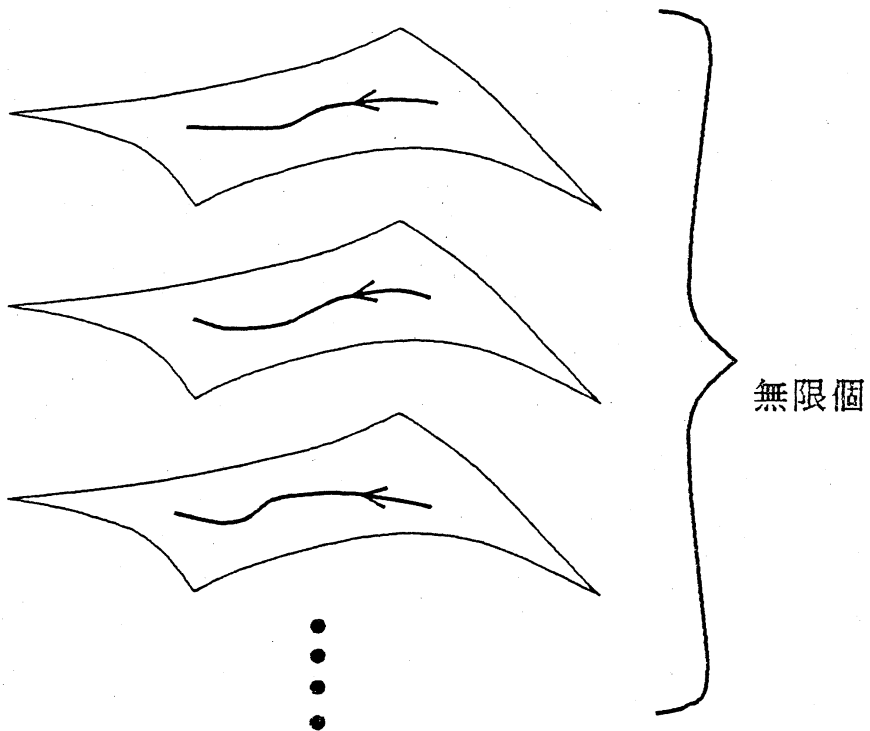


Fig. 2

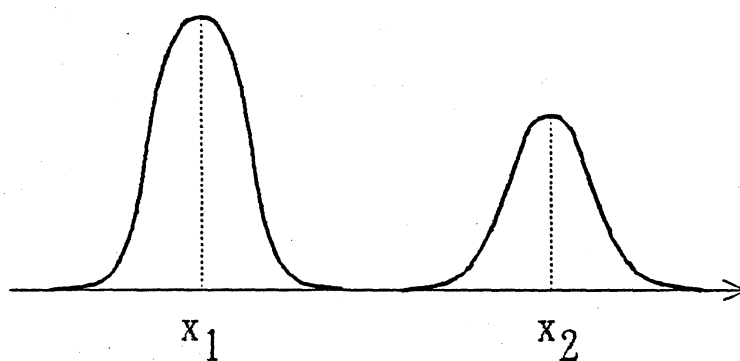


Fig. 3

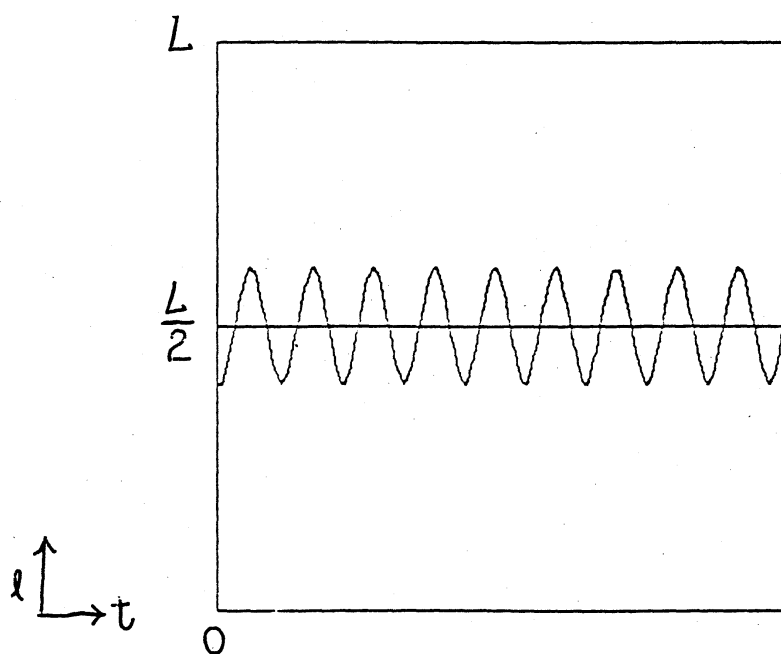


Fig. 4



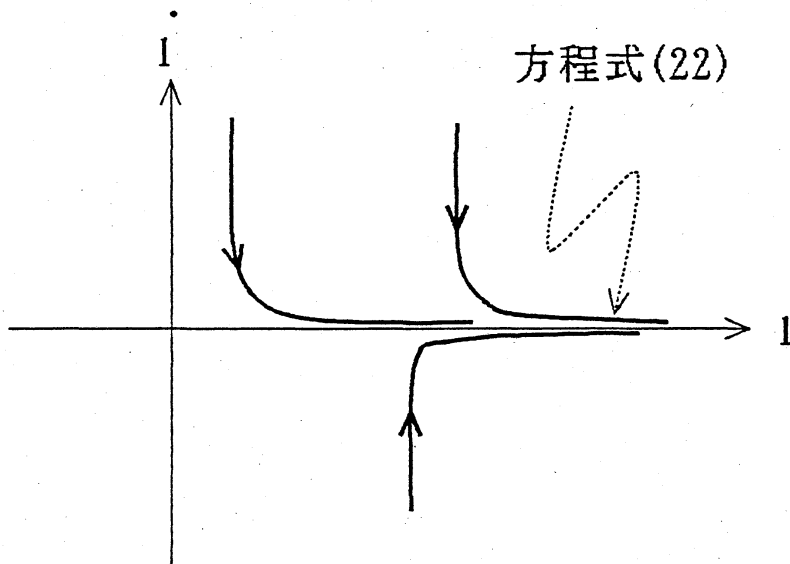


Fig.5